

RETRATO DE ARQUIMEDES pintado em 1620 por Domenico Fetti



Arquimedes

As numerosas anedotas sobre ele valorizam o cientista e inventor, mas pouco falam do geômetra. Seus trabalhos nessa área, contudo, representam o primeiro passo na direção do cálculo integral

Em 264 a.C., sob um pretexto fútil, os romanos invadiram a Sicília e confrontaram os cartagineses, instalados na parte oeste da ilha. A guerra que se seguiu – a primeira púnica – durou mais de 20 anos, e terminou com a derrota de Cartago e o domínio romano sobre grande parte da Sicília. Do lado leste, porém, ao redor de Siracusa, o rei Hierão, que havia se aliado aos romanos, aproveitou as circunstâncias para fazer seu reino prosperar. Ele governou por 54 anos, até sua morte em 215, aos 92 anos.

Mas os cartagineses desejavam uma revanche e, em 218, Aníbal partiu da Espanha e cruzou os Alpes com seu exército. Começava a segunda guerra púnica, que terminaria em nova derrota de Cartago e marcaria o início da expansão romana para fora da península itálica. A Sicília, que ficava a meio caminho entre os dois adversários, permaneceu fiel a sua aliança com Roma até a morte de Hierão. Depois disso, a oposição fez um pacto com os cartagineses. Em 214, o cônsul romano Marcelo atacou Siracusa, com a expectativa de liquidar a questão em poucos dias. Porém, teve de recuar devido às máquinas e estratégias militares de Arquimedes. O cônsul sitiou a cidade, que tombou em 212; o geômetra, já idoso, morreu durante a pilhagem. Várias obras de arte foram transportadas a Roma. Costuma-se dizer que aí começou a admiração romana pela arte grega.

Essas circunstâncias dramáticas explicam a abundância de testemunhos acerca da morte de Arquimedes, transmitidos por dezenas de autores de todos os gêneros. Em pouco tempo, sua vida e caráter tornaram-se tema de anedotas fantásticas ou edificantes. Assim surgiu a lenda de que seria tão distraído que esquecia até de comer ou tomar banho. Absorto em uma demonstração, não teria percebido nem mesmo a queda de Siracusa.

Para alguns episódios, dispomos de várias versões divergentes: cada autor retém apenas aquilo que serve a seu propósito. Por exemplo, para o historiador Políbio – nascido uma década após os acontecimentos –, a narração do cerco de Siracusa serviu para ressaltar o papel decisivo desempenhado por indivíduos excepcionais, ao passo que o escritor e filósofo platônico Plutarco de Queroneia (46-120) interpretou-o como a oposição entre a alma (Arquimedes) e o corpo (os outros siracusanos). Já Cícero, orador e homem público, tentou isentar os romanos pela morte do sábio, e nada falou sobre a captura de Siracusa.

Ele preferiu evocar dois globos celestes construídos por Arquimedes (entre os quais um planetário móvel), e que despertaram grande admiração. Mesmo assim, mencionou-os apenas para observar que esses foram os únicos prêmios que Marcelo aceitou tomar de Siracusa, com o objetivo de consagrá-los ao templo da Virtude. O próprio Cícero, que serviu como questor (magistrado encarregado da gestão dos bens públicos) na Sicília, deu uma espécie de lição aos siracusanos: para servir à glória de Arquimedes, reencontrou seu túmulo, negligenciado pelos compatriotas.

Engenheiro ou Geômetra?

Arquimedes exercitou seus incomparáveis talentos em ao menos quatro especialidades matemáticas: geometria, astronomia, mecânica e óptica. Contudo, se o siracusano avulta incontestemente na Antiguidade como o mais célebre dos sábios, é menos como geômetra que como “engenheiro”. Poucos autores, uma dezena no máximo, e quase todos matemáticos, referem-se a seus trabalhos teóricos, principalmente em geometria. Se ele merece, aos olhos de quase todos, eterna admiração, é por causa das máquinas cuja invenção e/ou fabricação costuma ser-lhe atribuí-



ARQUIMEDES É MORTO por soldado romano, em cópia de um mosaico feito pela escola de Rafael, no século XVI

da, às vezes de maneira pouco rigorosa: máquinas de guerra (como catapulta, guindaste e espelhos ardentes), o parafuso helicoidal, sistemas de polias compostas, a balança dita “romana”, o elevador hidráulico, o planetário.

Esse retrato de inventor genial e fecundo não agrada a todo mundo. O biógrafo Plutarco de Queroneia dedica uma de suas *Vidas paralelas* a Marcelo, o conquistador de Siracusa. Na obra, pinta um quadro totalmente diferente, de um Arquimedes puramente geômetra, que manifesta desdém pelas realizações técnicas e materiais. A narração de Plutarco é brilhante e sedutora. Por ser a mais completa, embora não a mais precisa, costuma também ser a mais citada. Esquecem-se, porém, os objetivos que seu autor perseguia: exaltar a matemáti-

ca “pura” e desvalorizar a técnica e os técnicos. Contudo, Plutarco não podia ignorar a história tradicional, especialmente a utilização das máquinas de guerra que tanto haviam impressionado seus antecessores. A maneira como ele explica a presença de numerosas máquinas de guerra em Siracusa merece atenção. Ele afirma que, para Arquimedes, isso não passava de uma brincadeira de geômetra, resultado de uma ordem do rei Hierão que lhe pedia para vulgarizar sua ciência em benefício do povo. Plutarco fez então uma digressão a respeito da origem da mecânica na época de Arquitas e de Platão. Ele confundiu, ou quis confundir, as soluções por meio de curvas geométricas com instrumentais aproximadas.

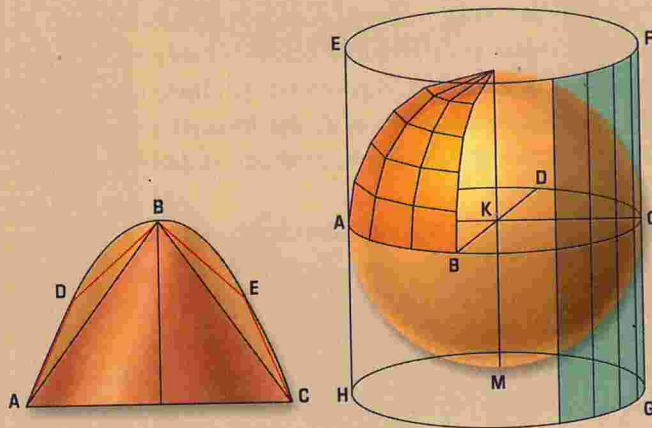
Ao retomar o fio de sua narrativa, Plutarco informa que Arquimedes, certa vez, escreveu ao rei, seu parente e amigo. Na carta, ele disse: “Dê-me um lugar para me firmar e um ponto de apoio para minha alavanca, que eu deslocarei a Terra”. Ele supunha que uma dada força poderia mover não importa qual peso, por maior que fosse. Era uma maneira, um tanto quanto hiperbólica, de contrariar a *Física* de Aristóteles, em particular a afirmação de que, a partir de certo limite, as forças mecânicas não têm mais efeito.

Maravilhado, o rei teria pedido a Arquimedes que fizesse uma demonstração de seu princípio. Plutarco aproveita para emendar outra história famosa: a do levantamento do navio. Nessa versão, um imenso navio foi colocado em terra com grande esforço de uma numerosa mão-de-obra. Depois, foi carregado com homens e mercadorias. Arquimedes, porém, graças a um sistema com diversas polias que multiplicava sua força, sentado e com um gesto tranquilo de mão, teria conseguido sem esforço puxar o navio, que deslizou sem solavancos até o lugar onde estava. Tamanho êxito teria deixado Hierão boquiaberto, a ponto de pedir ao amigo para construir máquinas de guerra.

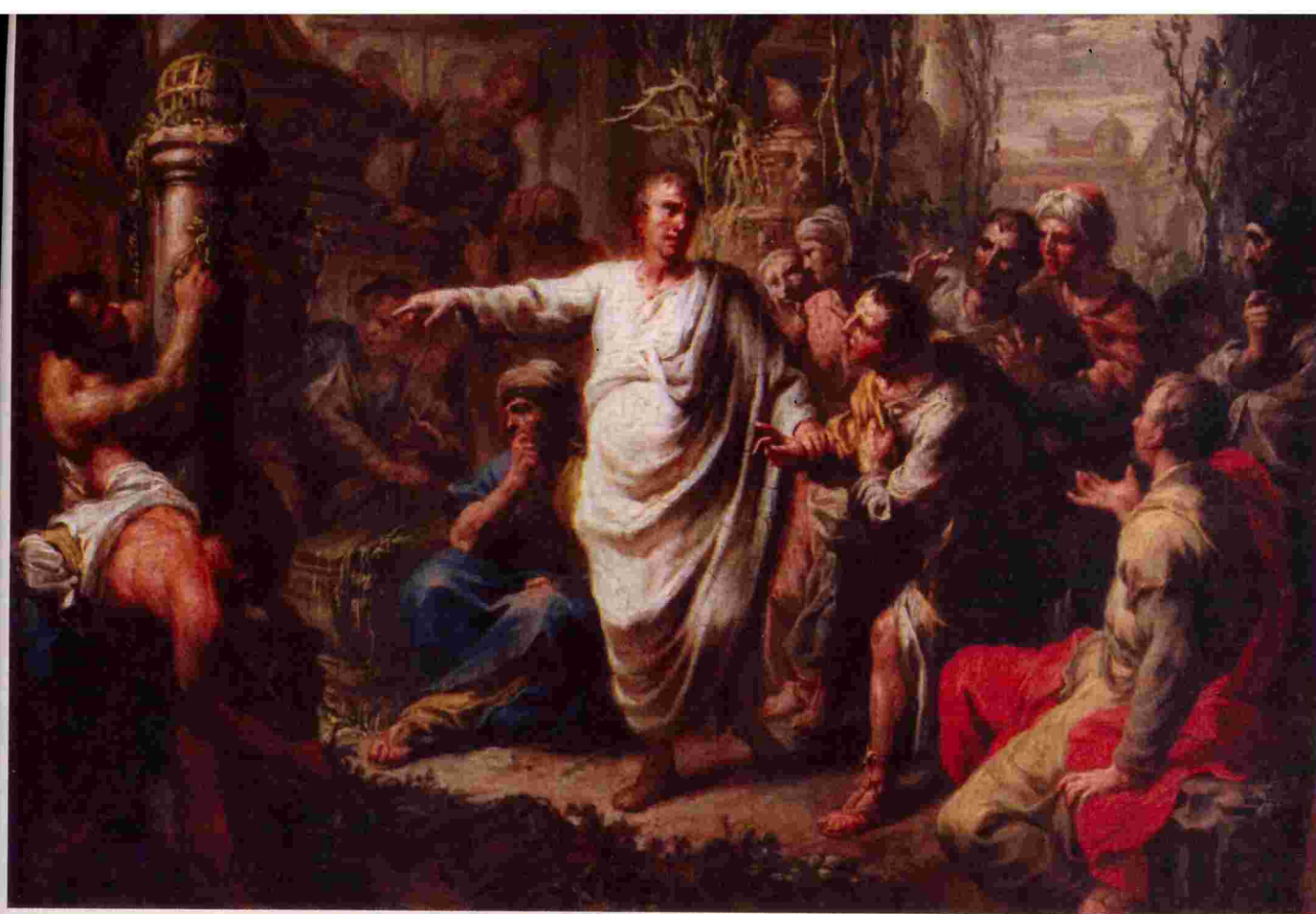
Dois famosos resultados em geometria

1) O volume do cilindro circunscrito à esfera S é igual a uma vez e meia o de S , e a superfície lateral é igual à de S , ou seja, quatro vezes a superfície de um grande círculo [por exemplo, $ABCD$] da esfera. Essa propriedade seria usada em cartografia para projetar a esfera sobre um plano, depois de haver cortado o cilindro ao longo de uma geratriz como EH . 2) A área sob o segmento de parábola $ADBEC$ [superfície compreendida entre a reta AC e a parábola] é igual a quatro terços do triângulo ABC . Dessa propriedade deduz-se a quadratura da parábola [ver artigo na pág. 36].

Arquimedes demonstrou esses dois teoremas pela utilização do método por exaustão: no caso da parábola, o método foi aplicado pela divisão de cada segmento de parábola em dois, depois em mais dois etc. No caso do cilindro e da esfera, Arquimedes aproximou o cilindro com auxílio de prismas com um número cada vez maior de faces, e a esfera de maneira semelhante. A demonstração demandava 32 proposições introdutórias e ocupava cerca de 60 páginas do tratado *A esfera e o cilindro*.



ERIKA ONDIERA



CÍCERO DESCOBRE a tumba de Arquimedes, pintura de Martin Knoller, de 1775

A narrativa não pode ser aceita sem algumas reservas. Para todas essas anedotas, há versões divergentes e é impossível saber qual detalhe corresponde ou não à realidade. Ateneu e Proclo, por exemplo, contam de outro modo a história do navio: Hierão teria mania de grandeza e mandou construir o maior navio da Antigüidade, que ele desejava enviar ao rei Ptolomeu, com uma carga de 2 mil toneladas. Todos os siracusanos reunidos não conseguiram colocar o navio na água. Mas com um mecanismo, Arquimedes teria permitido a Hierão, sozinho, movê-lo até o porto. Na viagem inaugural, Hierão ofereceu seu navio a Ptolomeu: Alexandria era o único porto capaz de abrigá-lo.

Ateneu descreve o mecanismo como um “parafuso sem fim”, inventado por Arquimedes e movido por “poucas pessoas”. Plutarco coloca Arquimedes como parente do rei, enquanto outros ressaltam sua condição modesta. Ele afirma ainda que Arquimedes nada escreveu sobre suas máquinas e invenções, mas aí também contradiz outras fontes, entre as quais Vitruvius e Pappus. De qualquer modo, parece bastante provável que Arquimedes tenha solicitado o patronato do rei, do mesmo modo como mais tarde fariam os inventores da Renascença. Esse fato não é nada compatível com o suposto desdém pelas técnicas.

O retrato esboçado por Plutarco está de acordo com sua posição no debate que se desenvolveu, na época imperial (séculos I e II), a respeito do status da mecânica: para ele, era uma degra-

dação da geometria. Ao ressaltar o desdém de Arquimedes pelas técnicas e a qualidade incomparável de seus escritos teóricos, Plutarco alinha-o em seu campo.

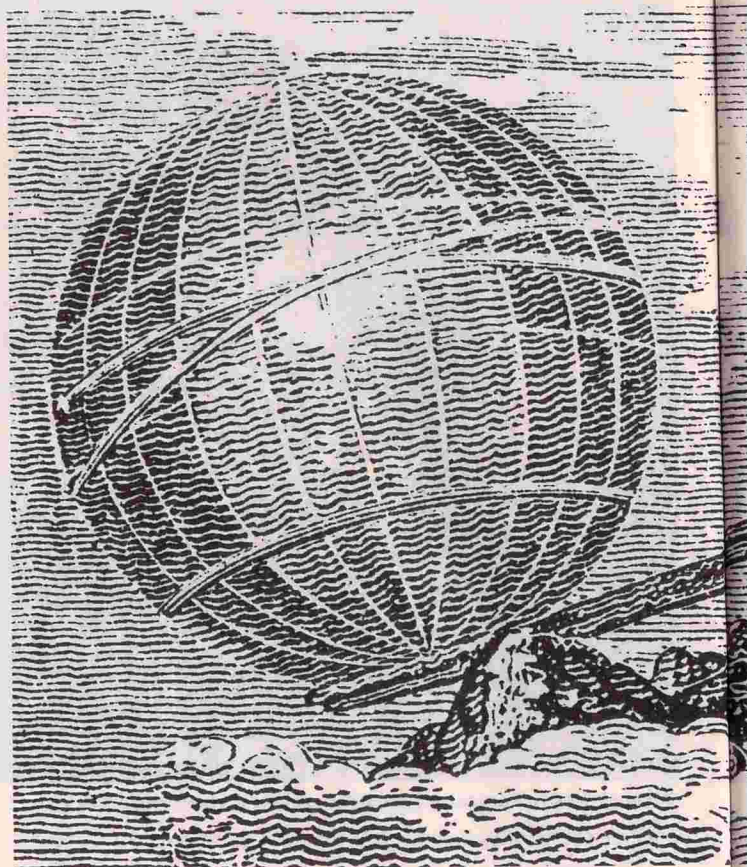
É surpreendente que os modernos tenham aceito, com tamanha confiança, as afirmações do filósofo de Queronéia a respeito de um dos sábios mais completos de seu tempo, inventor e geômetra. Reconstituir sua biografia a partir dessas anedotas é uma tarefa ilusória. Apenas uma coisa parece certa: tais histórias devem ser entendidas como exercícios de “vulgarização” científica dos trabalhos feitos em mecânica pelo siracusano. Contar que Arquimedes pretendia erguer a Terra, ou que construía máquinas que permitiam o deslocamento de um navio por uma só pessoa, serve para ilustrar a universalidade teórica do princípio da alavanca ou a possibilidade de multiplicação da força com o auxílio de engrenagens. A anedota da coroa de ouro, com seu final singular em que Arquimedes interrompe um banho e sai nu pela cidade, aos gritos de “Eureca” (“eu achei”), relembra seus trabalhos em hidrostática, e a descoberta do famoso princípio que ainda hoje leva seu nome (*ver quadro na pág. 75*). A lenda tardia a respeito dos espelhos ardentes, que lhe teriam permitido incendiar a frota de Marcelo, refere-se a suas pesquisas em óptica. Dositeu de Pelusa, correspondente de Arquimedes, havia tentado construir tal espelho, que, colocado sob o Sol, refletisse os raios para um ponto de convergência (ou seja, um espelho parabólico). Essa característica permitiria que ele fosse usado para queimar objetos

distantes. A tradição, certa ou errada, não hesitou em atribuir realizações do mesmo gênero ao siracusano, por conta de seu gênio, sem se preocupar com a verossimilhança.

Arquimedes em Alexandria?

Plutarco não detém o monopólio das afirmações constestáveis ou parciais. Diodoro da Sicília, historiador do século I a.C., menciona por duas vezes certa máquina composta por uma espécie de hélice inserida em um cano cilíndrico, destinada a bombear água. Segundo ele, elas eram usadas no Egito para irrigar as partes do delta do Nilo que as inundações do rio não alcançavam e em minas da Espanha, para esgotar a água do subterrâneo. De acordo com Diodoro, sua força é tamanha que seria possível retirar um rio inteiro das profundezas da Terra até a superfície e que tal máquina teria sido inventada por Arquimedes. Outros autores, como o cientista Filo de Bizâncio, o arquiteto Vitruvius, apaixonado pela história das técnicas, e o geógrafo Estrabão, também mencionaram ou descreveram esse aparelho, mas nenhum atribuiu sua invenção a Arquimedes. Para Diodoro, tratava-se de associar dois elementos, o nome da máquina e o do siracusano. Ele acrescenta, então, que a invenção de Arquimedes teria ocorrido por ocasião de uma viagem ao Egito.

Esse é o único testemunho que existe a respeito da suposta viagem. Contudo, os autores modernos, de maneira geral, aceita-



SEGUNDO PLUTARCO, Arquimedes teria dito a Hierão, rei de Siracusa: "Dê-me um ponto de

Método por exaustão

Para compreender o método por exaustão, consideremos a primeira proposição da Medida do círculo, de Arquimedes (ver figura ao lado). Seja um círculo Q de centro K e raio AK , um triângulo retângulo EFG tal que $EF = AK$ e tal que o lado EG seja igual à circunferência do círculo. Desejamos mostrar que a área do círculo é igual à do triângulo EFG .

Suponhamos que o círculo seja maior que EFG , e chamemos de D a diferença entre a área de Q e EFG . Seja $ABCD$ um quadrado inscrito no círculo. A diferença entre o círculo e o quadrado é constituída por quatro segmentos de círculo iguais. Dividamos o arco AB em duas partes iguais no ponto H , e tracemos os segmentos AH e HB . Se fizermos o mesmo nos outros segmentos de círculo, iremos obter um octógono inscrito.

Como o triângulo AHB é maior que a metade do segmento de círculo AHB , a diferença entre o círculo e o octógono, composta por oito pequenos segmentos de círculo, é menor que a metade da diferença entre o círculo e o quadrado. De acordo

com o princípio de continuidade (Euclides, X-1), se nós repetirmos a mesma operação de dicotomia dos arcos, construiremos um polígono regular P , inscrito no círculo, tal que a diferença de área entre o círculo e P será tão pequena quanto se desejar. Suponhamos que nós a tornemos menor do que a diferença D . Teríamos então $Q - EFG > Q - P$, ou seja, $EFG < P$. Dessa forma, a área do polígono P estaria entre a área do triângulo EFG e a do círculo. Para simplificar, suponhamos que o polígono P seja o nosso octógono. Ele se decompõe em (oito) triângulos isósceles iguais, de mesma altura e cujas bases, adicionadas, constituem o perímetro do octógono. A sua área é portanto igual à área de um triângulo retângulo em que um dos lados do ângulo reto é igual à altura KL , e o outro ao perímetro do octógono (a área de um triângulo isósceles é o produto de sua altura pela meia base).

Finalmente: a altura KL é menor do que o raio AK , e o perímetro do octógono (ou de qualquer outro polígono inscrito) é menor do que a circunferência do círculo. Dessa maneira,

o triângulo retângulo igual em área ao nosso octógono é menor do que EFG , pois cada um dos lados do ângulo reto do primeiro é menor que o lado correspondente do segundo. Assim, o octógono é menor do que EFG . Pela sua construção, porém, ele era maior. Chegamos assim a uma contradição. De modo semelhante, com auxílio de polígonos regulares circunscritos ao círculo, podemos demonstrar que a hipótese "o círculo é menor do que EFG " conduz a uma contradição. Conclui-se daí que o círculo é igual ao triângulo EFG .

Em termos modernos, o raciocínio é diferente. A fórmula $S = 1/2(Ph)$ vale para todos os polígonos inscritos em um círculo, em que S designa superfície, P o perímetro e h a altura. Se aumentarmos indefinidamente o número de lados, o polígono se aproxima do círculo e, no limite, seu perímetro coincidirá com a circunferência do círculo, e sua altura com o raio do círculo. Segue daí o resultado desejado. O método de Eudoxo-Arquimedes não recorre a essa passagem ao limite. Não se "exaure" o



MECHANICS MAGAZINE, 1824

Eureka, eureka!

“Uma questão proposta pelo rei Hierão ocasionou as descobertas hidrostáticas de Arquimedes. O monarca havia enviado a um ourives certa quantidade de ouro para fazer uma coroa, mas o artesão, desonesto, ficou com parte do ouro, após tê-lo substituído pelo mesmo peso de prata. A fraude foi descoberta. Como o rei não desejava destruir uma obra que era extremamente bela, solicitou que Arquimedes descobrisse a quantidade de ouro subtraída. Ele meditou sobre o assunto e, segundo se conta, a solução do problema apareceu-lhe em meio a um banho, e ele saiu totalmente nu, aos gritos de Eureka! – eu achei – palavra que se tornou célebre desde então.”

Montucla, *História das matemáticas*, 1758.

Por imersão, Arquimedes conhecia o volume da coroa [igual ao volume de água deslocado]. Ele o comparou ao volume da quantidade de ouro, e depois de prata, de mesmo peso. Por proporção, então, determinou o tamanho da falcatrua.

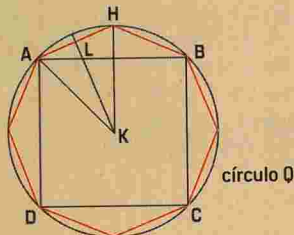
ram-no e até o reforçaram: Arquimedes teria passado uma temporada em Alexandria para estudar. É possível mesmo especular se teria ou não encontrado Euclides. Procurou-se uma confirmação para a estada do siracusano no Egito em sua importante correspondência científica com três pessoas, cuja passagem pela capital dos Lágidas é certa: Cono de Samos, Dositeu de Pelusa e Eratóstenes de Cirene. Mas basta ler essas cartas para ver que Arquimedes não conhecia nem Dositeu nem Eratóstenes antes do início de suas relações epistolares. Ele se dirige aos dois por ter ouvido falar de seu interesse por assuntos matemáticos, e de

apoio para minha alavanca e eu deslocarei a Terra”

círculo por meio de polígonos. Utiliza-se o princípio de continuidade para construir um polígono intermediário, o qual permite derivar uma contradição de cada uma das sub-hipóteses que se deseja descartar. O nome “método por exaustão”, portanto, é mal escolhido, mas indica a proximidade que os matemáticos do século XVII viram entre o procedimento dos antigos e suas investigações infinitesimais.

Axioma de Arquimedes

Para obter um tipo de desigualdade Arquimedes utiliza um lema comparável, segundo ele mesmo afirma, a um de Eudóxo. No

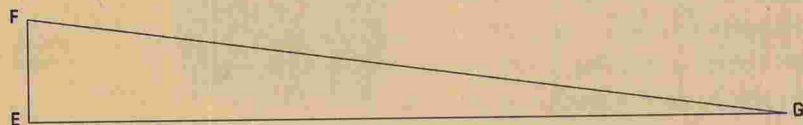


caso da esfera e do cilindro, ele o enuncia assim: “Entre as linhas desiguais, as superfícies desiguais e as figuras sólidas desiguais, o excedente pelo qual a maior supera a menor, acrescido de si mesmo, é capaz de ultrapassar qualquer grandeza dada, entre aquelas que com elas sejam comparáveis”.

Nós ignoramos como Eudóxo formulou seu lema; nas provas por exaustão do livro XII dos *Elementos*, Euclides usa o seguinte resultado: “Dadas duas grandezas desiguais, se da maior é subtraída uma grandeza maior que sua metade, e depois, do resto, uma grandeza maior que sua metade, e se isso for sempre continuado, uma certa grandeza restará, que será menor do que a menor das grandezas iniciais”. Tal resultado havia sido estabelecido

na proposição X-1, a partir da definição V-4: “Diz-se que duas grandezas estão em relação quando são capazes, sendo multiplicadas, de ultrapassar uma a outra”.

Em termos modernos, esses três enunciados afirmam que grandezas geométricas de um mesmo tipo (linhas, superfícies, volumes) obedecem ao “axioma de Arquimedes”: Quaisquer que sejam os elementos x e y desses conjuntos, existe um número inteiro n tal que nx é maior do que y . [Esse axioma é essencial para a obtenção dos resultados intermediários na demonstração acima. Para o método por exaustão, ele se torna essencial por garantir que a aproximação se torna tão pequena quanto desejado.]



ERIKA ONODERA

A arte de combinar geometria e mecânica

Os matemáticos da Renascença estavam convencidos de que os geômetras da Antigüidade mantinham segredo sobre suas descobertas e publicavam demonstrações sintéticas. No caso de Arquimedes e suas provas "por exaustão", era necessário que ele tivesse, desde o início, uma idéia do resultado que desejava obter. De fato, o sábio dispunha de um método poderoso, que combinava considerações mecânicas (lei da alavanca e determinação dos centros de gravidade) com a decomposição das figuras em componentes "indivisíveis" móveis. No século XVII, tais elementos receberiam o nome de "indivisíveis". Vejamos como Aristóteles descobriu que toda esfera tem o quádruplo do volume do cone cuja base é um grande círculo da esfera e a altura o raio da esfera.

Seja uma esfera de centro K e raio AK, e AC e DB dois diâmetros perpendiculares. Seja um cone de vértice A e eixo AC, com base dada pelo círculo de diâmetro BD perpendicular a AC. O círculo de diâmetro EF é a intersecção do cone com o plano tangente, em C, à esfera. Seja um plano qualquer perpendicular ao segmento AC. Esse plano corta os três sólidos em três círculos concêntricos cujo centro S encontra-se sobre o eixo AC. De fato, ele corta o cilindro [ver figura] no círculo de diâmetro MN, a esfera no círculo de diâmetro OQ, o cone AEF no círculo de diâmetro PR. Trata-se de mostrar que a esfera é o quádruplo do cone ABD.

O primeiro passo de Arquimedes foi procurar uma relação entre a posição do plano MN sobre o eixo AC e as áreas dos círculos de intersecção desse plano com os três sólidos mencionados. Ele não especifica seu objetivo, mas usa só resultados geométricos elementares, dos quais alguns estão contidos nos *Elementos*, como o teorema da hipotenusa (I-47) e o fato de que a proporção entre as áreas de dois círculos é a

mesma que aquela entre as áreas dos quadrados descritos sobre seus diâmetros (XII-2). Duas outras propriedades simples de geometria plana, derivadas dos *Elementos*, aparecem:

1. A proporção entre dois segmentos AB e AC é a mesma que a proporção entre o quadrado sobre AB, ABFD, e o retângulo ABEC, definido pelos dois segmentos (Euclides, VI-1). Arquimedes aplica essa propriedade aos segmentos MS e SP:
 $MS/SP = MS^2/(MS.SP)$ (1)

2. O triângulo AQC, inscrito em um semicírculo (um de seus lados é o diâmetro do círculo), é retângulo em Q (Euclides, III-31). A altura QS recorta dois triângulos QSA e QSC semelhantes a AQC [Euclides, VI-8]. Portanto, $AC/AQ = AQ/AS$, ou seja:

$$AQ^2 = AC.AS \quad (2)$$

Para estabelecer a relação entre a posição do plano MN e a área das intersecções do plano com os três sólidos, Arquimedes parte da igualdade $AQ^2 = AC.AS$. Graças às simetrias da figura, os triângulos APR, ABD e AEF correspondem, por construção, à metade de um quadrado. Deduzem-se daí as seguintes igualdades:

$$AS = SP = SR \quad (3)$$

$$AC = CE = AL = MS = SN \quad (4)$$

$$EM \text{ consequência, } AC.AS = MS.SP.$$

Pela equação (2), obtém-se $AQ^2 = MS.SP$. De acordo com o teorema dito de Pitágoras (Euclides, I-47), $AQ^2 = AS^2 + SQ^2$. Daí:

$$AS^2 + SQ^2 = MS.SP \quad (5)$$

Além disso, deduz-se das igualdades (3) e (4) a igualdade $AC/AS = MS/SP$. Mas, de acordo com a igualdade (1), $MS/SP = MS^2/(MS.SP)$.

Portanto, $AC/AS = MS^2/(MS.SP)$, e de acordo com a igualdade (5), $AC/AS = MS^2/(AS^2 + SQ^2)$. Agora, substituímos AS por SP, que lhe é igual, e tomamos o dobro de cada um dos segmentos MS, AS, SQ. Assim, obtemos:

$$AC/AS = MN^2/(PR^2 + OQ^2) \quad (6)$$

Mas esses segmentos MN, PR e OQ são justamente os diâmetros das intersecções do plano MN, perpendicular ao eixo AC, com os três sólidos. De acordo com a proposição XII-2 de Euclides, a proporção entre os círculos de diâmetro MN, PR e OQ é a mesma que entre os quadrados construídos sobre esses diâmetros. Dessa forma, a equação (6) equivale à equação (7) seguinte:

$$AC/AS = \text{Área}_{\text{círculo MN}} / (\text{Área}_{\text{círculo PR}} + \text{Área}_{\text{círculo OQ}}).$$

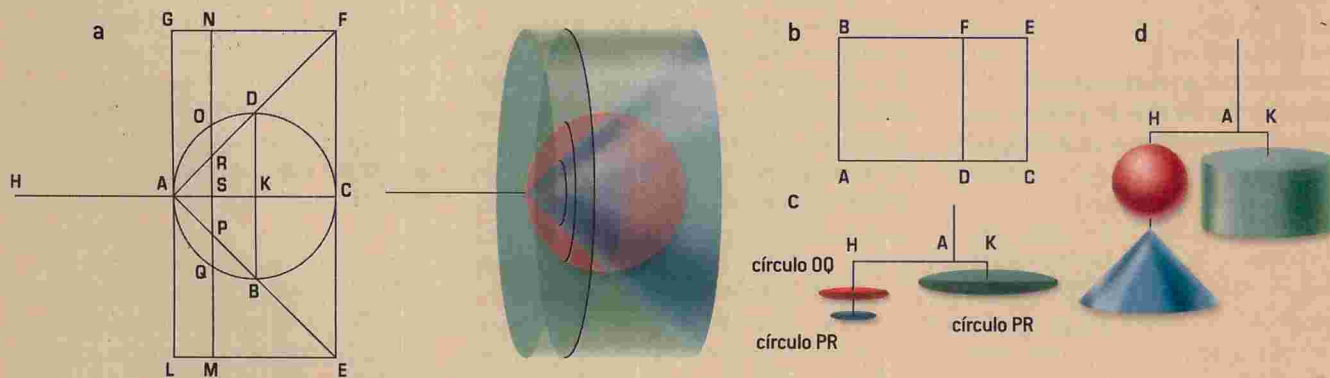
Mecânica em cena

Arquimedes encontrou a relação que procurava. Agora podem entrar em ação todos os ingredientes de seu "método": Arquimedes introduz o ponto H tal que $AH = AC$ e concebe a reta HC como uma alavanca. Na equação (7), ele substitui AC por AH e obtém a equação (8) a seguir:

$$AH/AS = \text{Área}_{\text{círculo MN}} / (\text{Área}_{\text{círculo PR}} + \text{Área}_{\text{círculo OQ}}).$$

Ele interpreta "mecanicamente" esse resultado. Imagina os círculos como discos finos dispostos sobre a "alavanca" AH: o círculo de diâmetro MN é colocado em S, ao passo que os círculos de diâmetro PR e OQ são colocados em H. De acordo com a equação (8), verifica-se então um equilíbrio. De fato, segundo a lei das alavancas (demonstrada por Arquimedes nas proposições 6 e 7 de *Equilíbrios planos*), os corpos equilibram-se quando são colocados de tal maneira que as distâncias ao ponto de apoio (no caso A) são inversamente proporcionais aos pesos. O siracusano considera, assim, os três círculos em questão como elementos dotados de peso, além de homogêneos (para que os pesos sejam proporcionais às superfícies).

Segunda grande idéia: Esse equilíbrio ocorre qualquer que seja a posição do plano MN sobre o eixo AC. Arquimedes considera então "todos" os planos MN: o conjunto de círculos com diâmetro MN (re)constitui o cilindro EFGH, o conjunto de círculos de diâmetro PR o cone AEF,



e o conjunto de círculos de diâmetro OO a esfera. Como todos esses círculos verificam tanto a equação (8) como sua interpretação mecânica, esta última se aplica também a seu conjunto: Ao se suspender a esfera e o cone no ponto H , e o cilindro $EFGL$ em seu centro de gravidade K , os três sólidos ficam equilibrados. Em outras palavras, pela consideração de uma infinidade de proporções do tipo (8), Arquimedes afirma que a esfera e o cone, suspensos em H , equilibram o cilindro, colocado em K . Como o segmento AH é o dobro de AK , o cilindro é, segundo a lei das alavancas, o dobro da soma da esfera e do cone AEF . Mas o cilindro $EFGL$ é o triplo do cone, conforme estabelece o resultado de Eudoxo ["Todo cone é a terça parte do cilindro que tem a mesma base que o cone e a mesma altura"]. Assim, por diferença, o cone AEF é o dobro da esfera.

Para chegar ao cone inscrito no hemisfério da esfera, ABD , basta observar que o diâmetro da base do cone AEF é o dobro daquele da base de ABD , e que sua altura AC é o dobro de AK . O cone AEF equivale então a oito vezes o cone ABD . Conclui-se daí, portanto, que a esfera é o quádruplo do cone ABD , cuja base, o círculo de diâmetro BD , é um grande círculo da esfera e cuja altura, AK , é o raio da esfera.

Arquimedes estava convencido de que seu procedimento permitiria obter outros resultados. Ele redigiu um conjunto de exemplos da utilização desse procedimento [entre os quais os teoremas acerca da esfera e do cilindro, e também da parábola, apresentados no quadro da pág. 72], acompanhados de uma interessante carta-prefácio. Ele enviou a obra àquele que devia ser então o terceiro bibliotecário de Alexandria. Daí vem o título que se costuma dar a essa coleção, "Método a Eratóstenes".

a) Vista em três dimensões e corte da figura utilizada por Arquimedes em sua demonstração: ABD e AEF são o traçado, no plano da página, do cone de vértice A , com BD e EF o traçado dos círculos de diâmetro BD e EF . O retângulo $EFGL$ é o traçado de um cilindro de eixo AC , cujas bases são os círculos de diâmetro GL e EF . A reta MN é o traçado de um plano arbitrário perpendicular ao eixo AC . b) A proporção entre dois segmentos AB e AC é a mesma que entre o quadrado $ABFD$, construído sobre AB , e o retângulo $ABEC$. c) A balança, cujo ponto de apoio é A , fica em equilíbrio com o círculo de diâmetro MN suspenso em K e os círculos de diâmetro PR e OO suspensos em H . d) A balança, cujo ponto de apoio é A , fica em equilíbrio com o cilindro suspenso em K e a esfera e o cone suspensos em H .

APARELHO DESCRITO por Herão de Alexandria (séc. I) para mover um grande peso com pequena força: no sistema de engrenagens, o efeito de multiplicação da força é obtido pela relação entre as circunferências das diferentes rodas dentadas

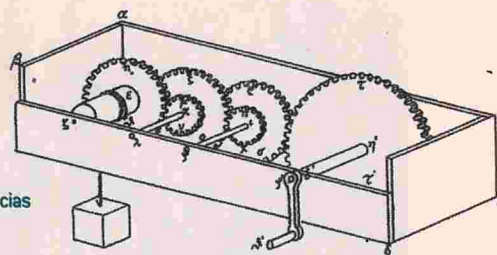


Fig. 1

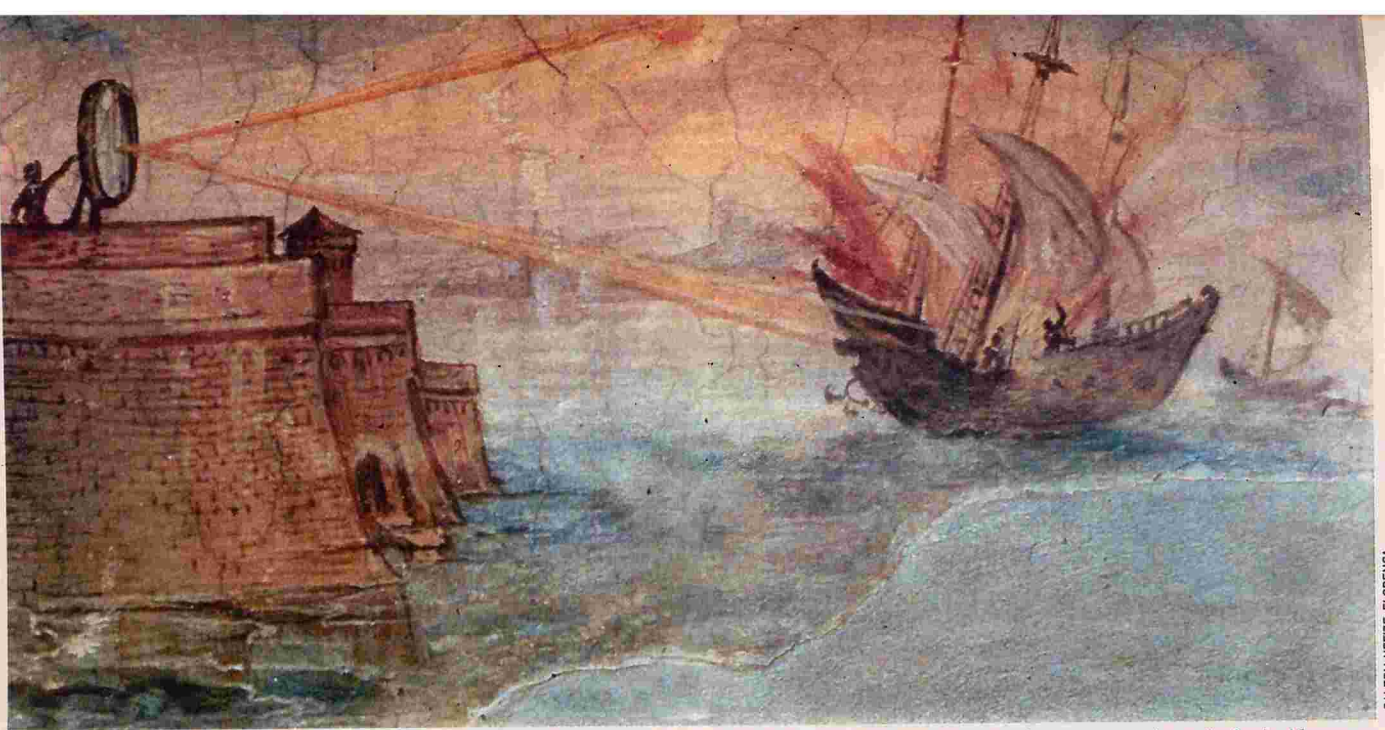
sua competência nesse domínio. Escreve a Dositheu por ocasião da morte de Cono, um amigo comum. No caso de Eratóstenes, a escolha de Arquimedes talvez tenha sido motivada por suas funções oficiais como bibliotecário.

Resta, portanto, Cono, que Arquimedes conhecia pessoalmente, e de longa data. Teriam eles, ainda estudantes, dividido os bancos de Alexandria? A hipótese é ociosa, pois é sabido que Cono viajou para a Sicília para fazer observações astronômicas: o encontro e amizade entre os dois remonta, provavelmente, a esse episódio. Como se vê, não há nenhuma razão para acreditar na viagem de Arquimedes a Alexandria.

Discípulo de Eudoxo

Arquimedes, em seus escritos, nada nos diz acerca de seu aprendizado. Ele não cita nenhum mestre, além de seu pai, o astrônomo Fídias. Em seus trabalhos matemáticos, porém, ele menciona diversas vezes os "geômetras antigos" e, entre eles, parece ter escolhido uma espécie de modelo: Eudoxo de Cnido (primeira metade do século IV a.C.). Geômetra, astrônomo, geógrafo e legislador, esse sábio teria freqüentado a academia de Platão, para depois fundar sua própria escola em Cizico. Em diversos prefácios, Arquimedes ressalta a importância de certos resultados de Eudoxo. Em especial, ele lhe atribui a primeira demonstração de dois resultados que, para nós, estão contidos no livro XII dos *Elementos*: "Toda pirâmide é a terça parte do prisma que tem a mesma base da pirâmide e igual altura" (corolário a XII-7) e "Todo cone é a terça parte do cilindro que tem a mesma base do cone e igual altura" (XII-10). A maneira como Arquimedes enuncia esses resultados é tão próxima da formulação que aparece no livro XII que se pode perguntar se ele não está citando os enunciados de Euclides, ainda que para esclarecer que seu inventor foi Eudoxo.

Os trabalhos de Arquimedes e Eudoxo mostram-se próximos na medida em que atacam o mesmo tipo de problema. Seus principais resultados são sobre a quadratura ou a cubatura de figuras com elementos curvilíneos (círculo, espiral, cone, cilindro, esfera). De maneira anacrônica, é possível interpretá-los como resultados particulares do cálculo integral. Algumas dessas quadraturas e cubaturas são absolutas — permitem, por si próprias, avaliar a área ou volume da figura considerada. Assim, o resultado de Eudoxo sobre a pirâmide permite calcular seu volume. No mesmo sentido, Arquimedes demonstra que a área sob um segmento de parábola é igual a quatro terços do triângulo-



GALERIA UFFIZE, FLORENÇA

ESPELHOS GIGANTES usados por Arquimedes para salvar Siracusa do ataque dos romanos. Refletiam os raios solares e queimavam os navios a distância. Afresco pintado por Giulio Parigi na Galeria Uffizi, Florença, entre 1599 e 1600

lo que tem a mesma base e a mesma altura (*ver quadro na pág. 72*); como a área do triângulo é conhecida, deduz-se daí a área sob o segmento de parábola.

Contudo, o resultado é expresso de maneira relativa. Caso se conheça o volume do cilindro (produto da base circular pela altura, que na época não se sabia calcular, a não ser que a área da base fosse dada, ou a quadratura do círculo, resolvida), então se conhece também o volume do cone: basta tomar sua terça parte. O siracusano mostra também que o volume do cilindro circunscrito a uma esfera vale uma vez e meia o volume dela, e que sua superfície lateral é igual à da esfera – quatro vezes a de um grande círculo.

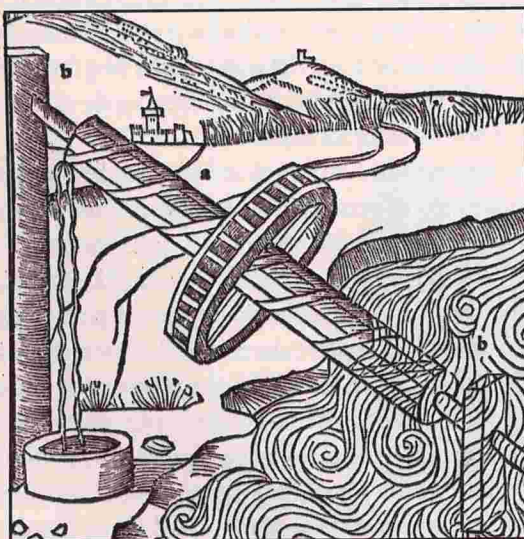
Também nesses casos, as igualdades não conduzem à avaliação efetiva da superfície ou do volume, sem que antes seja feita a quadratura do círculo e a cubatura da esfera. Compreen-

de-se, portanto, que Arquimedes tenha atacado o problema particularmente difícil da quadratura do círculo, conhecido no mínimo desde Hipócrates de Chios. No prefácio à sua *Quadratura da parábola*, o siracusano faz alusão às tentativas anteriores, sem citar nomes, mas afirma que elas repousavam sobre lemas inadmissíveis. Ele reconhece que seus próprios resultados apóiam-se sobre um lema (hoje conhecido como “axioma de Arquimedes”) e ressalta que é comparável a um utilizado por Eudoxo. Além do tema das investigações, há também certo parentesco técnico entre os métodos dos dois geômetras: eles utilizam o mesmo procedimento, que a partir do século XVII passou a ser denominado “método por exaustão” (*ver quadro na pág. 74*).

Círculo e Espiral

Além desses exemplos, os resultados mais célebres de Arquimedes dizem respeito ao círculo, ao qual consagrou um tratado intitulado *A medida do círculo*. Infelizmente, apenas uma espécie de resumo modificado chegou até nós. Alguns resultados sobre as seções circulares, citados por Pappus, desapareceram. Também a ordem das proposições 2 e 3 foi invertida, a menos que a proposição 2 não passe de um interpolação posterior, feita sem o devido cuidado. Restam, porém, dois resultados essenciais.

A primeira proposição demonstra que todo círculo é igual a um triângulo retângulo cujos lados do ângulo reto são iguais, um ao raio, o outro à circunferência do círculo. A demonstração constitui uma espécie de prova por “exaustão” e utiliza uma dupla redução ao absurdo. Chega-se a uma contradição tanto ao supor que o círculo é maior do que o triângulo, como ao supor que é menor. Esse teorema, que provavelmente não foi uma descoberta de Arquimedes, mas uma retomada, cons-



DE ARCHITECTURA, VITRUVIUS, 1548

O PARAFUSO DE Arquimedes, ou parafuso sem fim é um mecanismo utilizado para mover diversos materiais, tais como água, terra e grãos, de um nível para o outro, ou mesmo horizontalmente

tui também outro exemplo de “redução”: como se sabe calcular a área de todo polígono, entre os quais o triângulo, pode-se calcular a área do círculo – desde que seja possível determinar esse triângulo. Quando o círculo é dado, seu raio (ou diâmetro) também o é; no entanto, o comprimento de sua circunferência permanecia (na época) desconhecido.

Em outras palavras, o problema da quadratura do círculo é reduzido ao problema da “retificação” da circunferência: “Encontrar uma reta [segmento de reta] igual à circunferência de um círculo”. Pode-se ficar convencido da existência de tal segmento ao se imaginar um cilindro que rola sobre um plano. Após uma volta completa, os pontos de contato descreveram sobre o plano um segmento cujo comprimento é igual à circunferência da base do cilindro. Contudo, o problema não é saber se esse segmento existe, mas determinar seu comprimento. O problema pode ser formulado assim: “Encontrar a relação entre o diâmetro e a circunferência de um círculo”. Ou seja, encontrar o número (real) π .

Na terceira proposição de seu tratado, Arquimedes compara o diâmetro e a circunferência de um mesmo círculo. Para isso, ele circunscreve ao círculo polígonos de 6, 12, 24, 48, 96 lados e, com uma manipulação habilidosa

de desigualdades, obtém que a circunferência é inferior ao triplo do diâmetro aumentado de um sétimo. Depois, ele procede da mesma maneira com polígonos inscritos no círculo, e mostra que a circunferência é superior ao triplo do diâmetro aumentado de $10/71$. Ele prova que $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$.

Essa abordagem fornece uma aproximação bastante útil: a circunferência do círculo é aproximadamente igual a $(3 + 1/7)$ vezes seu diâmetro, ou seja, $22/7$ vezes seu diâmetro. A precisão é da ordem de 0,2%, o que não é tão mau. A partir daí, obtém-se também um cálculo aproximado para a superfície do círculo. Pela combinação dos dois resultados de *A medida do círculo*, o leitor verifica que 14 vezes a superfície do círculo vale cerca de 11 vezes o quadrado descrito sobre o diâmetro. É possível fazer o mesmo com a superfície da esfera, e portanto do cilindro, depois para o volume do cilindro, e portanto da esfera, do cone, etc. Tais algoritmos aproximados seriam usados por Herão e Theon de Alexandria.

No entanto, o tratado não explica como construir o segmento de reta igual à circunferência de um círculo, o que limita o alcance da primeira proposição. Esse fato perturbou o comentarador Eutócio de Ascalão, assim como seus sucessores medievais. Alguns deles simplesmente postularam a existência do segmento, mas esse não parece ser um bom caminho. Já Eutócio tenta convencer o leitor de sua existência. Segundo ele, Arquimedes dizia ter descoberto uma maneira de produzir tal segmento com auxílio de espirais. É manifesto, porém, que Eutócio não conseguiu encontrar nem pista desse método. Isso significa que ele não teve acesso ao tratado arquimediano *Das espirais*, obra que ilustra uma das facetas mais sofisticadas da geometria grega, a das curvas.

Arquimedes introduz a espiral com as seguintes palavras:

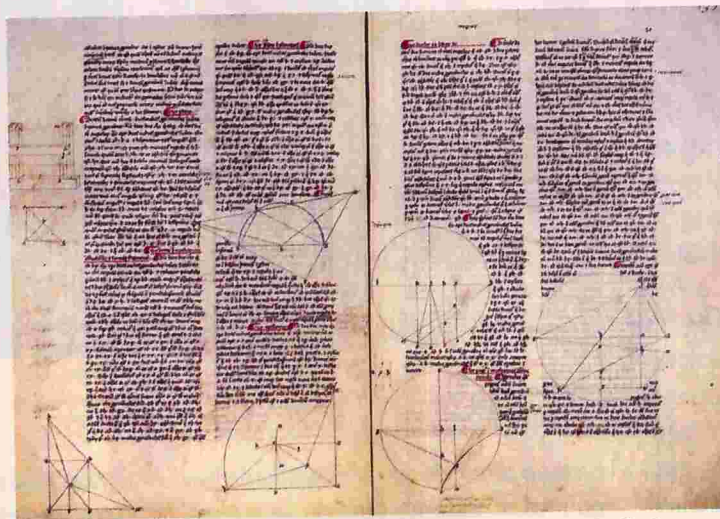
“Quando uma reta gira uniformemente sobre um plano, com uma de suas extremidades fixas, até retornar à posição inicial, e simultaneamente, sobre essa reta que é movida circularmente, um ponto se desloca uniformemente a partir do ponto que permanece fixo, o ponto irá descrever uma espiral sobre o plano”.

O siracusano aplica então a teoria das proporções do livro V dos *Elementos*, não somente às linhas, mas também às durações (intervalos) do percurso, o que lhe permite comparar dois movimentos de espécie distin-

ta, e portanto exprimir as relações entre certos arcos de circunferência associados à espiral e alguns segmentos de reta.

Na proposição 18, ele introduz a tangente à espiral (HF no quadro) no ponto H, correspondente à primeira revolução, e associa a ela outra reta, AF, chamada posteriormente de “subnormal”. Passagem de gênio: Arquimedes demonstra que esse segmento AF é igual à circunferência do primeiro círculo GHK. A espiral permite “retificar” o círculo e fazer sua quadratura.

O que essa solução faz é deslocar o problema. Seria legítimo recorrer a uma curva tão complexa como a espiral? Em princípio, ela não passa da combinação de dois movimentos uniformes simples, um de rotação, outro de translação retilínea. Mas como traçar a tangente à espiral ou a uma curva? A questão não é tão simples, e reapareceria no século XVII como um dos problemas centrais que motivou o desenvolvimento do cálculo diferencial. (BV)



TRADUÇÃO GUILHERME DE MOERBEKE (ca. 1270) da obra *Da esfera e do cilindro*, com comentários de Eutócio. Nestas páginas, o comentarista revê o clássico problema da duplicação do cubo

BIBLIOTECA DO VATICANO