



A geometria DA MEDIDA

GRAÇAS A UMA INTUIÇÃO GENIAL, ARQUIMEDES CONSEGUIU CAPTAR, CASO A CASO, A PROPRIEDADE CRUCIAL: MAS COM OS CONÓIDES E ESFERÓIDES, NO ENTANTO, A SITUAÇÃO É UM POUCO MAIS COMPLEXA



ARQUIMEDES DEFINE A

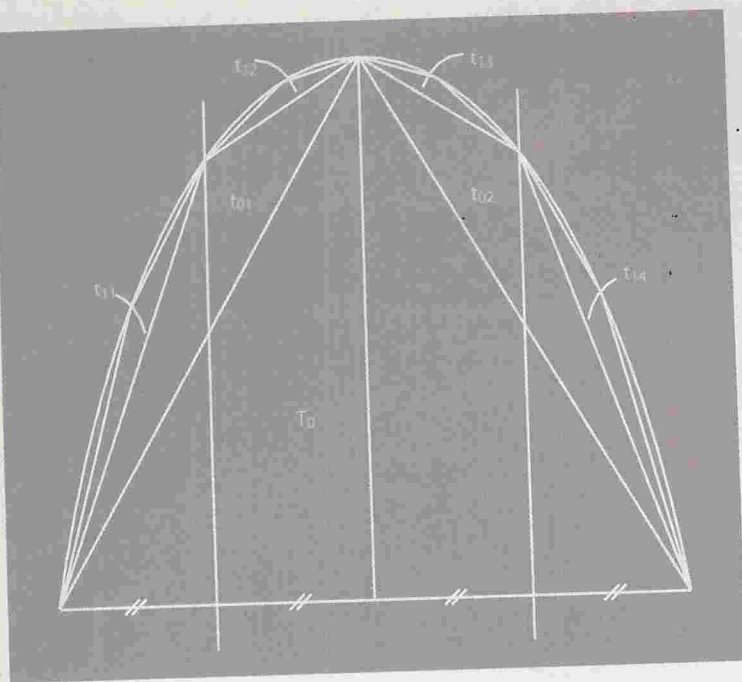
espiral de modo cinemático: uma reta de extremidade fixa roda uniformemente; sobre esta move-se, de modo uniforme, um ponto: a curva descrita por este ponto será a espiral

Em *A quadratura da parábola*, Arquimedes pretende demonstrar que um segmento de parábola é igual a $4/3$ do triângulo com a mesma base e altura que o segmento (ver figura ao lado). A demonstração “geométrica” ocupa as proposições 18-24 e, em termos modernos, se reduz à soma de uma série. Seja P o segmento de parábola e T_0 o triângulo inscrito; nos dois segmentos restantes são inscritos dois outros triângulos, t_{01} e t_{02} , de mesma base e altura. Seja a soma destes T_1 . Nos quatro segmentos de parábola formados são inscritos os triângulos t_{11} , t_{12} , t_{13} , t_{14} , cuja soma é T_2 . Demonstra-se, facilmente, mediante as propriedades da parábola, que $T_0 = 4T_1$, $T_1 = 4T_2$ e assim por diante, isto é, os “pedaços” que são acrescentados ao triângulo não só se tornam cada vez menores, mas cada um é igual a $1/4$ do anterior. Nesse ponto, basta perceber que o polígono construído desse modo se aproxima efetivamente do segmento de parábola e que $T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots = 4/3T_0$.

Na carta com a qual foi enviada a Dosite, ele enfatizava a novidade de seu resultado: “Pelo que sei, nenhum de meus predecessores encontrou a quadratura de um segmento delimitado por uma reta e uma seção de cone retângulo [uma parábola, N.d.A.], algo que eu descobri”. Esses predecessores desconhecidos tentaram, segundo Arquimedes, estudar a quadratura do círculo, de segmentos do círculo e de seções do cone, utilizando, porém, “lemas inadmissíveis”. Arquimedes pede apenas que o seguinte enunciado seja aceito: “Dadas duas superfícies desiguais, o excesso com o qual a maior supera a menor pode ser somado consigo mesmo até resultar maior do que qualquer superfície determinada”.

Esse enunciado, presente em quase todas as suas obras, é o famoso “postulado de Eudoxo-Arquimedes”. Arquimedes afirma que os geômetras que o precederam também empregaram esse “lema” e dele se serviram para demonstrar que a relação entre os círculos é igual à relação dos quadrados de seus diâmetros, para demonstrar que as esferas estão entre si como os cubos dos diâmetros, que a pirâmide é $1/3$ do prisma de mesma base e altura e que o cone é $1/3$ do cilindro.

A questão dos predecessores, não denominados na carta a Dosite, é esclarecida nas cartas a Dosite e Eratóstenes que acompanhavam, respectivamente, *Sobre a esfera e o cilindro* e *O método*: o inventor da demonstração daqueles teoremas é Eudoxo. Assim, parece que a este deve ser atribuída, como notamos anteriormente, a técnica para demonstrar que uma série de figuras se aproxima de outra determi-



PROCEDIMENTO USADO
por Arquimedes em
A quadratura da parábola

nada figura (por exemplo, os polígonos regulares e o círculo). O leitor que recorda a demonstração de que os círculos estão entre si como os quadrados de seus raios (ver *A matemática grega na época de Arquimedes*), reconhece, nesse ponto, muitos elementos comuns entre a quadratura arquimediana e o teorema 2.XII dos *Elementos*.

Logo antes da proposição 18 de *A quadratura da parábola*, Arquimedes define o que significa base, altura e vértice de um segmento de parábola: a base é a reta que interrompe a parábola, a altura é a perpendicular máxima que pode ser traçada da curva até a base e o vértice o ponto a partir do qual a altura é traçada. Percebe-se facilmente – utilizando as propriedades elementares da parábola – que, dado um segmento de parábola, a altura é associada à reta paralela ao diâmetro da parábola traçada desde o ponto central da base (ver quadro ao lado) (QP.18). Esse teorema permite compreender como devem ser formadas as figuras T_1, T_2, \dots : basta, a cada vez, dividir pela metade a base dos segmentos.

Esclarecido como formar o polígono inscrito na parábola, prossigamos a analogia com o que é elaborado na proposição 2.XII. Este polígono se aproxima da parábola, isto é, pode ser inscrito nesta um polígono de tal forma que os segmentos restantes sejam menores do que qualquer grandeza determinada. Em 2.XII dos *Elementos*, essa questão é tratada com abundância de detalhes. Vejamos o que faz Arquimedes. Em QP.20 demonstra um fato quase óbvio, isto é, que T_0 é maior que a metade de

P. A demonstração reproduz as linhas de 2.XII: se considerarmos o paralelogramo R circunscrito a P, dado que $2T_0 = R > P$, teremos $T_0 > P/2$ (ver figura na pág. 36).

Baseado nisso, Arquimedes propõe, sem demonstrar, o seguinte corolário: “É evidente que nesse segmento [parabólico] é possível inscrever um polígono tal que os segmentos restantes sejam menores que qualquer superfície determinada. É claro que se cortarmos continuamente qualquer coisa que, conforme a demonstração precedente, é maior que sua metade, os segmentos restantes se tornarão menores que qualquer superfície determinada”.

Citamos o texto de Arquimedes porque é um belo exemplo de seu estilo. O que significa aqui “evidente”? Talvez fosse claro para os seus correspondentes alexandrinos que ele estava refazendo o que Eudoxo demonstrara e sistematizara em relação aos teoremas citados acima. Talvez fosse evidente apenas para os mais versados em geometria, como seus amigos Cônon e Eratóstenes (quando escreve a Dosithe, Arquimedes não demonstra muito entusiasmo pelos dotes matemáticos de seu correspondente). Seja como for, com a decadência dos estudos no mundo antigo, essa “evidência” deve ter se tomado mais obscura. O que, sim, é evidente é o estilo elíptico de Arquimedes. Note-se que não há sequer referências a obras alheias (do tipo “assim como foi demonstrado para os polígonos inscritos no círculo”).

RELAÇÕES PROPORCIONAIS

RETORNEMOS AO desenvolvimento da demonstração arquimediana. Uma vez estabelecido que o polígono formado pela divisão contínua da base aproxima-se do segmento parabólico, Arquimedes mede esse polígono, isto é, estabelece que relação mantém com o triângulo inicial T_0 . Na proposição 19 (explorando a propriedade fundamental da parábola, ou seja, que os quadrados das ordenadas são proporcionais às abscissas – ver quadro ao lado), Arquimedes demonstra que, a cada vez que repete a formação dos triângulos, o triângulo do qual parte é o quádruplo dos novos triângulos construídos sobre seus lados: $T_1 = 1/4 T_0$; $T_2 = 1/4^2 T_0$; $T_3 = 1/4^3 T_0$...

Depois disso é medido o polígono em relação a T_0 . O que Arquimedes estabelece (QP.22) é, essencialmente, que:

$$(1) T_0 + T_0/4 + T_0/4^2 + \dots + T_0/4^n = 4/3 T_0 - 1/3 (T_0/4^n)$$

Em seguida, demonstra que o segmento parabó-

lico P é $4/3$ de T_0 . No contexto da matemática grega, isso não pode ser obtido mediante uma demonstração direta (algo que exigiria uma soma infinita), sendo necessário recorrer a uma prova por redução ao absurdo. De fato, por um duplo absurdo: é preciso mostrar que P não pode ser nem maior nem menor

que $4/3 T_0$. A igualdade entre uma figura curvilínea e uma retilínea assume um caráter, por assim dizer, negativo.

Suponha-se que $P > 4/3 T_0$. Forma-se então um polígono

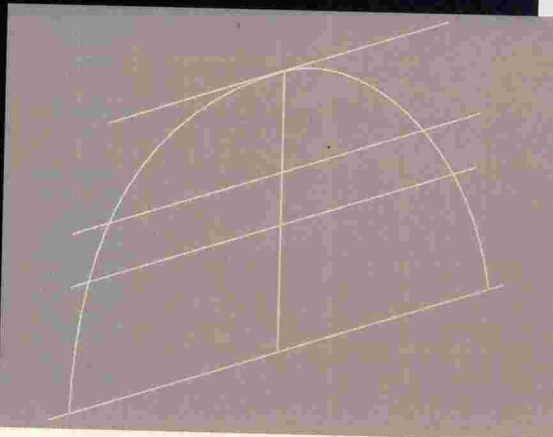
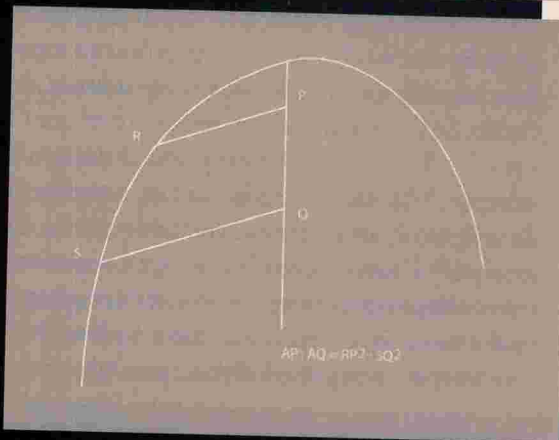
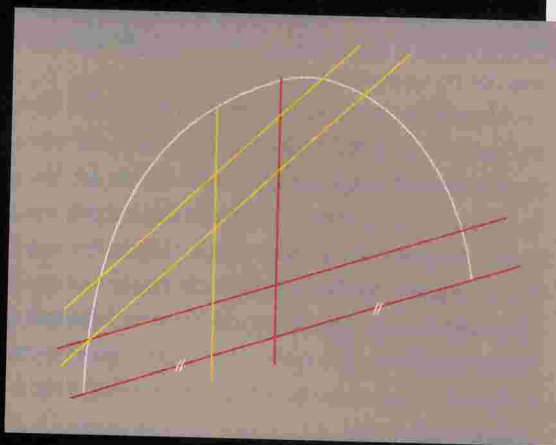
$$(2) \Theta = T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_n = T_0 + T_0/4 +$$

A PARÁBOLA DE ARQUIMEDES

A *quadratura da parábola* é um dos poucos textos que nos permitem examinar a teoria pré-apoloniana das cônicas: infelizmente Arquimedes, enunciando nas três proposições iniciais algumas propriedades da parábola, não as demonstrou, remetendo o leitor, vagamente, a certos "Elementos relativos às seções cônicas". Por comodidade e brevidade de exposição, não seguiremos aqui a terminologia arquimediana. Forneceremos alguns elementos, tomados à terminologia apoloniana, que poderão ser úteis para nossa discussão. A parábola, assim como as outras cônicas, é dotada de infinitos diâmetros, isto é, de retas que cortam em duas partes de mesma medida todas as cordas paralelas a uma direção determinada. No caso da parábola, os diâmetros são todos paralelos entre si (*ver figura no alto*). As cordas cortadas ao meio pelo diâmetro são ditas "traçadas ordenadamente". A ordenada ao diâmetro é uma semicorda traçada ordenadamente (*ver figura central*). O vértice da parábola é o ponto no qual o diâmetro encontra a curva. Note-se que os conceitos de diâmetro e de ordenada constituem um par de conceitos: ao assinalar-se o diâmetro da parábola assinala-se a direção da ordenada e vice-versa.

A propriedade básica usada por Arquimedes é aquela segundo a qual os quadrados das ordenadas são proporcionais aos segmentos que estas distinguem sobre o diâmetro a partir do vértice da curva (segundo a terminologia moderna, às abscissas) (*ver figura central*). A outra propriedade que usaremos é aquela segundo a qual a tangente à parábola no extremo do diâmetro é paralela à direção das ordenadas, e vice-versa (*ver figura embaixo*). Disso segue-se, facilmente, que, dado um diâmetro e a direção relativa das ordenadas, para traçar a tangente no vértice basta traçar a paralela às ordenadas no vértice; e, vice-versa, segue-se que, dada a tangente e o diâmetro, todas as cordas paralelas à tangente serão cortadas ao meio pelo diâmetro.

Apolônio demonstrou essas propriedades baseado em considerações estereométricas (existência de um diâmetro, proporcionalidade entre quadrados das ordenadas e abscissas). A existência de infinitos diâmetros e as propriedades da tangente às cônicas ocupam, assim, grande parte do livro I de *As cônicas*. É difícil formar uma idéia precisa de como essas propriedades teriam sido estabelecidas nos *Elementos* que Arquimedes menciona.



Adriana França

$T_0/4^2 + \dots T_0/4^n$
 tal que $P - \Theta < P - 4/3T_0$, o que equivale a dizer
 que $\Theta > 4/3T_0$ mas isto é impossível. De fato, para a
 relação (1) temos:

$$(3) \Theta = T_0 + T_0/4 + T_0/4^2 + \dots T_0/4^n = 4/3T_0 - 1/3(T_0/4^n)$$

isto é, $\Theta < 4/3T_0$.

Resta mostrar que o segmento parabólico não
 pode ser menor que $4/3T_0$. Se o fosse, seria formado
 um polígono $\Theta = T_0 + T_0/4 + T_0/4^2 + \dots T_0/4^n$, de
 tal modo que $T_0/4^n = T_n$ seria menor que $4/3T_0$
 - P. Da relação (1) temos que $\Theta = 4/3T_0 - 1/3T_n$ e,
 portanto,

$$(4) 4/3 T_0 - \Theta = 1/3 T_n < T_n < 4/3 T_0 - P$$

isto é, $\Theta > P$, o que é absurdo, pois Θ é um polígono
 inscrito no segmento parabólico.

Conseqüentemente, o segmento parabólico deve
 ser igual a $4/3$ do triângulo de mesma base e altura.

Já a semelhança entre os métodos de Eudoxo,
 que descrevemos, e os de Arquimedes é ainda mais
 impressionante se examinarmos rapidamente a pri-
 meira proposição de *A medida do círculo*, na qual
 Arquimedes demonstra, seguindo essencialmente o
 mesmo caminho, que o círculo C é igual ao triângulo
 retângulo T cujos catetos são a circunferência retifi-
 cada e o raio.

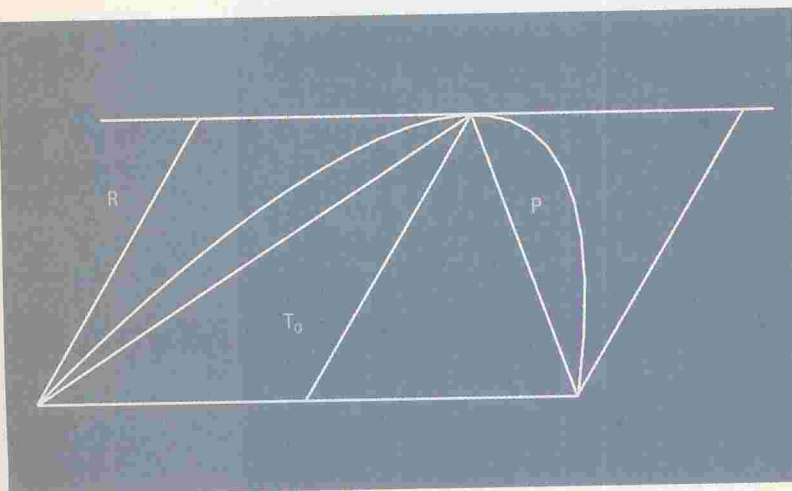
Ele procede mediante uma dupla redução ao
 absurdo, dando como certo que os polígonos regu-
 lares inscritos na circunferência se aproximam do
 círculo. Se $C > T$, forma-se um polígono p tal que C
 - p < C - T. Assim, o polígono p seria maior que o
 triângulo. Mas isso é absurdo. De fato, o perímetro
 do polígono é menor que a circunferência retificada
 (por quê?). E dado que o polígono é igual a um triân-
 gulo tendo como base o perímetro e altura o apótema
 (que é menor que o raio do círculo), o triângulo T
 (que tem por base a circunferência e por altura o raio)

resulta maior que o polígono: portanto, o círculo não
 pode ser maior que o triângulo. Se, em vez disso, C
 < T, consideremos então os polígonos circunscritos
 ao círculo. O texto que chegou a nós alude de forma
 bem resumida a uma possível demonstração do fato
 de que também os polígonos circunscritos se aproxi-
 mam do círculo. Considere um polígono circunscrito
 P tal que $P - C < T - C$. P seria assim menor que o
 triângulo T, o que é absurdo. De fato, a altura de T é
 o raio e a sua base a circunferência: mas o perímetro
 do polígono é maior que a circunferência (por quê?)
 e será, portanto, igual a um triângulo maior que T.

Vale lembrar que o texto de *A medida do cír-
 culo* nos chegou deteriorado. Apesar disso, não há
 dúvida de que representa outro exemplo da técnica
 demonstrativa arquimediana e de seus vínculos com
 a de Eudoxo. E, sobretudo, representa outro exem-
 plo daquele estilo elíptico, acessível apenas aos ini-
 ciados, que mencionamos ao tratar da quadratura da
 parábola. Vários aspectos são pressupostos ou ape-
 nas sugeridos. Além disso, a demonstração empre-
 ga, implicitamente, postulados que Arquimedes
 estabeleceu em outra parte, mais precisamente em
Sobre a esfera e o cilindro: trata-se dos postulados
 que permitem estabelecer relações de maior ou
 menor entre linhas retas e curvas com os mesmos
 extremos (e que respondem aos "porquês" que nos
 atormentaram acima).

É claro que a demonstração da quadratura da
 parábola depende do conhecimento *a priori* do resul-
 tado. Surge assim o problema: como Arquimedes
 fez para saber que a parábola era exatamente $4/3$ do
 triângulo? Trata-se de um problema mais geral: todas
 as demonstrações arquimedianas relativas à geometria
 da medida são efetuadas de forma indireta e exigem
 que o resultado seja previamente conhecido. No caso
 em questão, podemos especular que Arquimedes
 teria raciocinado mais ou menos da seguinte forma:
 o polígono preenche a parábola, entre os seus vários
 pedaços há uma relação simples (cada um é um
 quarto do precedente), estimemos qual deve ser a
 soma desses pedaços ($4/3$) e depois demonstremos
 que é de fato $4/3$. Mas além de essa conjectura não
 ter bases textuais, em outros casos é bem mais difícil
 imaginar, com base no texto da demonstração, qual
 teria sido a via heurística seguida.

Por exemplo, para permanecer no âmbito da
 quadratura da parábola, a primeira demonstração do
 texto, a "mecânica", utiliza propriedades mais ocul-
 tas da parábola e reduz, de modo surpreendente, a
 quadratura ao conhecimento do centro de gravidade



do triângulo. A situação é ainda mais complexa em outros casos, como o de *Sobre a esfera e o cilindro* ou o da determinação da relação entre hiperbolóides de rotação e cone inscrito em *Conóides e esferóides* ou, ainda, o da retificação da circunferência obtida em *Sobre as espirais*.

Daí a importância da descoberta de *O método*: como veremos em mais detalhe, nessa obra Arquimedes apresenta a Eratóstenes o procedimento heurístico que seguia. A descoberta desse texto iluminou o “segredo de Arquimedes”, que os matemáticos do Renascimento tardio tentaram desvendar, inventando ao mesmo tempo métodos e conceitos que gerariam a matemática moderna. O método permite esclarecer o procedimento, bastante obscuro, que Arquimedes emprega na quadratura mecânica da parábola e elucidar as relações entre mecânica e geometria em seu pensamento.

O outro ponto que gostaríamos de enfatizar é o seguinte: ao avaliar a área do polígono Θ , Arquimedes demonstra a relação (1). É interessante observar que, utilizando os mesmos meios e a mesma linguagem de Arquimedes, é possível demonstrar facilmente uma relação geral do seguinte tipo:

$$(5) T_0 + T_0/k + T_0/k^2 + \dots + T_0/k^n = k/(k-1) T_0 - 1/(k-1) \times T_0/k^n$$

Na verdade estamos exagerando um pouco. A linguagem da geometria grega não é algébrica e, em certo sentido, nem mesmo é passível de algebrização. Usamos a notação algébrica aqui apenas por comodidade e concisão, mas a tradução algébrica de um texto geométrico grego pode ser enganosa. Dito isso, porém, um enunciado geral do tipo (5) estaria perfeitamente ao alcance de Arquimedes. Mas não encontramos em sua obra qualquer esboço ou tentativa de generalização. A proposição QP.22 é apenas um lema, com vistas a obter um resultado que serve para a demonstração do teorema principal.

A situação não é isolada: Arquimedes (e tampouco a geometria grega) não considera casos gerais. Sua atitude é diametralmente oposta à do matemático moderno, que sempre tenta formular o enunciado nos termos mais gerais possíveis. Essa diferença não é casual, mas reflexo de uma distinção mais profunda entre a matemática antiga e a nossa. Examinamos extensamente *A quadratura da parábola*, mas não poderemos fazer o mesmo com as outras obras de Arquimedes. Mencionaremos apenas seus conteúdos e alguns problemas que eles suscitam.

Sobre a esfera e o cilindro contém resultados relativos ao “volume” da esfera e à superfície esférica.



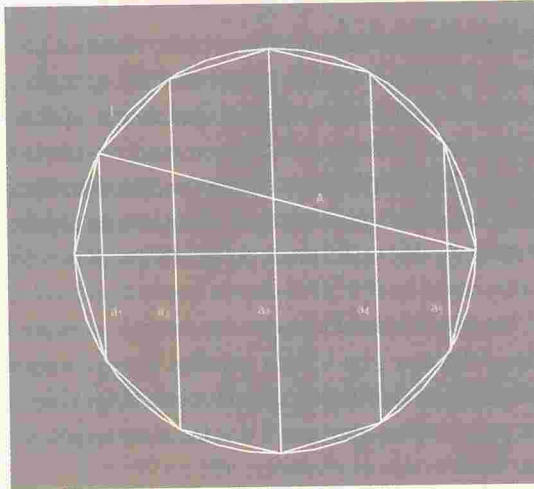
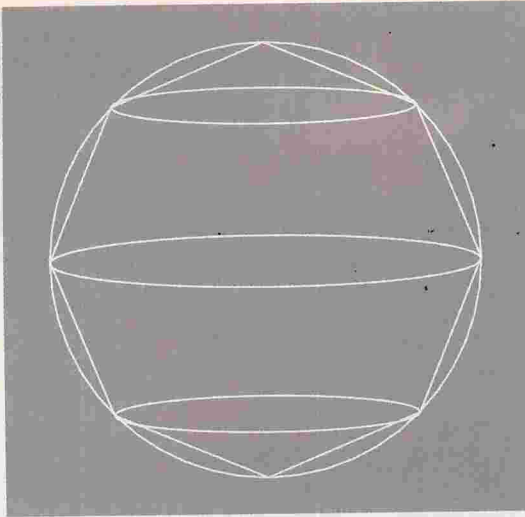
MARCO TÚLIO CÍCERO descobrindo a tumba de Arquimedes, pintura de Benjamin West

A técnica demonstrativa é, em parte, similar à presente na obra *A medida do círculo*, mas aplicada a situações bem mais complexas. Quanto aos aspectos volumétricos, Arquimedes demonstra que a esfera é igual a $2/3$ do cilindro a ela circunscrito. Para isso, deve construir aproximações à esfera, e uma escolha natural é a de considerar os polígonos inscritos e circunscritos a um círculo e depois fazer a figura rodar. A rotação do círculo produz uma esfera, a rotação dos polígonos gera sólidos inscritos e circunscritos à esfera feita de cones e partes de cone. Assim como os polígonos se aproximam do círculo, esses sólidos devem se aproximar da esfera. Ou não?

APARATO DE POSTULADOS

COM EFEITO, AS COISAS não são assim tão simples. Para aplicar essa intuição, Arquimedes precisou mobilizar um poderoso aparato de postulados, lemas e teoremas que permitiam avaliar as relações entre os sólidos obtidos pela rotação. Além disso, o problema era ainda mais complexo. Segundo *O método*, a idéia que o guiava era a seguinte. Dado que o círculo é associado ao triângulo retângulo que tem por base a circunferência retificada e por altura o raio, é razoável conjecturar que a esfera seja associada ao cone que tem como círculo de base a superfície da mesma esfera e como altura o raio da esfera. Pressupondo que tal conjectura seja válida (e o é), a determinação do “volume” da esfera vincula-se com a da sua superfície.

Essa dupla operação heurística está implícita na demonstração e a obscurece. De qualquer forma, tentaremos esboçá-la. Arquimedes determina primeiro a superfície lateral do cone. Note-se que os resultados relativos ao “volume” do cone remontavam a Eudoxo e, nos *Elementos*, não há demonstra-



ções relativas à superfície cônica: trata-se, portanto, de resultados originais. (Esse fato levanta um problema: entre Eudoxo e Arquimedes decorreu quase um século, cabendo assim perguntar de que se ocuparam os matemáticos alexandrinos nesse período.)

Munido desse instrumento, Arquimedes inscreve na esfera um sólido semelhante a uma maçã descascada por alguém desajeitado: no círculo máximo é inscrito um polígono de $4n$ lados e, em torno do diâmetro AC, a esfera é girada (*ver figura acima*). A superfície esférica mudará de aspecto, enquanto o polígono gerará um sólido feito de cones e partes de cone, envolvido assim em um soma de superfícies cônicas (SC.23.I). Nesse ponto trata-se de mostrar que, para esse sólido, vale a intuição que mencionamos, ou seja, cada uma das partes de que é constituído é igual ao cone que tem por altura a perpendicular traçada no lado do polígono desde o centro da esfera e por base a superfície cônica que o envolve. A figura aproximativa resulta, portanto, igual a uma soma de cones, todos de igual altura, mas de base diferente:

a soma de todas as bases é a superfície do sólido “maçã descascada”. A intuição sobre a relação entre superfície e “volume” é assim verificada para o sólido aproximativo. Ora, o problema é o de calcular esse cone que tem por altura a perpendicular em um lado do polígono e por base a superfície da “maçã”. Qual a soma de todas as superfícies?

Para calculá-la, Arquimedes descreve cada superfície envolvente como um círculo, cujo raio é a média proporcional entre duas linhas, uma dessas sendo fixa: se a superfície da “maçã” é dada por $S_1 + S_2 + S_3 + \dots$ demonstra-se que a superfície S_i é igual ao círculo de raio r_i , em que r_i satisfaz $r_i^2 = l \times L_i$ e em que l é o lado do polígono e os L_i são tais que sua soma seja igual à soma de todas as cordas a_1, a_2, a_3, \dots (*ver figura à esq.*). Trata-se de uma escolha oportuna, pois para somar os círculos basta somar os quadrados de seus raios:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots = \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots) = \pi (l \times L_1 + l \times L_2 + l \times L_3 + \dots) =$$

$$\pi l \times (L_1 + L_2 + L_3 + \dots) = \pi l \times (a_1 + a_2 + a_3 + \dots)$$

O problema (difícil) de somar as superfícies cônicas é, assim, reduzido de forma mais ou menos miraculosa a um outro, aparentemente não menos difícil: o de somar certas cordas de um círculo. Intervém aqui um outro *deus ex machina*. Na proposição SC.21.I, utilizando-se somente a propriedade da semelhança dos triângulos e das proporções, demonstra-se que $l \times (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = d \times A$, em que d é o diâmetro do círculo e A é o segmento de reta que subtende a metade dos lados do polígono com exceção de um. Dito de outra maneira, a base do cone equivalente à “maçã mal descascada” é reduzida a um círculo cuja medida depende somente do diâmetro e do número de lados do polígono inscrito. Podemos compreender assim que esses resultados sejam exatamente o cálculo que Arquimedes procurava: de fato, se o polígono tem um número de lados suficientemente grande, A terá um comprimento pouco menor que o diâmetro d e $\pi(d \times A)$ será pouco menor que $\pi(d \times d) = \pi(2r \times 2r) = 4\pi r^2$. Em outras palavras, a superfície da “maçã descascada” aproxima a superfície esférica e vale aproximadamente quatro círculos máximos; a “maçã” aproxima a esfera e é pouco menor que quatro vezes o cone que tem por altura o raio e por base o círculo máximo da esfera.

Obtido esse valor, resta ainda demonstrar muitas coisas: que a “maçã” se aproxima da esfera e que sua superfície se aproxima da superfície esférica; mostrar, mediante dupla redução ao absurdo, que a superfície esférica é igual a quatro círculos máximos (SC.33.

I) e, por fim, que a esfera é quatro vezes o cone que tem por altura o raio e por base o círculo máximo da esfera (SC.34.I). Após isso, é um corolário fácil de mostrar que a esfera é igual a $2/3$ do cilindro a ela circunscrito.

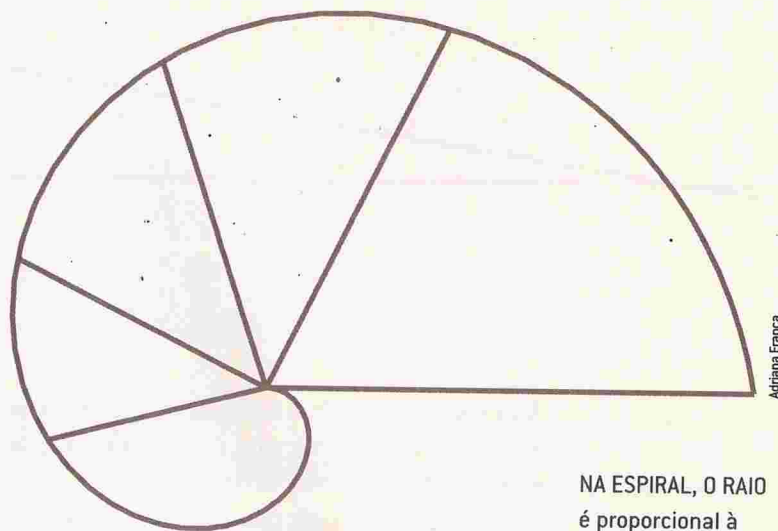
Não avançaremos mais no labirinto de *Sobre a esfera e o cilindro*. O que importa assinalar é que os lemas que sustentam todo o edifício demonstrativo (os que servem para calcular as somas que descrevemos acima) baseiam-se em propriedades do círculo que intervêm de forma inteiramente *ad hoc*. Trata-se de uma característica que *Sobre a esfera e o cilindro* tem em comum com a quadratura geométrica da parábola: a construção dos polígonos aproximativos e o fato de que são dispostos segundo uma progressão geométrica dependem de propriedades especiais da parábola. Como veremos adiante, nas obras mais maduras de Arquimedes essa capacidade de utilizar de modo genial as propriedades da figura estudada tenderá a ser substituída por raciocínios mais gerais ou, pelo menos, generalizáveis.

O ESTUDO DA ESFERA

SOBRE A ESFERA E O CILINDRO é talvez a obra mais complexa de Arquimedes. A dificuldade não é tanto compreender o objetivo da obra quanto entender o caminho que percorreu para obter seus resultados. Não surpreende, assim, seu desejo de que o resultado fosse esculpido em sua tumba. Foi uma de suas obras mais estudadas, inclusive em razão da importância das conclusões, relativas a figuras bem conhecidas na tradição da geometria da medida.

A descoberta dos resultados sobre a esfera abriu um novo campo de problemas a Arquimedes e aos geométricos capazes de acompanhá-lo. Por exemplo, encontrar uma esfera igual a determinado cone ou cortar uma esfera de tal modo que os segmentos obtidos tenham uma determinada relação. Esses e outros problemas são discutidos no livro II de *Sobre a esfera e o cilindro*. Mas Arquimedes transmitiu suas idéias a Cónon sem demonstração e retardou o envio desta a Alexandria. Assim estimulava os matemáticos alexandrinos a estudarem os sólidos gerados pela rotação das seções cônicas. Tais informações provêm da carta com a qual enviava *Sobre as espirais* a Dosithe. O envio do texto tinha o objetivo de fornecer aos matemáticos de Alexandria as demonstrações relativas a um problema cujo exame fora proposto a eles.

Esse problema, segundo Arquimedes, dizia respeito a outro tipo de questão e “nada tinha em comum” com aquelas relativas aos sólidos: tratava-se



Adriana França

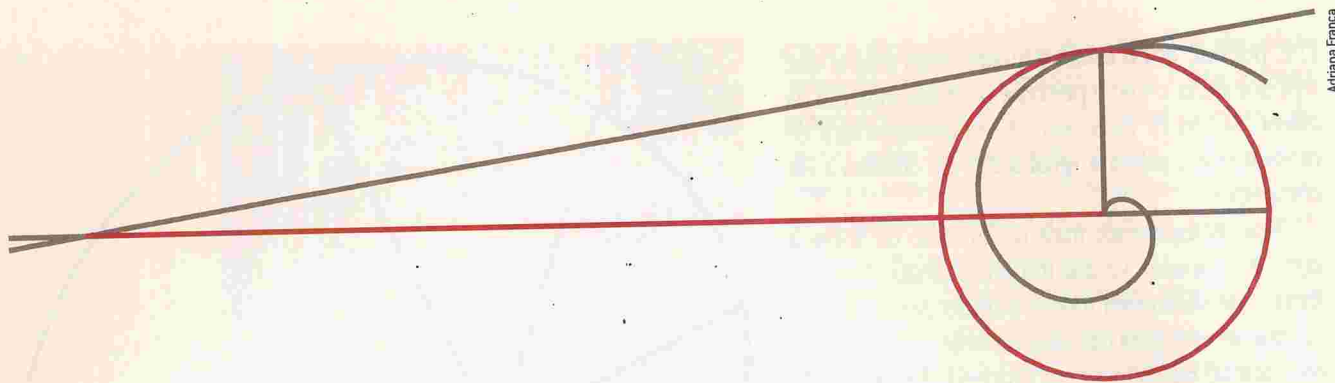
NA ESPIRAL, O RAIO é proporcional à medida do ângulo

de estudar uma nova curva, a espiral. De fato, *Sobre as espirais* é uma obra singular. Após expor uma série de lemas, Arquimedes define a espiral de modo cinemático: uma reta de extremidade fixa roda uniformemente; sobre ela move-se, de modo uniforme, um ponto: a curva descrita por esse ponto será a espiral (*ver figura acima*).

Os resultados mais interessantes relativos a essa curva são dois. O primeiro diz respeito à tangente (*ver ilustração na pág. 40*): suponha que a reta que gira tenha realizado uma revolução completa e tome a tangente à espiral neste ponto. Do centro de rotação trace a perpendicular à reta: o segmento de perpendicular compreendido entre o centro de rotação e o ponto de intersecção da perpendicular e da tangente será igual à circunferência do “primeiro círculo”, isto é, o círculo que tem como raio o segmento compreendido entre o centro de rotação e o ponto de tangência (Sp.18). O segundo resultado estabelece que a superfície compreendida entre a primeira revolução da espiral e a reta que gira é igual a $1/3$ do primeiro círculo (Sp.24).

Arquimedes determina aqui a retificação da circunferência, ou melhor, reduz o problema da retificação ao de traçar a tangente à espiral. Mas não só isso. O que realmente impressiona é como pôde conceber o resultado e como pôde elaborar a demonstração. Infelizmente, em *O método* não se fala de espirais e, assim, qualquer resposta a tais questões é mera conjectura.

Essa obra exerceu grande fascínio em homens como François Viète (1540-1603, inventor da álgebra simbólica e de sua aplicação à geometria) e Galileu. Além dos resultados obtidos por



Adriana França

A RETIFICAÇÃO
do círculo: o comprimento da circunferência é equivalente ao do eixo vermelho

Arquimedes, a mescla de argumentos cinemáticos e geométricos impressionava Galileu. De fato, as primeiras duas proposições de *Sobre as espirais* tratam do movimento uniforme: a primeira demonstra que os espaços percorridos por um ponto que se move de modo uniforme (isto é, que percorre espaços iguais em tempos iguais) estão entre si como os tempos da trajetória; a segunda demonstra que os espaços percorridos em tempos iguais por dois pontos que se movem de forma uniforme são proporcionais entre si.

Essas duas proposições constituem uma das primeiras tentativas de construir um modelo matemático para descrever o movimento. A demonstração é inserida no esquema da teoria das proporções, aplicada aqui não a grandezas geométricas, mas a espaços e tempos. Para Galileu, cuja pesquisa girou quase inteiramente em torno do problema da construção de um modelo geométrico do movimento, o exemplo de Arquimedes é um ponto de referência fundamental.

Se excluirmos *O método*, a obra *Conóides e esferóides* é, sem dúvida, a mais madura de Arquimedes. Seu objetivo é determinar a relação entre o cone inscrito em um segmento de parabolóide ou de hiperbolóide de rotação (conóides) ou, ainda, de elipsóide (esferóide) e o próprio segmento. Nessa obra tardia, Arquimedes parece voltado à generalização das técnicas que utiliza e tende a se concentrar nas propriedades “topológicas” das figuras. Embora seja difícil inserir essa novidade na evolução do pensamento arquimediano, não há dúvida de que os matemáticos modernos extraíram inspirações importantes dessa nova orientação da obra.

O lema-chave é a proposição 19. Nela se demonstra que nos conóides e esferóides pode ser circunscrita e inscrita uma figura em degraus formada por cilindros, de tal modo que a figura inscrita e a circunscrita difiram em menos do que qualquer grandeza determinada. A demonstração é simples: a diferença entre a figura circunscrita e a inscrita é igual ao

pequeno cilindro da base (aqui é utilizada a “monotonia” do conóide ou do esferóide) e, portanto, essa diferença pode ser tão reduzida quanto se queira, já que o pequeno cilindro pode ser traçado de forma a ser menor do que qualquer quantidade prefixada (ver figura no alto da página ao lado). É importante notar que, para executar a construção, a propriedade explorada em todos os casos considerados por Arquimedes é a monotonia da figura em questão, isto é, as seções decrescem constantemente desde a base até o vértice: não por acaso, especifica-se que a porção de esfera ou de esferóide não deve ser maior do que a metade.

REDUÇÃO AO ABSURDO

TRADICIONALMENTE, A novidade atribuída a essa proposição é o fato de que a figura é aproximada simultaneamente do interior e do exterior. Enfatizou-se esse aspecto chamando a técnica de CS.19, “técnica da dupla compressão” (ver em particular os estudos de Dijksterhuis e de Knorr). Parece-nos, porém, que esse aspecto foi excessivamente valorizado. Em geral, de fato, quando se quer determinar uma série de “aproximativas” – isto é, figuras “conhecidas” que diferem da figura a ser determinada em menos do que qualquer grandeza determinada – são consideradas figuras inscritas e circunscritas, já que a figura em questão não está ainda determinada. Mesmo quando, como na proposição 2.XII dos *Elementos* ou em *A quadratura da parábola*, as figuras circunscritas parecem ser negligenciadas, há sempre uma figura externa fixa que serve de ponto de referência para a construção das “aproximativas”: nesses dois casos, convém lembrar, demonstra-se que o triângulo construído maior que a metade do segmento de círculo ou de parábola e que isso, graças à sistematização feita por Eudoxo, basta para assegurar que os polígonos se aproximem da figura.

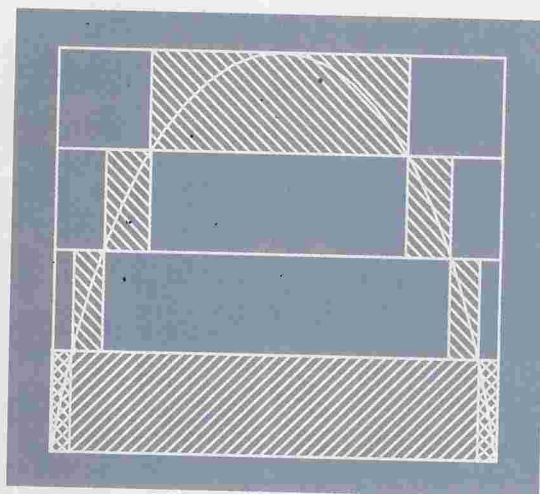
Não vemos, no uso que Arquimedes faz d

proposição CS.19, um distanciamento em relação a essa prática. Assim, quando ele precisa operar uma dupla redução ao absurdo para demonstrar, por exemplo, que o parabolóide é metade do cilindro circunscrito, sua estratégia é executar duas demonstrações separadas, utilizando dois tipos de aproximativas: primeiro a inscrita (o parabolóide não pode ser maior do que a metade do cilindro), depois a circunscrita (para mostrar que não pode ser menor). A verdadeira novidade parece residir, sim, no fato de que Arquimedes determina, de uma só vez, a construção das aproximativas inscritas e circunscritas para três tipos diferentes de sólidos: o parabolóide, o hiperbolóide e o elipsóide. E consegue fazê-lo porque abstrai as propriedades particulares, de "posição" (as equações, diríamos hoje), para se concentrar, em vez disso, nas propriedades de tipo métrico-topológico: em CS.19 a propriedade fundamental em jogo é a "monotonia" das figuras.

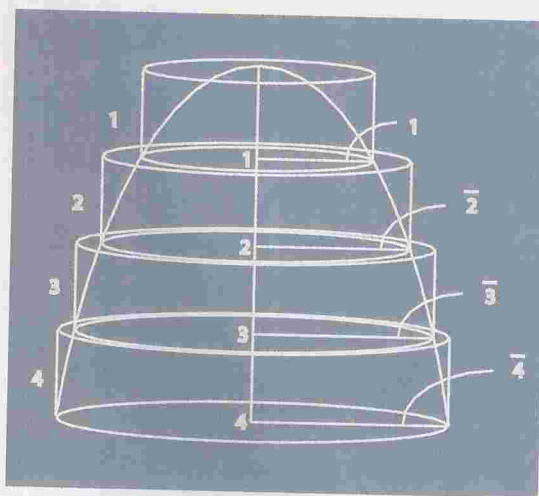
TRATAMENTO ELEGANTE

MAS, UMA VEZ estabelecida a proposição 19, trata-se de obter uma avaliação caso a caso das figuras aproximativas feitas de cilindros. No caso do parabolóide é muito fácil: os cilindros de mesma altura estão entre si como as bases; mas as bases são círculos, que estão entre si como os quadrados dos raios, raios que são as ordenadas da parábola que gera o conóide. Os quadrados das ordenadas de uma parábola estão entre si como as abscissas. Os cilindros da figura inscrita e circunscrita estarão, portanto, entre si como os números inteiros: 1: 2: 3... O caso do elipsóide é ligeiramente mais complexo, mas tratável, ao passo que o do hiperbolóide é complicadíssimo. Nas três situações Arquimedes descobre a estimativa correta da relação entre a figura em degraus (inscrita ou circunscrita) e o cilindro circunscrito ao conóide ou ao esferóide utilizando lemas aritméticos sobre a soma de progressões (no caso do parabolóide, a questão se reduz a calcular a soma dos primeiros n inteiros).

Não entraremos no detalhe da demonstração: basta sublinhar como a separação entre o lema de aproximação (CS.19) e o cálculo das aproximativas permite a Arquimedes tratar rapidamente e com elegância uma matéria que, de outra forma, seria bastante complexa. A proposição CS.27 demonstra que o semi-elipsóide é igual à metade do cone inscrito. Dado que o hemisfério é um caso particular de semi-elipsóide, CS.19 e CS.27 demonstram, de



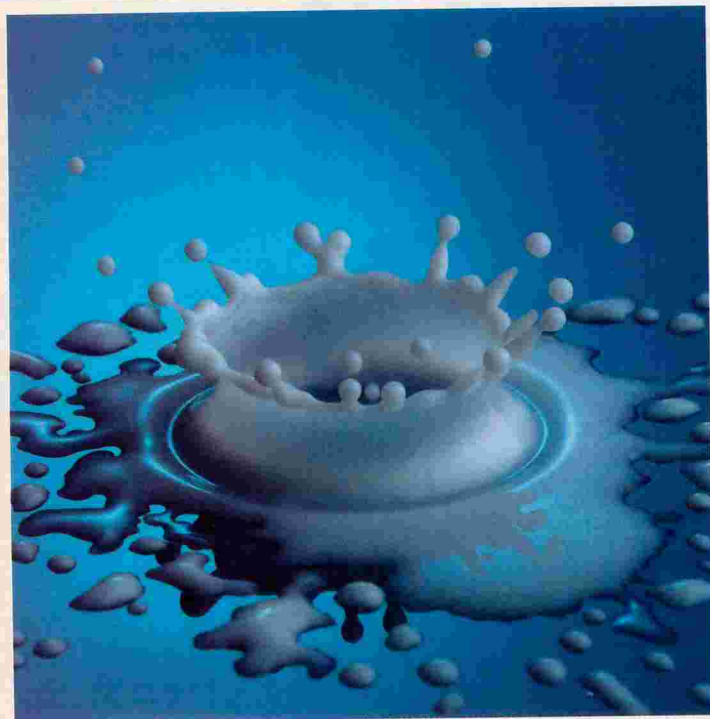
OS CILINDROS circunscritos ao parabolóide estão entre si como os números inteiros



Adriana França

uma só vez, o resultado da proposição 35 do primeiro livro de *Sobre a esfera e o cilindro*. Mas, como dissemos, SC.35.I não era extraído, dessa forma simples, de um lema de aproximação...

O que teria ocorrido entre *Sobre a esfera e o cilindro* e *Conóides e esferóides*? As cartas a Dosite que acompanhavam *Sobre as espirais e Conóides e esferóides* sugerem que os resultados em questão foram obtidos nesta ordem: SC (esfera), CS (parabolóide), *Sobre as espirais*, CS (esferóide), CS (hiperbolóide). Como vimos, a seção do parabolóide é proporcional à abscissa e é natural e fácil calcular o parabolóide (basta saber fazer uma soma como $a + 2a + 3a + \dots + na$). No caso de *Sobre as espirais*, porém, não há propriedades fáceis e intuitivas. Mas, também neste caso, o problema de avaliar a área da espiral em relação ao primeiro círculo se reduz a calcular uma soma: $a^2 + (2a)^2 + \dots + (na)^2$. Arquimedes descobriu que essa soma podia ser empregada também para o elipsóide. O hiperbolóide continuava a desafiá-lo, obrigando-o a elaborar um resultado muito complicado. SA



Sobre o equilíbrio dos planos chegou a nós em dois livros e é um dos textos que mais circularam no mundo antigo. O primeiro livro, que contém 15 proposições, trata dos fundamentos da estática geométrica: com base em postulados relativos à balança de braços iguais é deduzida a lei da alavanca (EP.6-7.I). Segue-se a determinação do centro de gravidade do paralelogramo, do triângulo e do trapézio, tema que fecha o primeiro livro. O segundo abre com uma nova demonstração da lei da alavanca, desta vez para o caso particular em que são associados à balança dois segmentos de parábola. As outras nove proposições são dedicadas à determinação do centro de gravidade do segmento de parábola (EP.2-8.II) e do trecho de um segmento de parábola, espécie de “trapézio” parabólico.

A OBRA

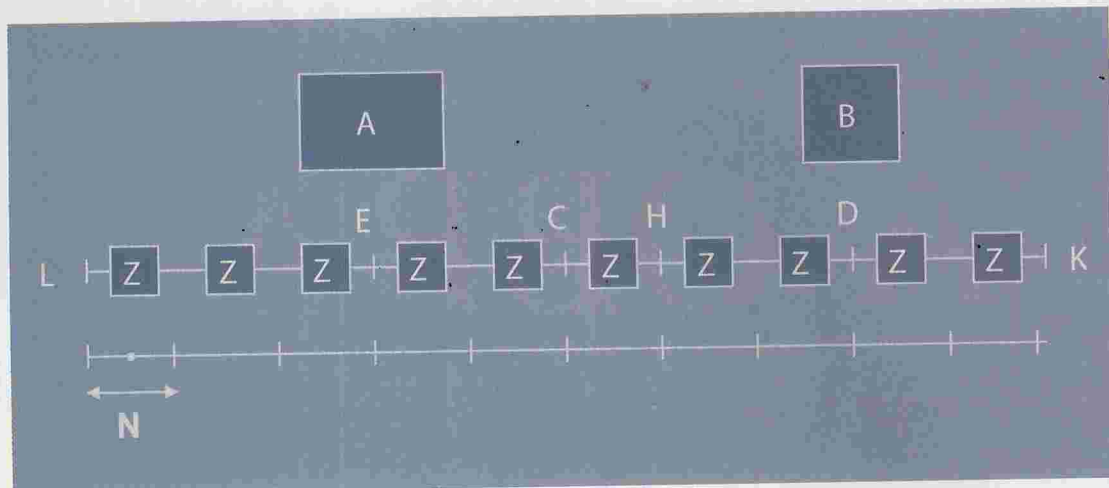
“MECÂNICA”

AS PROPOSIÇÕES MECÂNICAS DE ARQUIMEDES CONSTITUEM A
BASE DA REVOLUÇÃO GALILEANA, QUE MUDOU RADICALMENTE
O HORIZONTE CIENTÍFICO DO SÉCULO XVII



PIONEIRO DA HIDROSTÁTICA,
Arquimedes dedicou vários
estudos ao comportamento
dos fluidos

A LEI DA ALAVANCA
na demonstração
de Arquimedes



Adriana França

Se o segundo livro parece genuinamente arquimédiano (provam-no o estilo e a referência constante a resultados obtidos em *A quadratura da parábola*), há dúvidas em relação ao primeiro. De fato, esse texto é iniciado sem nenhuma definição de alguns conceitos-chave, como equilíbrio, centro de gravidade da figura e igualdade dos pesos. Alguns postulados parecem ter pouca relação com o uso que deles se faz no texto; e, coisa bizarra e contrária ao estilo de Arquimedes, a proposição EP.11.I parece não ser mais do que um caso particular do postulado 5. Além disso, a segunda parte da demonstração da lei da alavanca (EP.7.I) não demonstra absolutamente nada, talvez em razão da deterioração do texto. Por fim, essa demonstração é repetida, para um caso particular, no início do segundo livro.

ESCRITO MUTILADO

ESSAS E OUTRAS considerações levaram J. L. Berggren a sustentar que boa parte do primeiro livro é espúria. O problema é muito complexo para ser tratado aqui. Seja como for, trata-se de um texto em que falta algo: prova disso é a proposição 6 de *A quadratura da parábola*, na qual Arquimedes discute o equilíbrio da balança. Nessa demonstração, ele faz referência a uma série de teoremas e definições relativas a conceitos de equilíbrio e de centro de gravidade, dizendo que “essas coisas foram demonstradas nas proposições mecânicas”. Segundo hipótese plausível, o texto de que dispomos hoje é uma compilação, baseada talvez em um escrito mutilado: o compilador teria feito o melhor possível para completá-lo.

A produção de Arquimedes nesse campo tinha, de fato, alcance bem maior, como atestam suas referências a obras sobre o equilíbrio, suas citações de autores antigos como Herão e Pappus e a obra

O método, na qual discute o centro de gravidade de figuras sólidas, e não só de figuras planas. Os rolos de papiro continham textos de cerca de 20 mil palavras e é possível que tenha sido perdida justamente a parte em que Arquimedes discutia os princípios do equilíbrio e o centro de gravidade dos sólidos. Mas examinemos melhor o conteúdo.

Os primeiros três postulados tratam do equilíbrio da alavanca: pesos iguais se equilibram a distâncias iguais, pesos desiguais não (postulado 1); se dois pesos se equilibram a certa distância e a um deles é acrescentado ou subtraído algo, o equilíbrio se rompe (postulados 2 e 3). Com base nisso, deduz-se que as grandezas se equilibram a uma distância inversamente proporcional aos pesos: a demonstração é dividida em duas partes, que tratam, respectivamente, do caso em que as grandezas são comensuráveis (EP.6.I) e incomensuráveis (EP.7.I).

A demonstração da proposição 6.I tem sido objeto de intensos debates desde que Ernst Mach apontou, em 1912, que ela continha uma petição de princípio. A crítica de Mach é a seguinte. Pode-se exprimir a condição de equilíbrio de pesos diferentes colocados a distâncias diferentes do fulcro dizendo que o “momento estático”, dado algebricamente pelo produto $P \times L$, é o mesmo para os dois pesos. Ora, observa Mach, os primeiros três postulados seriam satisfeitos também caso o momento fosse dado, não pelo produto $P \times L$, como ocorre na realidade, mas pelo produto $P \times f(L)$ do peso vezes uma função crescente qualquer da distância, por exemplo $P \times L^2$. Todavia, somente a lei $P \times L$ garante a validade de EP.6.I; portanto, sua demonstração contém uma suposição substancialmente equivalente à fórmula $P \times L$ para o momento P à distância L . Isto significa que a demonstração da proposição 6 envolve uma

hipótese oculta que é equivalente à própria tese que se quer demonstrar.

A posição de Mach suscitou inúmeros debates, cujo balanço o leitor pode encontrar no *Arquimedes* de Dijksterhuis. Aqui vamos apenas apresentar a resposta de Dijksterhuis a Mach, o que permitirá, entre outras coisas, descrever a demonstração arquimediana.

Sejam A e B duas grandezas comensuráveis (ver figura na pág. ao lado), cujos centros de gravidade são, respectivamente, E e D. Seja C o ponto do segmento ED, tal que $EC : DC = A : B$. Trata-se de demonstrar que C é o centro de gravidade da grandeza composta por A e B. Começa-se duplicando o segmento ED e acrescenta-se o segmento DK igual a CE a partir de D e o segmento LE igual a CD a partir de E. Se H é tal que $HD = DK$, resultará que $LH = 2CD$ e $HK = 2CE$; temos, assim, $HK : LH = A : B$.

Em seguida, A e B são divididas em partes Z iguais entre si (isto pode ser feito, pois elas são comensuráveis) e, analogamente, HK e LH são divididos em tantos segmentos N iguais quantas forem, respectivamente, as partes de A e de B. Cada parte de Z é colocada então no centro de um segmento N. A configuração resultante, conforme o que foi demonstrado nas proposições precedentes, terá como centro de gravidade o ponto médio de LK, isto é o ponto C.

O sistema dos pesos que incidem sobre o segmento LH, pesos que juntos compõem A, tem seu centro de gravidade no ponto médio E, enquanto o sistema composto pelos pesos do segmento HK, que compõem B, tem seu centro em D: "Por isso – diz Arquimedes – A será posto em E e B em D". Dado que o centro de gravidade global é o ponto C, segue-se que "se A está em E e B em D, os pesos estarão em equilíbrio em C".

Para obter a conclusão, portanto, a passagem fundamental é a que assegura a equivalência entre o sistema de pesos que se encontram no segmento LH e o peso A colocado em E. Citemos, a este respeito, Dijksterhuis: "O ponto crucial da demonstração consiste no fato de que... à alavanca são suspensas não as grandezas iniciais, mas dois sistemas de grandezas que são, respectivamente, do mesmo peso que A e B e cujos centros de gravidade estão nos pontos E e D, considerados respectivamente como posições de A e B. Isso significa que a influência exercida sobre o equilíbrio de um corpo suspenso na alavanca depende, exclusivamente, da gravidade do corpo e da posição de seu centro de gravidade, ao passo que

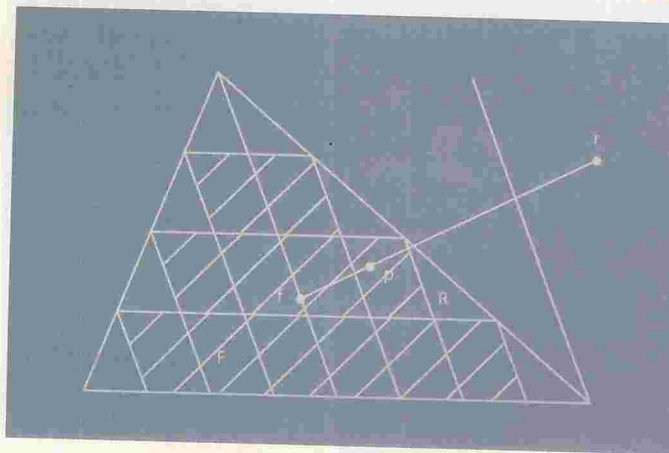
a forma não tem importância".

Dijksterhuis considera a estratégia perfeitamente legítima. Segundo ele, a legitimidade da demonstração arquimediana (cujo ponto central é expresso na independência do equilíbrio em relação à forma das grandezas em jogo) é garantida por um postulado oportuno, o sexto, que diz o seguinte: "Se determinadas grandezas se equilibram a certa distância, grandezas iguais a elas também se equilibrarão à mesma distância". Em outras palavras, o equilíbrio não é perturbado quando grandezas equivalentes são substituídas às anteriores e colocadas à mesma distância. Dessa forma, atinge-se um duplo objetivo: por um lado, legitima-se a demonstração arquimediana, contra o parecer de Mach, que via nela apenas uma petição de princípio; por outro, ganha forma e substância um postulado que, se tomado literalmente parece, como diz Dijksterhuis, "uma tautologia perfeitamente supérflua".

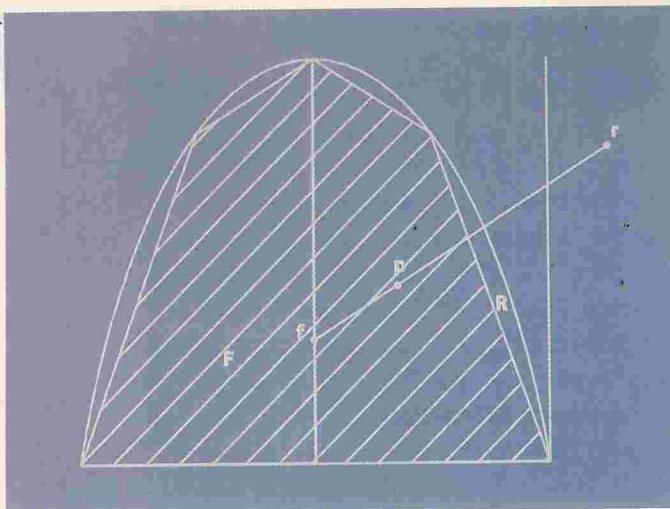
DEMONSTRAÇÕES DEFEITUOSAS

NESSE PONTO SERIA preciso avaliar se o significado do sexto postulado pode ser entendido como quer Dijksterhuis ou se a interpretação que propõe não é excessivamente forçada. Isso implicaria também um estudo detalhado das cinco primeiras proposições, para compreender o papel que desempenham nessa demonstração e como dependem dos postulados iniciais. Mas não o faremos. Também não entraremos nos problemas suscitados pela proposição 7, que pretende estender a lei da alavanca ao caso em que as grandezas em jogo são incomensuráveis. Acreditamos que os materiais apresentados podem dar uma idéia dos problemas encontrados pelos estudiosos modernos no primeiro livro de *Sobre o equilíbrio dos planos*: definições que faltam, demonstrações defeituosas, dificuldade para compreender quais axiomas estão sendo aplicados

A DEMONSTRAÇÃO DO centro de gravidade do triângulo



Adriana França



DEMONSTRAÇÃO geométrica do centro de gravidade da parábola

e demonstrações aparentemente supérfluas. Mas é preciso notar que esses aparentes “defeitos” foram um importante incentivo à pesquisa quando Arquimedes foi redescoberto no século XVI. A dificuldade que o historiador encontra hoje também foi enfrentada pelos matemáticos humanistas que leram esse texto: para vários deles se tornou um desafio “inventar” uma teoria coerente do equilíbrio e dos centros de gravidade.

Os estudos que Arquimedes faz do centro de gravidade do triângulo na proposição EP.13.I e do centro de gravidade do segmento parabólico em EP.II apresentam notáveis semelhanças que valem a pena ser elucidadas, ainda que fosse somente porque demonstram a existência de um núcleo genuinamente arquimediano em EP.I.

Arquimedes demonstra, usando essencialmente a mesma idéia, que o centro de gravidade do triângulo e de um segmento de parábola se encontram, respectivamente, sobre a mediana e o diâmetro (EP.13.I e EP.4.II). Apresentemos a essência do raciocínio arquimediano (ver figura na pág. 45). Uma figura F, feita de paralelogramos, é inscrita no triângulo T. As demonstrações precedentes permitem concluir que: o centro de gravidade da figura inscrita F está sempre na mediana; o resíduo $R = T - F$ pode ser tomado tão pequeno quanto se queira tornando a altura dos paralelogramos suficientemente pequena (isso é demonstrado recorrendo-se a 1.X dos *Elementos* e ao postulado de Eudoxo-Arquimedes).

Suponha agora que o centro de gravidade do triângulo T não caia sobre a mediana, mas no ponto p. Seja f o centro de gravidade da figura inscrita F, centro que incidirá sobre a mediana. Dado que $F + R = Y$, o centro de gravidade r do resíduo R estará no prolongamento da reta fp, de modo que

$rp : pf = F : R$. Uma vez que R pode ser tão pequeno quanto se queira (isto é, a relação $F : R$ pode ser aumentada à vontade) e p é um ponto fixo fora da mediana, o ponto r (centro de gravidade de R) seria, com a diminuição de R, expulso do triângulo ou até mesmo fora do semiplano em que o triângulo está, o que é absurdo.

Quanto à parábola, a construção das aproximativas é bem diversa e utiliza polígonos definidos em *A quadratura da parábola*, mas a idéia fundamental da demonstração é a mesma (ver figura ao lado). Assim, as duas demonstrações de *Sobre o equilíbrio dos planos* baseiam-se na mesma idéia: para demonstrar que o centro de gravidade de uma figura dotada de diâmetro ou de eixo incide sobre o diâmetro ou sobre o eixo, basta formar aproximativas que tenham centro de gravidade sobre o eixo. Explicitamos esse elemento porque, por um lado, permite estabelecer a conexão entre os dois livros de *Sobre o equilíbrio dos planos* e, por outro, a reflexão sobre os dois teoremas será um dos pontos de partida das inovações que Luca Valerio introduzirá na geometria no final do séc. XVI.

APROXIMATIVAS INSCRITAS

OBVIAMENTE, ENQUANTO a demonstração de que o centro de gravidade do triângulo deve incidir na mediana leva à conclusão de que este centro estará no ponto em que as medianas do triângulo se intersectam, o fato de que o centro de gravidade do segmento parabólico cai sobre o diâmetro é somente um primeiro passo para chegar à sua determinação. Não pretendemos, aqui, entrar nos detalhes do método seguido por Arquimedes para determinar esse centro de gravidade, mas apresentaremos, em vez disso, as linhas gerais da demonstração empregando uma linguagem modernizada.

Arquimedes introduz aproximativas inscritas (os polígonos inscritos “canonicamente” que vimos na obra *A quadratura da parábola*) e demonstra que: 1) o centro de gravidade do segmento de parábola é um limite superior para a sucessão dos centros de gravidade das aproximativas, no sentido de que estes se encontram sempre “abaixo” do centro de gravidade do segmento (EP.5.II); 2) o centro de gravidade do segmento de parábola é o extremo superior de tal sucessão, no sentido de que sempre pode ser estabelecida uma aproximativa cujo centro de gravidade estará a uma distância menor que qualquer grandeza determinada em relação ao centro de gravidade do segmento (EP.6.II). Estabelecidos esses dois pontos,

é fácil provar, mediante a habitual demonstração por dupla redução ao absurdo, que o centro de gravidade de dois segmentos de parábola divide os respectivos diâmetros na mesma relação (EP.7.II).

Pode-se, então, demonstrar o centro de gravidade do segmento de parábola. Inscreve-se no segmento o triângulo T de mesma base e mesma altura. O segmento P é assim dividido no triângulo em dois segmentos, P_1 e P_2 . Conforme a proposição precedente, os centros de gravidade de P_1 e P_2 se projetam sobre o mesmo ponto do diâmetro do segmento P, isto é, no ponto p. Seja π o centro de gravidade de P e t o centro de gravidade de T; segundo a lei da alavanca teremos:

$$(6) t\pi : \pi p = (P_1 + P_2) : T$$

A posição de t é conhecida (se d é o diâmetro, t estará no ponto $2/3d$) e a relação $(P_1 + P_2) : T$ é facilmente determinável mediante os resultados de *A quadratura da parábola* (será $P_1 + P_2 = 1/3T$ e, portanto, $(P_1 + P_2) : T = 1 : 3$). Mas a posição de p não é conhecida. Pode-se, porém, explorar o fato de que os centros de gravidade dos segmentos de parábola dividem, simultaneamente, o diâmetro. Percebe-se, facilmente, que, sendo l o comprimento do diâmetro de P_1 e de P_2 e d o comprimento do diâmetro de P, então $d = 4l$. Daí é possível concluir:

$$(7) [(1/2d - p) : 1/4d = (d - \pi) : d$$

Em outras palavras, obtivemos uma relação que liga π e p. A relação entre (6) e (7) permite concluir que π está a $3/5$ do diâmetro, ou seja, que divide o diâmetro “de tal modo que a parte do diâmetro situada desde a parte do vértice do segmento é $3/2$ daquela que vai até a base” (EP.8.II).

Esta demonstração do centro de gravidade do segmento parabólico é notável pela concisão e beleza. É interessante ressaltar que nas proposições 5 e 6 de EP.II Arquimedes discute a convergência de sucessões, ou, pelo menos, é dessa forma que a descrevemos hoje. Vale enfatizar, porém, que, se usamos termos como “monotonia”, “sucessão” e “convergência”, não sugerimos que em qualquer parte da obra de Arquimedes conceitos desse tipo estejam presentes (e nem mesmo na obra de seus seguidores do Renascimento, que se inspiraram nas proposições mencionadas). Esses conceitos são cômodos para expor as linhas gerais de certos procedimentos arquimedianos, mas não se confundem com as proposições efetivamente demonstradas por Arquimedes.

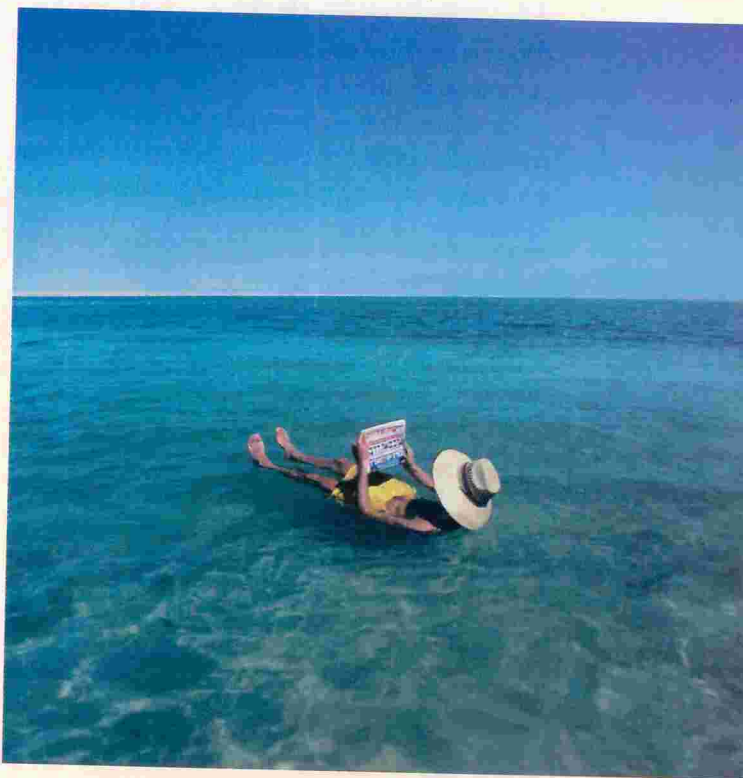
Os resultados que hoje nós podemos interpretar como convergência de sucessões de centros de gra-

vidade eram, para ele, apenas lemas, introduzidos para alcançar um objetivo bem preciso e não para demonstrar teoremas sobre sucessões. Arquimedes almeja obter um resultado específico: demonstrar que os centros de gravidade da parábola estão dispostos de modo similar e poder deduzir daí a posição do centro de gravidade do segmento de parábola. A formalização de uma teoria da convergência das sucessões e o próprio conceito de sucessão como objeto matemático explícito estavam reservados para o futuro.

Em *Sobre os corpos flutuantes* Arquimedes demonstra seu famoso princípio (“um corpo imerso em um fluido recebe um impulso para o alto igual ao peso do volume do fluido deslocado”) e determina as condições de equilíbrio de um segmento esférico ou de um segmento de parabolóide flutuante. Esse texto teve enorme importância para o desenvolvimento de novas concepções matemáticas e para o início da reflexão de Galileu sobre a filosofia natural. Assim, convém salientar alguns aspectos de sua tradição.

Como mencionamos anteriormente, até a descoberta do Códice C o conhecimento de *Sobre os corpos flutuantes* baseava-se apenas na tradução latina de Guilherme de Moerbeke. Essa tradução utilizara um único manuscrito grego (o Códice B, perdido depois de 1311), que tinha importantes lacunas. Estavam ausentes, do texto de Moerbeke, a demonstração da proposição VIII do primeiro livro

O EMPUXO DE Arquimedes é a mais conhecida contribuição do sábio de Siracusa à hidrostática



Keystone

e grande parte da demonstração da proposição II do segundo livro. Como se não bastasse, a longa e difícil proposição X do segundo livro tinha erros e lacunas que tomavam sua leitura quase incompreensível.

Além dessas falhas principais, havia erros e mal-entendidos devidos ao escriba do Códice B ou, talvez, ao próprio Moerbeke. Vários desses problemas eram sanáveis e foram remediados por Federico Commandino em sua edição de 1565, mas para outros não havia solução.

Um desses erros, de particular relevância, dizia respeito ao postulado inicial que Arquimedes apresenta no começo do primeiro livro. Na versão recuperada por Heiberg com base no Códice C, o postulado afirma: “Supomos que a natureza de um fluido é tal que, se suas partes são dispostas de modo uniforme e sendo contínuas, aquela parte que é menos pressionada é impelida pela parte que é mais pressionada; e que cada uma de suas partes é pressionada pelo fluido que está acima dela numa relação perpendicular, a menos que esse fluido esteja encerrado em algum recipiente ou que seja comprimido por qualquer outra coisa”.

No texto de Moerbeke, porém, lemos: “Suponhamos que a natureza de um fluido é tal que, se suas partes são dispostas de modo uniforme e sendo contínuas, aquela parte que é menos pressionada é deslocada pela mais comprimida; e que cada parte do fluido é pressionada pelo fluido que está acima dela ao longo da perpendicular, se o fluido for afundado em qualquer coisa e comprimido por qualquer outra coisa”.

A última frase do postulado, portanto, assume um sentido completamente diverso no texto original e no de Moerbeke. O texto grego admite que a

pressão exercida pelo fluido possa ocorrer também em direções não perpendiculares, especialmente se o fluido está encerrado em um recipiente; esta cláusula-limitativa no texto que circulou desde a Idade Média até o início do século XX desaparece completamente e o termo “encerrado” torna-se “afundado”, de interpretação bem difícil.

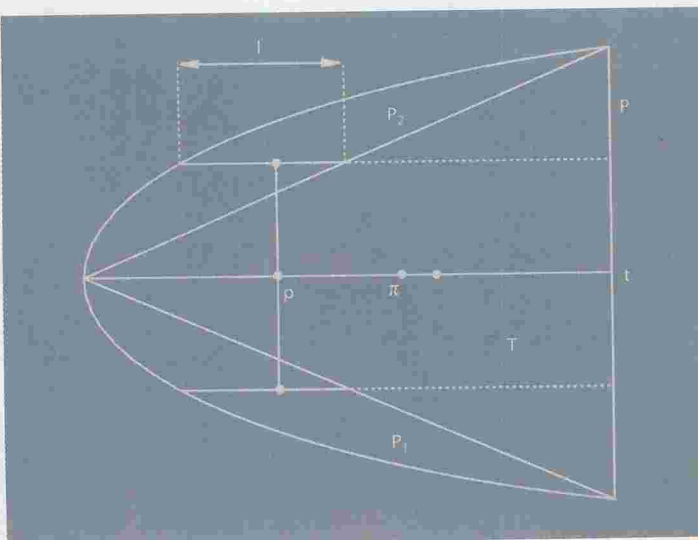
Citamos esse exemplo para dar uma idéia dos problemas que a tradução textual de Arquimedes suscitou e suscita: quando queremos, hoje, compreender as contribuições que Galileu, Stevin, ou Pascal deram à hidrostática, convém lembrar que eles não leram *Sobre os corpos flutuantes* na edição de Heiberg, mas na de Moerbeke, com todos os problemas que trazia. E é provável que, com o progresso das pesquisas sobre o palimpsesto, tenhamos em poucos anos um texto novo e diferente, em muitas passagens, do texto do próprio Heiberg, que, afinal, foi muitas vezes obrigado a recorrer à tradução de Moerbeke por não conseguir ler partes inteiras do Códice C.

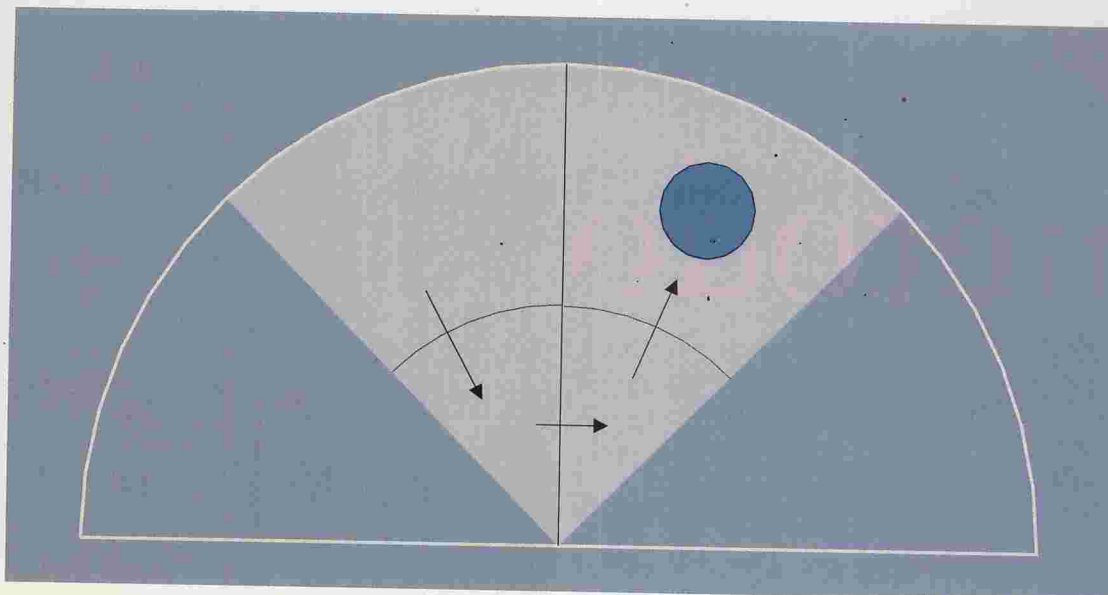
ABORDAGEM MATEMÁTICA

O POSTULADO CITADO afirma que, em um fluido, o movimento ocorre pelo deslocamento das partes menos comprimidas, que são expulsas por aquelas que sofrem uma pressão maior. O original arquimediano – que exclui o caso de um fluido encerrado em um recipiente – parece se referir a situações em que há grande quantidade de água, como o mar. Esta impressão é confirmada pela proposição G.2I, na qual Arquimedes demonstra, utilizando seu postulado, que a superfície de um fluido assume a forma de uma superfície esférica tendo por centro o centro da Terra. Uma possível interpretação do sentido desta obra – incluindo os teoremas sobre condições de equilíbrio dos segmentos de esfera e dos parabolóides – é que Arquimedes estava tentando elaborar uma abordagem matemática da flutuação dos navios, problema que devia interessar ao Arquimedes engenheiro e tecnólogo legado pelas histórias e lendas.

O primeiro livro é quase inteiramente dedicado à formulação e à demonstração do princípio da flutuação. Em G.3.I demonstra-se que corpos sólidos que “têm o mesmo peso” do fluido imergem completamente, mas sem ir até o fundo; em G.4-6.I, que os corpos “menos pesados” que o fluido não imergem completamente e que a parte imersa é tal que uma quantidade de fluido igual a ela em volume tenha o mesmo peso que o corpo inteiro, recebendo,

Adriana Franca





NA ESPIRAL, O RAIO
é proporcional à
medida do ângulo

quando impelido à força sob a superfície, um impulso para o alto equivalente à diferença entre o peso de uma quantidade de fluido igual ao volume do corpo e o peso do próprio corpo; em G.7.I, por fim, demonstra-se que os corpos sólidos “mais pesados” que o fluido vão ao fundo mas ficam mais leves conforme o peso do volume do fluido equivalente ao peso do próprio.

Não detalharemos as demonstrações arqui-medianas destes fatos, que se reduzem, essencialmente, à seguinte idéia (*ver ilustração acima*). Suponhamos que o corpo seja mais leve que o fluido e, por absurdo, esteja inteiramente submerso, permanecendo o fluido em repouso. Imaginemos agora dois espelhos esféricos, em um dos quais esteja contido o corpo. Tomando uma seção desses dois espelhos, a superfície que não contém o corpo é mais pressionada que a outra, dado que o corpo é mais leve que o fluido e, portanto, deve deslocar esta outra parte, conforme o postulado inicial: contra, assim, a hipótese de que o fluido permanece em repouso.

Comentemos algo sobre a terminologia de Arquimedes, obviamente diferente da empregada atualmente. Não há o conceito de peso específico: Arquimedes usa, em vez disso, termos como “pesos iguais” e similares. E se, em nome da clareza, utilizamos o termo “volume”, convém lembrar que Arquimedes emprega o termo $\sigma\gamma\kappa\omicron$ que, literalmente, significa “espessura” ou “quantidade”. É evidente, porém, que quando Arquimedes afirma que um corpo tem o “mesmo peso” que o fluido ele quer dizer que volumes iguais do corpo e do fluido têm o mesmo peso. Mas a ausência de uma

terminologia específica (até mesmo a falta de um conceito de densidade quantitativamente preciso) não é pouca coisa.

Essa ausência dificulta, por exemplo, a exposição feita no livro II. De fato, o equilíbrio de um parabolóide depende, além dos parâmetros geométricos do próprio parabolóide, da relação entre seu peso específico e o peso específico do fluido em que flutua. Uma situação que, matematicamente bem complexa (o segundo livro de *Sobre os corpos flutuantes* é um dos textos mais difíceis da geometria grega) é ainda mais complicada pela ausência da adequada matematização da comparação entre corpos de peso e/ou volume equivalentes.

Para nós, modernos, a questão pode parecer banal e óbvia: de fato, estudamos a noção de peso específico na escola secundária. Mas no contexto da linguagem da geometria grega não era fácil elaborar algo como “o peso específico é igual ao peso pelo volume”. Uma afirmação desse tipo carece de significado na linguagem da teoria das proporções: as relações só são estabelecidas entre grandezas do mesmo gênero (portanto, não pode ser levada em conta a relação entre peso e volume) e, além disso, o processo de mensuração, desvinculado dos aspectos numéricos possibilitados pela introdução de uma unidade de medida, envolve sempre grandezas designadas: dois corpos, duas linhas, dois pesos, dois tons musicais.

O conceito de peso específico, ausente em Arquimedes, começou a ser elaborado, de forma tímida e confusa, na Idade Média e somente com Galileu será proposta uma matematização completa dessa grandeza física.

SA

O método

ESSA OBRA ESCRITA EM FORMA
EPISTOLAR NOS PERMITE CONHECER
AS TÉCNICAS DE DESCOBERTA MAIS
REFINADAS DESENVOLVIDAS PELO
SÁBIO DE SIRACUSA

O *método* é um documento de excepcional importância. As demonstrações arquimedianas tendem a ocultar o procedimento heurístico da descoberta. Aqui, porém, Arquimedes apresenta a Eratóstenes o método que utilizou para estudar os problemas de que se ocupava e sobre os quais enviara, a Alexandria, primeiro os enunciados e depois as demonstrações formais.

O tratado tem a forma de carta, mas traz várias

demonstrações. Isso é muito importante, pois os raciocínios que Arquimedes elabora são interrompidos por considerações metodológicas. A importância do texto, as circunstâncias extraordinárias em que foi encontrado, a mescla de demonstrações rigorosas, considerações heurísticas e observações metamatemáticas fizeram que boa parte da literatura arquimediana do século XX se concentrasse em *O método*. Em artigo recente, R. Netz, K. Saito e

sobre as relações entre cones e cilindros ou entre pirâmides e prismas, pelo fato de que Demócrito (c. 469-361 a.C.) já havia descoberto, sem demonstrar, que o cone ou a pirâmide são $1/3$ do cilindro ou do prisma que têm a mesma base e a mesma altura. Como descobrira, mediante o método em questão, os dois teoremas cujas demonstrações enviava a Eratóstenes, Arquimedes comenta: “Decidi divulgá-lo por escrito... porque estou convencido de que será muito útil para a matemática; creio que outros, agora ou no futuro, poderão, graças a esse método, descobrir novos teoremas que até agora não ocorreram nem mesmo a mim”.

HEURÍSTICA ARQUIMEDIANA

COMO SABEMOS, *O método* ficou perdido por séculos e só foi redescoberto quando sua utilidade matemática já era praticamente nula. Mas vejamos em que consiste a técnica heurística proposta por Arquimedes. Ele apresenta como premissa (sem demonstração) às proposições uma série de resultados relativos à estática e aos centros de gravidade: em particular, como já mencionamos, alguns resultados sobre o centro de gravidade do cone, do cilindro e do prisma. Utilizaremos notações algébricas sem seguir os raciocínios geométricos de Arquimedes, esperando que isso torne mais claro ao leitor o método que empregou. Não obedeceremos nem mesmo à ordem com a qual ele apresenta seus resultados, limitando-nos a expor a técnica que lhe permitiu descobrir o “volume” e o centro de gravidade do parabolóide.

Consideremos um parabolóide P , cujo eixo tenha o comprimento a e o cilindro circunscrito C , com altura a e círculo de base de raio b . Secionemos o sólido com um plano no ponto genérico x do eixo: o círculo-seção P_x do parabolóide terá raio y , enquanto o círculo-seção do cilindro C_x terá, obviamente, raio b (ver ilustração no alto da pág. 52). Dado que os círculos estão entre si como os quadrados dos raios, teremos:

$$(8) P_x : C_x = y^2 : b^2$$

Mas y e b são as ordenadas que correspondem às abscissas x e a e, em uma parábola, os quadrados das ordenadas são proporcionais às abscissas: $y^2 : b^2 = x : a$. Teremos, portanto:

$$(9) P_x : C_x = x : a$$

ou seja, um círculo-seção genérico do parabolóide está para o círculo-seção do cilindro como a abscissa do ponto de secção está para o eixo do parabolóide.

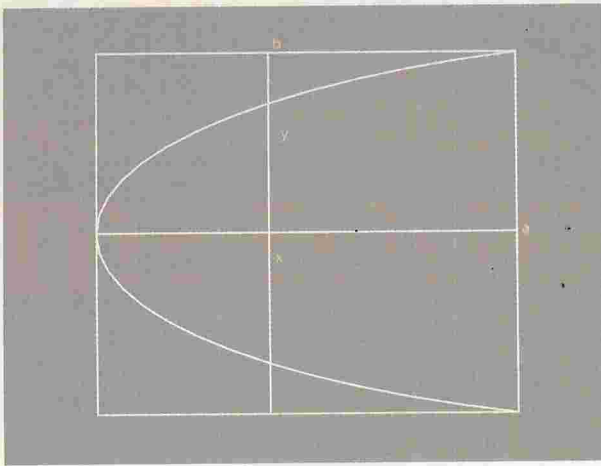
Até aqui, Arquimedes não fez mais do que

N. Tchemetska mostram que há, em *O método*, muitos elementos a explorar e que poderão mudar radicalmente as atuais concepções sobre as técnicas demonstrativas do siracusano.

Arquimedes enviara dois teoremas a Eratóstenes, desafiando-o a descobrir as demonstrações. O método que quer descrever não é demonstrativo, mas heurístico. Assim, diz Arquimedes, Eudoxo foi muito auxiliado, na demonstração dos teoremas

A DETERMINAÇÃO DO centro de gravidade da parábola, estudada por Arquimedes, tem implicações na engenharia. Acima, a ponte do porto de Sidney, na Austrália

UMA SEÇÃO DO parabolóide usada para calcular o volume e o centro de gravidade



PARA A DETERMINAÇÃO do "volume" do parabolóide imaginamos a concentração, em torno da extremidade A da balança, de todos os círculos-seção do parabolóide

aplicar teoremas bem conhecidos sobre os círculos e a parábola. Neste ponto, entra em jogo a mecânica. Imaginemos uma balança de comprimento $2a$ e extremidades A e B; imaginemos ainda que haja, na extremidade A da balança, o círculo-seção do parabolóide P_x e no ponto da abscissa x esteja o círculo-seção do cilindro C_x (ver ilustração na pág. 53, ao centro). A lei da alavanca afirma que duas grandezas se equilibram a uma distância inversamente

proporcional às próprias grandezas. A balança que estamos imaginando tem um braço de comprimento a e o outro x : a distância de P_x em relação ao fulcro da balança é a e a de C_x em relação a este fulcro é x . Podemos interpretar a relação (9) no sentido de que as grandezas suspensas na balança são inversamente proporcionais às suas distâncias do fulcro: portanto, estarão em equilíbrio.

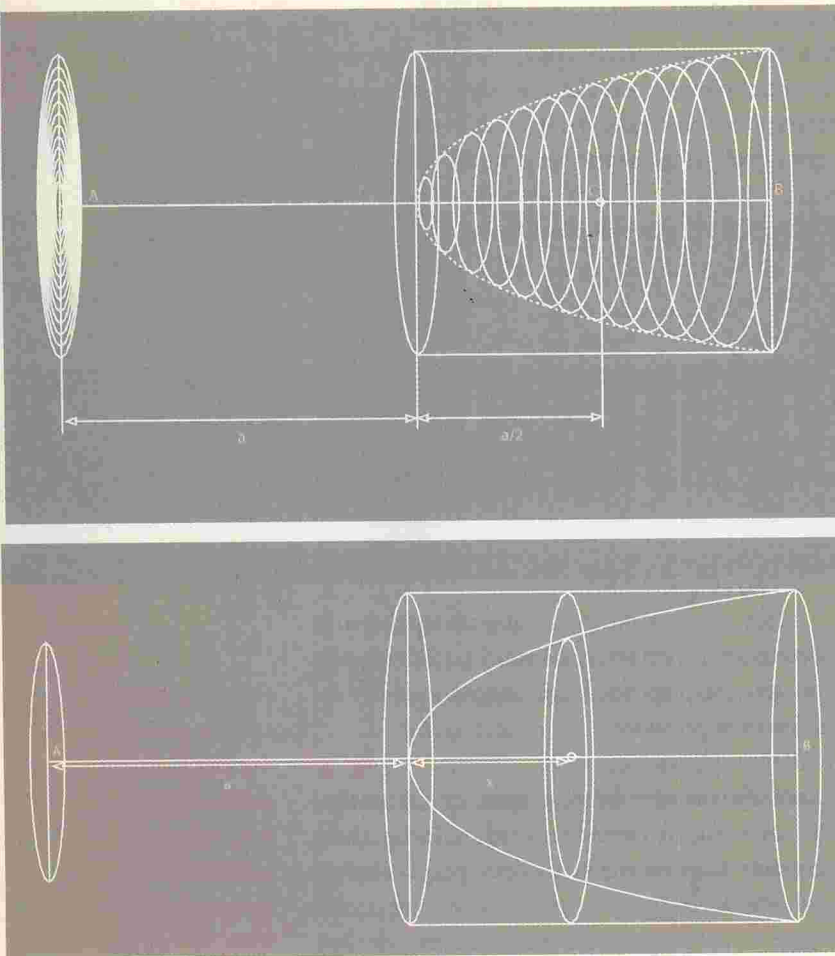
Note-se que a relação (9) foi obtida para uma seção genérica e , assim, a conclusão vale para cada círculo-seção individual do parabolóide e para cada círculo-seção individual do cilindro. Essa passagem também é justificada à luz do que Arquimedes demonstrara em *Sobre o equilíbrio dos planos*.

O passo crucial – aquele que, provavelmente segundo Arquimedes, invalidava a correção formal do procedimento, mas permitia descobrir a relação entre parabolóide e cilindro – é o seguinte: o que ocorreria se, em vez de imaginarmos a distância a em relação ao fulcro da balança de cada círculo-seção individual, considerarmos a distância de todos os círculos-seção juntos? Isto é, e se concentrarmos em torno da extremidade A da balança todos os círculos-seção do parabolóide (ver figura nesta página ao centro)? Cada um desses fará equilíbrio a um círculo-seção individual do cilindro: todos juntos deverão fazer equilíbrio ao cilindro inteiro. E todos farão equilíbrio ao cilindro inteiro se imaginarmos que o peso deste estará concentrado no seu centro de gravidade e que o centro de gravidade de um cilindro está na metade de seu eixo. Temos, portanto, duas grandezas suspensas a uma balança e que se equilibrarão: no ponto A há a massa dos círculos-seção do parabolóide, a uma distância a do fulcro; no ponto C há o cilindro (imaginado suspenso ao seu centro de gravidade, ou com seu peso concentrado no centro de gravidade), à distância $a/2$ do fulcro. Conseqüentemente, dado que a alavanca está em equilíbrio, as duas grandezas serão inversamente proporcionais à distância do fulcro. Teremos, portanto (identificando o parabolóide com a massa de seus círculos-seção):

$$(10) P : C = a/2 : a$$

isto é, o parabolóide deverá ser igual à metade do cilindro.

Arquimedes também aplicou seu método para determinar os centros de gravidade dos sólidos. Vejamos como fez para estabelecer o centro de gravidade do parabolóide. Consideremos o parabolóide P, com eixo de comprimento a , o cone inscrito K e seccionemos o sólido no ponto de abscissa



abscissa x , como anteriormente (*ver figura na página, no alto*). Seja y o comprimento do raio do círculo-seção P_x do parabolóide e z o comprimento do raio do círculo-seção K_x . Seja b o comprimento do raio da base do sólido. Utilizamos, para simplificar, uma linguagem algébrica para expressar as proporções arquimedianas. A parábola que gera o parabolóide terá como equação: $y^2 = (b^2/a)x$ e a reta que gera o cone a equação $y = (b/a)x$. Os círculos-seção do cone e do parabolóide estarão entre si como os quadrados dos respectivos raios. Portanto:

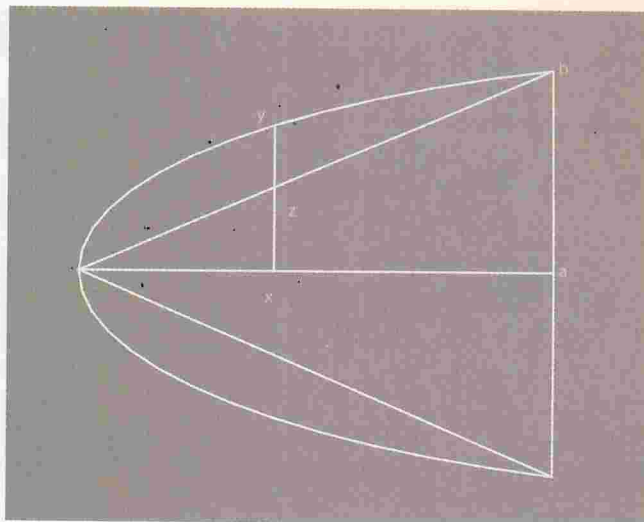
$$(11) P_x : K_x = y^2 : z^2 = (b^2/a)x : (b^2/a^2)x^2 = a : x$$

Essa relação vale, obviamente, para cada par individual de círculos-seção do cone e do parabolóide e nos diz que, construindo o mesmo tipo de balança mencionado, um círculo-seção do cone, colocado à distância a do fulcro da balança, equilibra o respectivo círculo-seção do parabolóide posto à distância x do fulcro (*ver figura nesta página, ao centro*). Se colocarmos todos os círculos-seção do cone à distância a do fulcro da balança, essa massa de círculos-seção – isto é, o cone – equilibrará o parabolóide disposto em torno de seu centro de gravidade (*ver figura nesta página, embaixo*). Tal centro de gravidade é, justamente, o que queremos determinar. Suponhamos que sua distância em relação ao fulcro da balança seja w . Dado que o cone equilibra o parabolóide a essa distância, a lei da alavanca nos diz que:

$$(12) K : P = w : a$$

Mas a relação $K : P$ é conhecida: $K = 2/3P$ (algo que se conclui imediatamente do fato de que P é a metade do cilindro circunscrito e K é $1/3$ deste cilindro). Portanto, $K : P = 3 : 2 = w : a$. É como dizer que o centro de gravidade do parabolóide está a uma distância de $2/3$ em relação ao fulcro da balança ou, para usar a expressão de Arquimedes, “divide o eixo de tal modo que a parte na direção do vértice seja o duplo daquela na direção da base” do parabolóide.

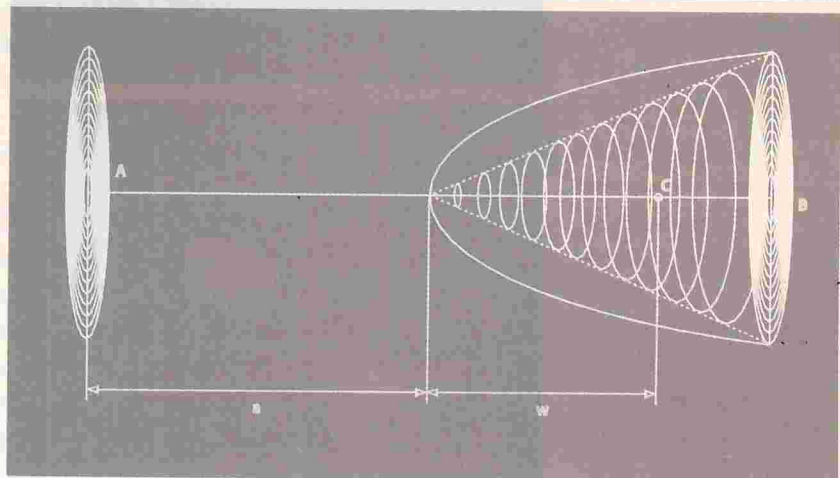
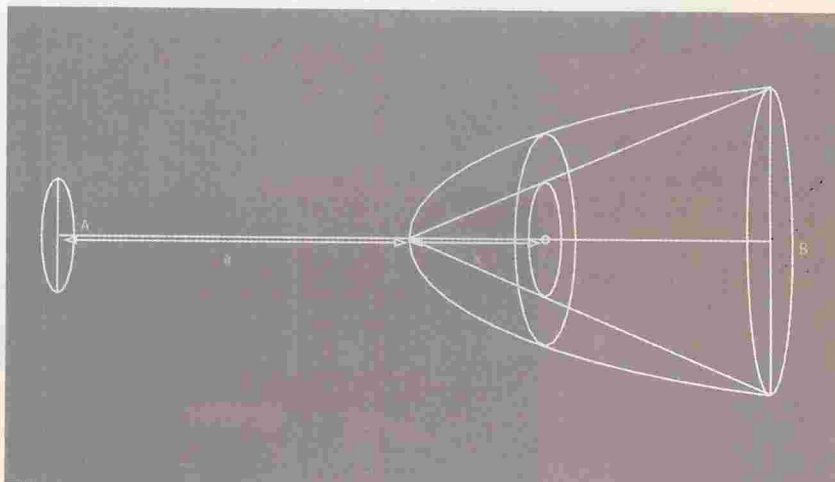
Para simplificar a exposição, nos limitamos ao caso do parabolóide (M.4-5). Mas *O método* é muito mais rico: trata da quadratura da parábola (M.1), do volume da esfera e do elipsóide (M.1), dos centros de gravidade do hemisfério e do semi-elipsóide (M.6-7), dos segmentos de elipsóide e seus centros de gravidade (M.8-10) e sugere que o mesmo procedimento pode ser usado para determinar o “volume” e o centro de gravidade do hiperbolóide (M.11). Todas essas proposições são tratadas usando a técnica que descrevemos para o

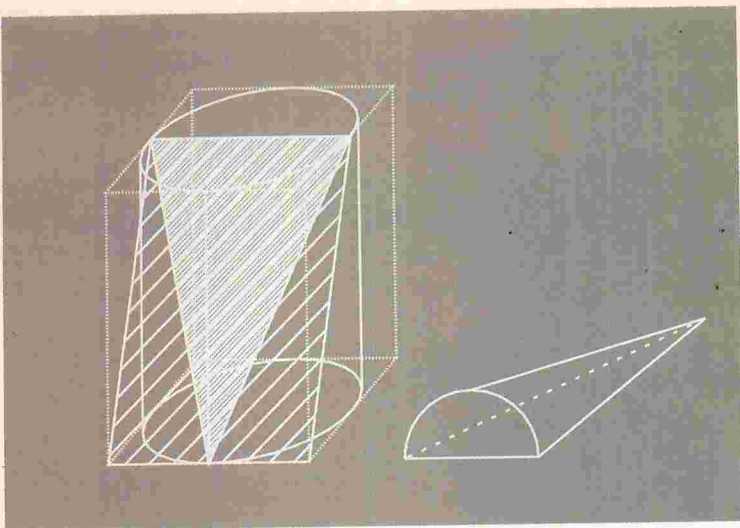


A SEÇÃO DO cone inscrito no parabolóide

parabolóide e com variações próprias ao caso, mais ou menos complicadas conforme a figura em jogo.

As proposições restantes (M.12-15) são dedicadas a um dos dois teoremas que Arquimedes enviara a Eratóstenes. O primeiro refere-se à chamada unha cilíndrica. Considere um prisma reto de base quadrada no qual é inscrito um cilindro. O prisma é então cortado por um plano que passa pelo centro do

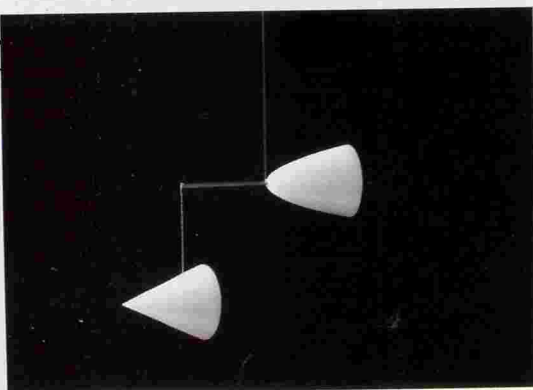
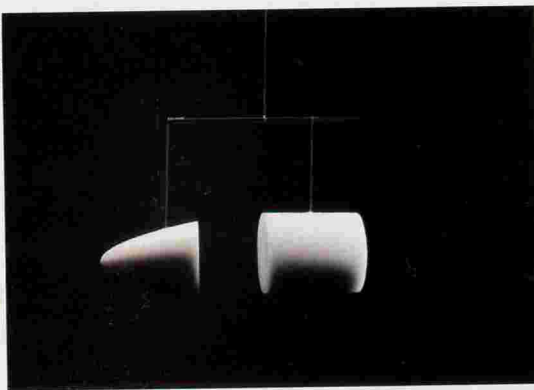




ACIMA, REPRESENTAÇÃO
geométrica da "unha
cilíndrica"

círculo de uma das bases do cilindro e por um dos lados do quadrado da face oposta do prisma (ver ilustração acima). É justamente uma dessas proposições (a M.14) que, recentemente "restaurada", abre novas possibilidades interpretativas sobre o modo pelo qual Arquimedes compara as seções dos sólidos. Não podemos aqui entrar nos detalhes. Esperamos, porém, enfatizando a possível importância dessa descoberta, que alguns leitores se animem a consultar o artigo de Netz, Saito e Tchernetska.

O palimpsesto é interrompido no fim da proposição 15: o restante do texto está definitivamente



OS DOIS MODELOS
comparam o centro
de gravidade,
respectivamente,
do parabolóide e do
cilindro e do cone
e do parabolóide,
representando os
resultados obtidos
por Arquimedes

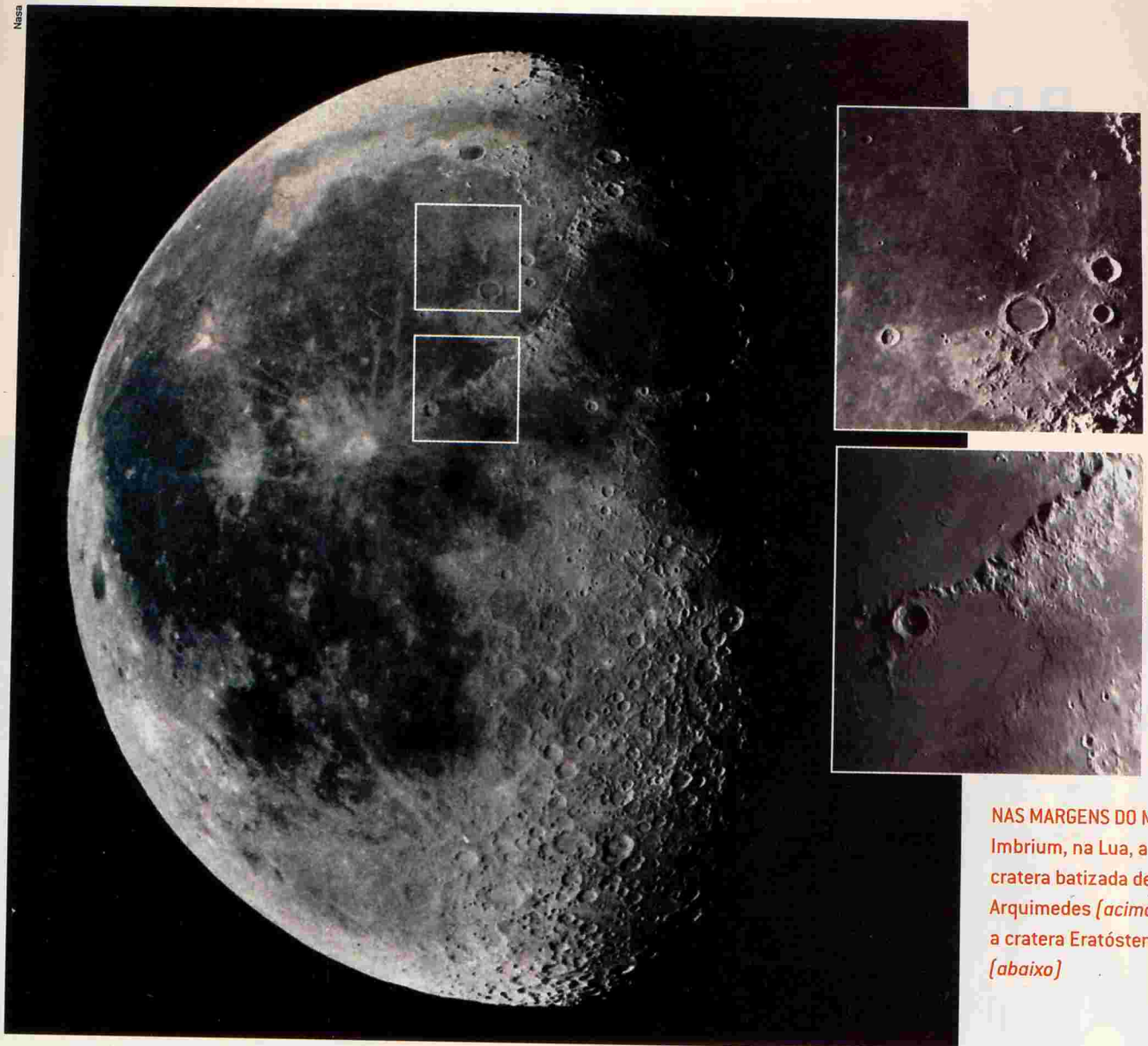
perdido. É quase certo que, nas proposições seguintes, Arquimedes tratasse do outro teorema proposto a Erastótenes: demonstrar que o sólido formado pela intersecção de dois cilindros inscritos em um cubo e dispostos em cruz é igual a $2/3$ do cubo.

Os dois problemas mencionados ultrapassam o *corpus* arquimediano e devem ser considerados como os últimos resultados que obteve e demonstrou. Analogamente, os teoremas relativos aos centros de gravidade dos sólidos pertencem, provavelmente, aos últimos anos de sua pesquisa matemática. O método é, assim, um documento precioso também deste ponto de vista: além de apresentar a heurística arquimediana, fornece indicações sobre a evolução de sua pesquisa em campos não documentados pelo resto do *corpus* de sua obra (ainda que em *Sobre os corpos flutuantes* ele faça referência ao centro de gravidade do parabolóide).

O que Arquimedes apresenta em *O método* também suscita problemas sobre a cronologia da descoberta e da composição das obras conhecidas antes de 1906. Já dissemos que, graças a *O método*, conhecemos hoje as intuições que o orientaram na descoberta da superfície da esfera. Um problema análogo coloca-se para *A quadratura da parábola*. Sabemos que a quadratura é obtida de dois modos, o geométrico e o mecânico. É interessante observar que a demonstração "mecânica" exposta em QP.4-17 não é senão a reformulação rigorosa do que Arquimedes apresenta na primeira proposição de *O método*. Qual a relação entre as duas? Teria sido descoberta primeiro a técnica do "método mecânico" que, aplicada à parábola, fornece a quadratura "mecânica" de QP e só depois teria sido elaborada a demonstração geométrica? Ou, inversamente, a demonstração primitiva seria a geométrica e posteriormente, refletindo sobre essa e sobre certas propriedades da parábola, Arquimedes teria inventado o método aplicado com tanto êxito à esfera, aos conóides, aos esferóides e aos centros de gravidade?

No final de M.1, depois de elucidar a quadratura da parábola, Arquimedes escreve: "O que acabamos de afirmar não é demonstrado pelo que precede [isto é, pela técnica do método mecânico, N.d.A.], mas leva a crer que a conclusão seja correta. Como sei que a conclusão não foi demonstrada, embora possamos suspeitar que seja verdadeira, fornecerei no devido tempo a demonstração geométrica que já descobri e publiquei".

O palimpsesto se interrompe depois de M.15 e, portanto, não sabemos se Arquimedes enviou de



NAS MARGENS DO MAR Imbrium, na Lua, a cratera batizada de Arquimedes (acima), e a cratera Eratóstenes (abaixo)

fato a Eratóstenes a “demonstração geométrica” que menciona e qual seria esta. A frase suscita, ainda, outro problema: por que Arquimedes avalia que os resultados obtidos com seu método não podem e não devem ser considerados verdadeiramente demonstrados?

As interpretações divergem a esse respeito e remetemos o leitor ao apêndice do livro de Dijksterhuis. Em nossa opinião, como sublinhado anteriormente, o ponto delicado da técnica proposta por Arquimedes é a passagem do estudo individual das seções (de dois objetos que estão sendo comparados) para o estudo coletivo. Afirmar, por exemplo, que o cilindro é “feito” de todos os seus círculos-seção é quase um absurdo no contexto da geometria grega. O problema vincula-se à questão da composição do

contínuo: a reta não é feita de infinitos pontos, ainda que contenha infinitos pontos. Isto é, não é possível reduzir um corpo ao agregado infinito de suas seções bidimensionais, ou uma figura plana ao agregado de suas seções unidimensionais.

Toda a teoria das proporções e toda a geometria da medida se baseiam na recusa de uma concepção desse tipo. Pensemos, por exemplo, no axioma de Eudoxo-Arquimedes ou na definição de grandezas que têm relação entre si apresentada nos *Elementos* de Euclides: dadas duas grandezas, uma delas pode ser multiplicada até superar a outra. Ora, por mais que multipliquemos o círculo-seção do cilindro jamais obteremos um objeto tridimensional. A comparação entre grandezas de dimensão diferente é explicitamente excluída pela teoria das proporções. ■