Euclides,

No século III a.C., o geômetra extraiu do saber grego as mais fundamentais proposições matemáticas e organizou-as em uma obra rigorosa fundada na dedução: os Elementos

Em seu comentário ao primeiro livro dos *Elementos* de Euclides, Proclo de Constantinopla (séc. V d.C.) faz alusão a uma época em que seu autor vivia: "Conta-se que certo dia Ptolomeu perguntou a Euclides se não haveria alguma via mais curta que a dos *Elementos* para aprender a geometria. Ao que Euclides lhe respondeu que em geometria não havia ponto de vista real".

Certos exegetas, otimistas, deduziram que o autor apresentou sua obra ao monarca para lhe pedir favores ou para agradecer. Concluíram que Ptolomeu havia recebido Euclides em seu museu ou que teria fundado a escola matemática de Alexandria. A história seduz, mas é pouco digna de

UM DOS MAIS antigos fragmentos dos *Elementos* de Euclides, encontrado em 1897 no Egito. Contém a proposição 5 do livro II

crédito. Conhece-se outra versão, nos mesmos termos, cu jos protagonistas são Alexandre, o Grande e Menecmo d Proconese, discípulo de Eudoxo de Cnido. A existênci de outra versão da anedota indica a finalidade: não se ten registros do ensinamento de algum encontro memoráve entre dois personagens que se tornaram bem conhecidos mas do estabelecimento de uma cronologia fundada n contemporaneidade dos sábios com os homens ilustre (soberanos). Não há dúvida de que Alexandre e Menec mo foram contemporâneos, e o mesmo pode se admitir par Euclides e Ptolomeu, o Soter. Mas nada sabemos sobre vida de Euclides, sua família, sua formação ou quem fo ram seus mestres.

Não conhecemos nem mesmo sua cidade de origem Os historiadores modernos não raro o chamam de Eucli des de Alexandria, sugerindo que a capital dos ptolomeu tenha sido sua pátria de adoção. Fiam-se na anedota d Proclo, como também em um segundo testemunho, trans mitido pelo livro VII da *Coleção matemátic* de Pappus (séc. IV). Em seu livro, Pappu apresenta o *Tratado das cônicas* de Apolôni do qual comenta o prefácio. Apolônio d Perga ali descreve, com orgulho, o plano d sua obra e observa, com relação ao livro II que em Euclides o lugar relativo a três e qua tro ângulos não se deixa construir nem co reta, nem completamente *(ver quadro na pá 52)*. A menção mais antiga feita a Euclid tem conteúdo crítico.

Pappus vê uma certa ausência de *fairpl* que caracteriza a ingratidão: ele diz que

O fundador

Apolônio foi mais longe que o autor dos *Elementos*, tal se deve a ter estudado mais tempo em Alexandria com os discípulos de Euclides. Costuma-se deduzir que o próprio Euclides teria lecionado na capital dos ptolomeus.

Enciclopédia Matemática

Ao confrontar diferentes testemunhos, podemos esboçar uma lista das obras de Euclides. A mais conhecida é sua compilação dos *Elementos* em 13 livros, dedicada sobretudo à geometria, mas que inclui três livros de aritmética (teoria dos números). Já evocamos aqui a compilação (perdida) das *Pseudographemata* (falsas provas). Em geometria possuímos também um breve tratado intitulado *Dados* e parte (conservada apenas nas traduções medievais) da obra *Sobre a divisão das figuras*. Euclides redigiu também *Ópticas, Elementos de música* e *Fenômenos* (breve tratado sobre astronomia

EUCLIDES APRESENTA seus *Elementos* ao rei Ptolomeu, o Soter, em desenho de Alexandre de Bar (fim do séc. XIX). A gravura ilustra a anedota relatada por Proclo: "Não há via real em geometria", teria afirmado Euclides

física). Fragmentos conservados em suas traduções medievais lhe atribuem um estudo do equilíbrio e uma prova (rudimentar) da alavanca. Algumas atribuições são duvidosas, notadamente as dos fragmentos mecânicos. Quanto à divisão do cânone, que foi transmitida com seu nome, não sabemos em que medida ela se relaciona com a obra musical que a Antigüidade lhe atribui.

No entanto, o conjunto se constitui em uma espécie de "enciclopédia" matemática, composta de obras que versam sobre diferentes disciplinas reconhecidas nas classificações das ciências. Em alguns decênios, platônicos e aristotélicos elaboraram diferentes sistemas de classificação das ciências matemáticas, Eudemo de Rodes redigiu a história de três delas, e Euclides produziu um conjunto de tratados que reorganizam e sintetizam os conhecimentos anteriores.

FRONTISPÍCIO DE UMA das primeiras edições de Euclides em língua vernácula (o inglês) por H. Billingley (1570). Euclides é aqui erroneamente designado como o filósofo de Megara, o que era freqüente na Idade Média

Para alguns historiadores modernos, a reputação de Euclides é exagerada. A seu ver, o matemático seria, na melhor das hipóteses, um redator de manuais ou um editor científico, e na pior, um mero compilador de trabalhos alheios. Se Euclides fosse só um compilador, seria possível esquadrinhar os *Elementos* para encontrar as contribuições originais. Mas a forma dos escritos lógico-dedutivos torna esse empreendimento quase impossível, e a cacofonia dos estudos que pretendem proceder dessa maneira vem a ser aqui um testemunho.

Esse juízo de modo algum é objetivo. Ele ignora os testemunhos de Apolônio e de Pappus, as indicações sobre as obras perdidas, notadamente os *Porismos*, em três livros, os *Lugares na superfície*, em dois livros e possivelmente os *Elementos das cônicas*, em quatro livros. Em particular, Pappus afirma que a coleção dita *Do lugar analisado* constituiu-se, em essência, por três autores: Aristeu, Euclides e Apolônio. Essa disciplina versava sobre o lugar dos pontos submetidos a condições e incluía, entre outras, a teoria das cônicas, o importante e inovador campo de pesquisas do século III a.C.

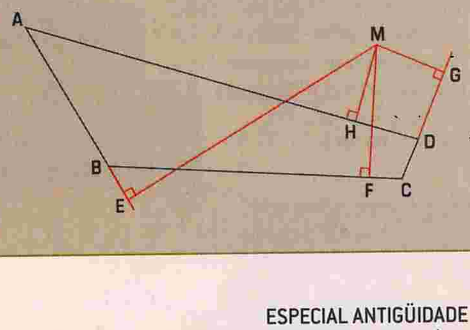
A crítica de Apolônio confirma que Euclides trabalhou nas cônicas. Portanto, há nuances no retrato do autor de *Elementos*. Ele era um geômetra competente, ativo em certos domínios "de vanguarda", mas igualmente bem interessado na formação das exposições científicas e na redação de obras de referência..

O problema em três ou quatro retas

No prefácio de seu tratado das cônicas, Apolônio critica a solução de Euclides para o problema em três ou quatro retas, que é o seguinte: sejam quatro segmentos quaisquer AB, BC, CD, DA e um ponto M. A partir de M conduzem-se as perpendiculares ME, MF, MG, MH sobre esses quatro segmentos ou seus prolongamentos. O lugar em quatro retas é o conjunto dos pontos M de tal modo que a relação (ME.MG)/(MF.MH) seja dada, ME, MF, MG, MH representando as distâncias do ponto M em relação às retas. Os geômetras gregos não falam do produto das distâncias, mas dos retângulos formados ou contidos por (ME, MG) e (MF, MH).

Da mesma forma, o espaço em três retas, por exemplo AB, BC e CD é o conjunto dos pontos M de tal modo que seja dada a relação do retângulo (ME, MG) com o quadrado descrito sobre MF. Esses dois lugares são cônicas. Cinco séculos depois de Apolônio, Pappus generalizou o problema de diferentes maneiras: de início ele supôs que os ângulos ME, MF, MG, MH não são perpendiculares, mas cortam as retas nos ângulos dados. Isso não altera a natureza dos lugares. Em seguida, ele considerou preferencialmente as retas: já não serão cônicas os lugares então obtidos.

É o primeiro grande problema que Descartes examinou e resolveu por seu método analítico no livro I de sua *Geometria* (1537). Quanto a Apolônio, que tão abertamente criticava a solução de Euclides, não sabemos se o resolveu. Certo é que o tratado das cônicas não traz referências a esse respeito.



Bom Título

No entanto, não há dúvida: a glória de Euclides se deve aos *Elementos*, e isso por duas razões, uma boa e outra ruim. A primeira é a receptividade que seu trabalho obteve por causa do título. Esse gênero tinha em vista dois objetivos: proporcionar uma síntese de conhecimentos "elementares" em dado âmbito, requeridos para uma "primeira" aprendizagem, e encarnar um modelo de raciocínio dedutivo e demonstrativo. A coleção não é uma simples compilação de resultados; ela confere uma representação arquitetônica da disciplina.

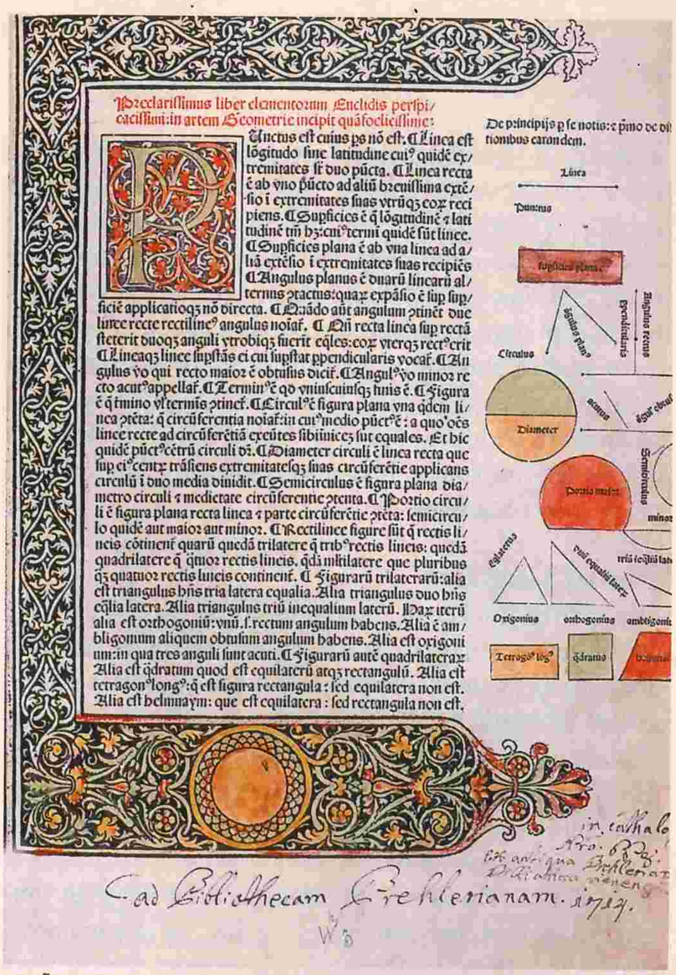
A segunda razão do êxito de Euclides é o plano singular por ele seguido, e que seria julgado com severidade na Idade Média e na Renascença. Em diversos aspectos, ao estudarmos o tratado na ordem de sucessão dos livros, a progressão euclidiana parece bastante desastrosa de um ponto de vista pedagógico.

A palavra grega *stoicheïon* ("elemento") remete antes de mais nada à idéia de "classe", "filo", de ordem por alinhamento. A escrita alfabética marcou os filósofos gregos: componentes em número limitado (menos de 30) bastam para constituir o conjunto das sílabas, das palavras e dos discursos. A língua grega chama esses componentes de "elementos" (*stoicheïa*), sem definir se eles são fonemas ou letras. E os filósofos projetaram sobre os seres naturais e as produções humanas esse modo de composição de um todo a partir de constituintes elementares.

Segundo Platão, o mundo se constitui de quatro elementos: fogo, ar, água e terra. Da mesma forma, explica Aristóteles, em geometria certas proposições se encontram na demonstração de muitas outras, denominadas "elementos", e há que se aprendê-las. A noção parece completamente relativa: tal teorema é elemento de outro. De fato, só é elemento o que intervém nas numerosas provas. Portanto, são excluídas certas proposições elementares, simples e elegantes, porém não mobilizadas em muitas demonstrações. Proclo, comentando Euclides, dá como exemplo de proposição excluída o fato de as três alturas de um triângulo serem concorrentes.

A constituição de uma coleção de elementos liga-se, pois, a certo estado-da-arte no âmbito considerado. Ela requer o acúmulo de resultados significativos que sejam suficientemente numerosos e a indicação das propriedades ou das construções que intervêm na maioria dos casos. Sua escolha pressupõe uma análise prévia – no sentido quase químico do termo – que determine os ingredientes essenciais, não só para o uso em uma problemática determinada, mas na óptica de uma arquitetura dedutiva global cujas qualidades principais serão a concisão e a clareza.

Esse trabalho de investigação prévia não é apresentado. A exposição é sintética: ela procede por dedução das hipóteses até as conclusões. Ademais, por ter sido bastante necessário interromper o trabalho de decomposição em dado instante, princípios ou pontos de partida não demonstrados foram postos no início da obra: são os mais elementares dentre os elementos. Assim, o gênero "Elementos de..." expõe uma parte da ciência já feita e não um método de pesquisa. Os matemáticos gregos o apreenderam de maneira bem particular. Além do trabalho de Euclides, conhecem-se os *Elementos das cônicas* atribuídos a Aristeu e a Apolônio, que descreve com esse título os quatro primeiros livros dessas *Cônicas*, e a Arquimedes, que se refere aos *Elementos de mecânica*.



EDIÇÃO IMPRESSA dos *Elementos*, por Erhard Ratdolt, Veneza, 1482. Contém os 13 livros genuínos, e os livros XIV e XV, comprovadamente espúrios. A tradução em latim do árabe é de Abelardo de Bath (séc. XII)

O êxito do modo de proceder em geometria e, de modo mais geral, nas matemáticas, deve-se à possibilidade que proporcionam essas disciplinas, de remontar aos princípios indemonstráveis. Pela simplicidade de seus pontos de partida, pelo rigor de seu modo de procedimento, pela irrefutabilidade (ao menos aparente) das conclusões a que ele chega, a argumentação geométrica exerceu poderoso fascínio: assim, desde a Antigüidade, muitos intelectuais redigiram *Elementos* de ética, de física, de teologia.

O preço a pagar é por vezes elevado. A apresentação sintética é, por definição, opaca. A de Euclides é às vezes artificial. A situação já não é tão grave quando se estuda sob a direção de um mestre competente, que forneça as explicações complementares necessárias. É possível que o geômetra tenha concebido sua compilação não como um manual de ensino, mas como obra de referência a consultar de maneira inteligível. No entanto, ele se tornou um texto escolar, submetido ao trabalho de professores e comentadores. Uma de suas tarefas era libertar o leitor da linearidade dedutiva, permitir-lhe antecipar, remontar à origem dos problemas. Justamente aqui cabe uma crítica à progressão euclidiana.

Plano Singular

O tratado de Euclides é tão volumoso que necessita de uma divisão de matérias por outros critérios além da estrutura dedutiva que se exerce localmente. Uma das idéias foi reagrupar os resultados conforme os temas abordados. Distinguem-se então três grandes subconjuntos de livros: "planos", "aritméticos" e "estereométricos" *(ver figura na pág. 57)*, cujos objetos são, respectivamente, a figura plana, o número e a figura sólida.

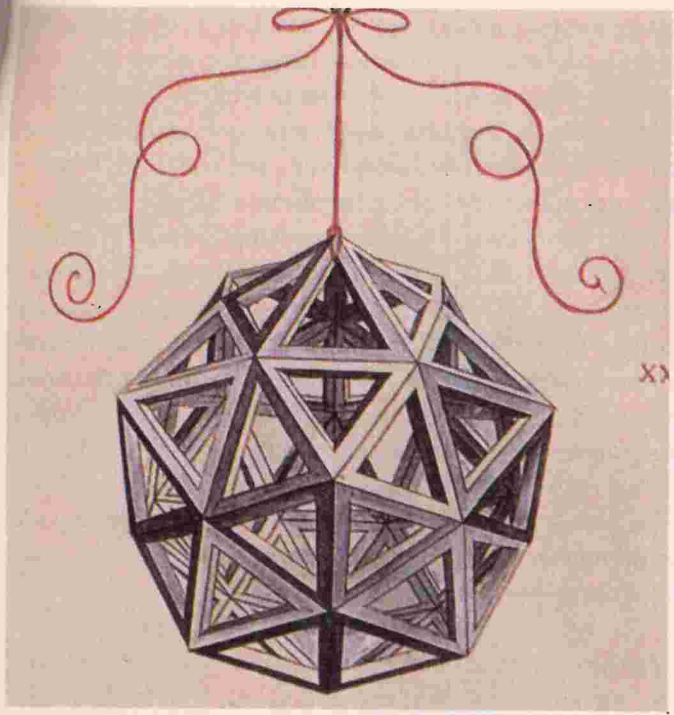
A redução em elementos privilegia as figuras mais simples: triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos e trapézio nos livros I e II; círculo e seus segmentos no livro III; alguns polígonos regulares inscritos em uma esfera no livro IV. Da mesma forma, as figuras sólidas de base são os cinco sólidos regulares circunscritos por uma esfera (livro XIII), os paralelepípedos e os prismas (livro XI), as pirâmides, os cones e os cilindros (livro XII).

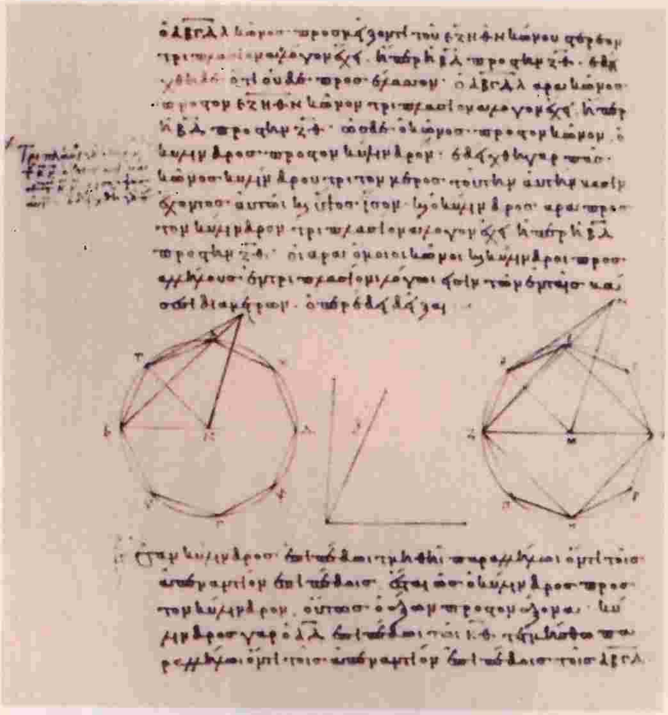
Após essa divisão, três ou quatro aspectos surpreendem: 1. a obra começa pela geometria, enquanto a aritmética geralmente é considerada a primeira ciência matemática, e seus objetos, desprovidos de posição, mais simples. 2. A exposição de geometria plana é interrompida por um livro de outro gênero, o quinto, que trata de relação e proporcionalidade entre objetos. Além disso, esse livro é de um nível de abstração incrivelmente elevado se comparado aos anteriores. 3. Outro livro peculiar é o X. Nem mesmo é possível descrevê-lo quanto a seus objetos: ele mescla linhas, áreas e números. Como o livro V, ele trata de relações: as de co-

Arquitetura, a arte das proporções

As diferentes ordens arquitetônicas distinguem-se por grande número de detalhes de construção e decoração. Todavia, sua prática da arquitetura modular repousa em parâmetros característicos. Em tese, todas as dimensões de partes do templo se exprimem em função de uma unidade, ou módulo, ou como um múltiplo, ou como submúltiplo – as duas categorias mais simples de relações numéricas. Na ordem iônica, o módulo é o diâmetro da coluna, na ordem dórica é o raio. Desse modo, o arquiteto garantia que todas as partes de sua construção fossem comensuráveis. O trabalho do arquiteto, a "sumetria", abrange a um só tempo esse procedimento técnico simples e uma avaliação estética: na prática, eles adotam certos modos de dispor nas formas e distâncias para dar conta de certas ilusões de óptica. O templo de Hefaístos sobre a ágora de Atenas é um exemplo perfeito de seu estilo dórico.

TEMPLO DE HEFAÍSTOS, na ágora de Atenas, cujas proporções foram determinadas por um parâmetro único





À ESQUERDA, *Duodecedron vacuus*, desenho de Leonardo da Vinci para a obra *De divina proportione* (1509), em que Luca Pacioli cita os *Elementos* de Euclides, particularmente a proporção ou razão áurea (que ele chama de divina), e os sólidos regulares e semi-regulares. À direita, manuscrito grego dos *Elementos* com o fim da prova da proposição XII-12. A partir da Renascença, os editores modernos passaram a acrescentar entre parênteses os números das proposições utilizadas no curso da demonstração. Sem essas minúcias, era simultaneamente exercício de memória e de lógica. Com o tempo, diversas indicações para auxiliar o leitor – os "escólios" – foram inseridas nas margens dos manuscritos gregos. Aqui, na margem esquerda, um leitor ou um corretor (a letra não é do copista) acrescentou uma justificação para que se remetesse à proposição XII-10, utilizada nessa passagem. Certos escólios se tornaram porções do texto por ocasião de suas sucessivas cópias. O mesmo tipo de acréscimo aparece em outros manuscritos dos *Elementos*

mensurabilidade e incomensurabilidade, abordadas de um ponto de vista geral, e depois aplicadas a retas e áreas retilíneas simples. Além disso, a segunda parte do livro é uma impressionante classificação de retas e áreas ditas irracionais – cerca de 90 proposições, ou seja, um quinto do tratado. Isso foi considerado indigesto, ainda mais porque nada o justificana seqüência. 4. A exposição estereométrica se conclui por uma comparação dos cinco sólidos regulares que parece incompleta.

Teorias de Proporções

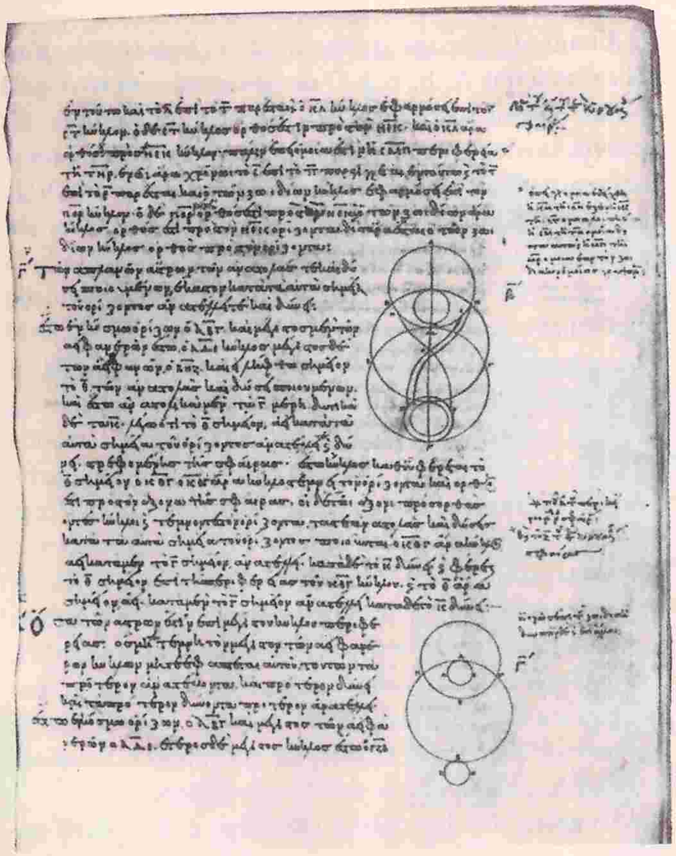
Outro fato que recebeu críticas é que a obra contém não uma teoria das proporções, mas duas. A segunda é exposta nas 22 primeiras proposições do livro VII. Como conseqüência, certos resultados são demonstrados duas vezes.

Assim, a proposição V-16 estabelece que "se quatro grandezas estão em proporção, de maneira alternada elas estarão também em proporção", enquanto VII-13 prova que "se quatro números estão em proporção, de maneira alternada também eles estarão em proporção". Em notações modernas: "se $A/B = C/D$ então $A/C = B/D$", pois "(A, B, C, D) estão em proporção" não significa nada mais que "(A, B) estão na mesma relação que (C, D), isto é, $A/B = C/D$".

A transcrição apaga as diferenças: em nossa escrita simbólica, as letras A, B, C e D designam não importa qual tipo de objetos suscetíveis de entrar em uma proporção. Todavia, se o leitor retomar os enunciados antigos, vai constatar sem nenhum esforço que a diferença entre V-16 e VII-13 é que a primeira versa sobre grandezas (*megethos* em grego), a segunda sobre números (*arithmos* em grego).

A noção de "número" é definida como uma pluralidade determinada de unidades, isto é, do que é usado para fazer uma enumeração (2, 3, 4, 5... os inteiros naturais). Nem frações nem números irracionais têm lugar na aritmética grega. Já a noção de grandeza é menos clara. Trata-se, originalmente, de uma das propriedades fundamentais da figura geométrica: seu formato. Euclides não o define, mas se vê, na continuidade do tratado, que ele considera sob esse termo as linhas, as superfícies, os volumes e os ângulos retilíneos. Isso quer dizer que ele tem em vista um objeto geométrico abstrato, independentemente das dimensões. Aristóteles o aplica ao tempo, ao peso e a outras grandezas físicas. Para ele, a diferença entre "número" e "grandeza" é constitutiva: a segunda é indefinidamente divisível, enquanto a divisão do primeiro se detém na unidade.

O mistério das duas teorias das proporções poderia en-



tão estancar aí: uma vez que há dois tipos de objetos distintos – o número e a grandeza – é natural que haja duas teorias das proporções. Mas há um porém: no início de seu segundo livro, Euclides "demonstra" que se duas grandezas, A, B têm uma medida comum, sua relação A/B será a de certo número M com outro número N.

Por exemplo, se A e B são dois comprimentos, A medindo 3 metros e B, 5, a relação entre A e B será a relação dos números 3 e 5. Os geômetras antigos diziam que A é para B o que 3 é para 5. Ou seja, as relações de grandezas comensuráveis identificam-se com as de números. E as relações entre números servem para exprimir as relações entre certos tipos de grandezas. No exemplo acima, os comprimentos têm uma relação exprimível de 3 para 5. Em compensação, o lado e a diagonal de um quadrado têm uma relação que não se pode exprimir com a ajuda dos números (inteiros). Para nós, a relação corresponde ao número irracional $\sqrt{2}$.

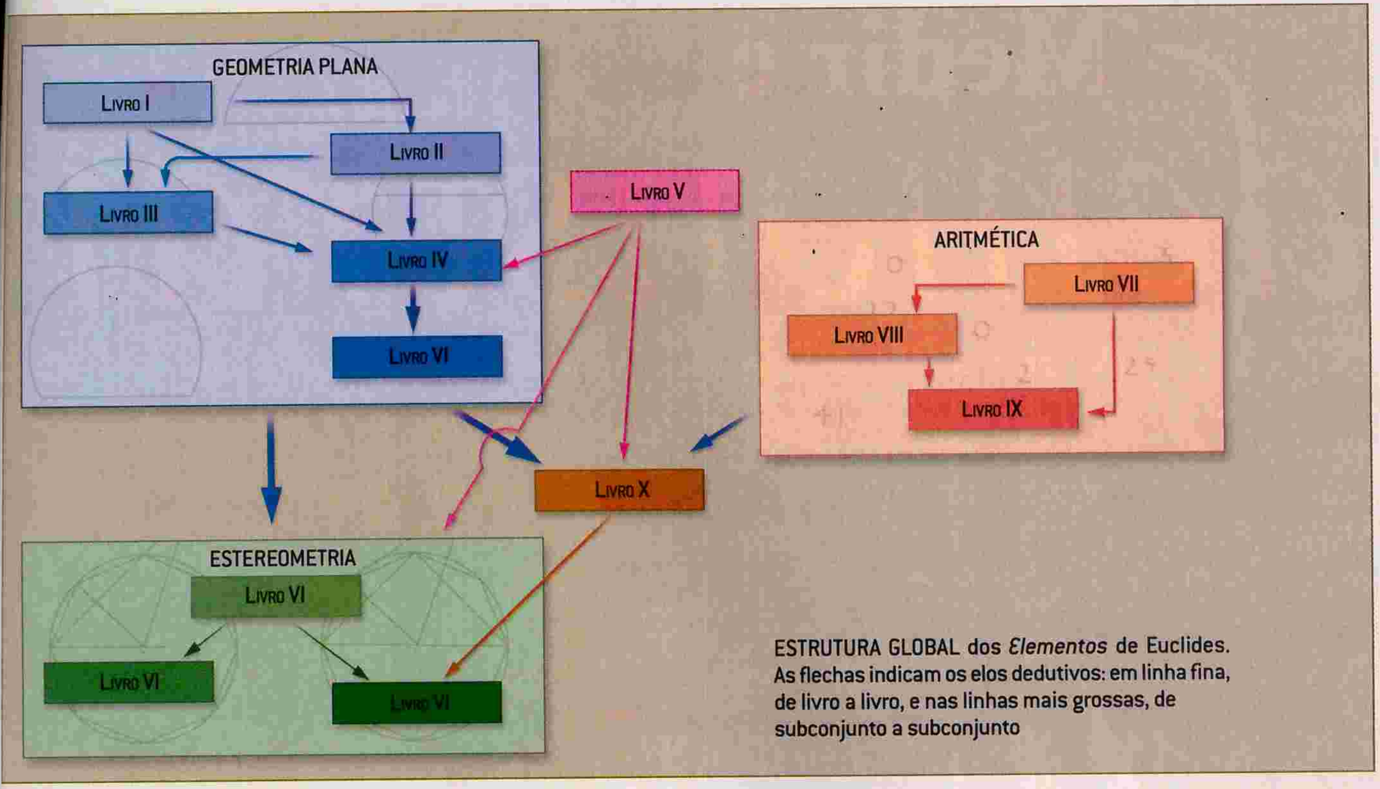
De uma perspectiva moderna, o fato de que uma relação entre grandezas comensuráveis identifica-se a uma entre números corresponde, *grosso modo*, ao fato de que os números racionais positivos (frações) constituem um subconjunto de números reais positivos. Daí a considerar que a teoria de proporções do livro VII não passa de um caso particular, redundante, da primeira. Desde o século XVI, autores como Francisco Maurolyco e Gilles-Personne de Roberval propõem a unificação dessas teorias.

Crise dos Fundamentos

No final do século XIX, alguns historiadores, mobilizados por essas singularidades, elaboraram uma grade de leitura dos *Elementos*. Na época, os matemáticos atravessavam uma crise de fundamentos, ligada aos paradoxos surgidos com a então recente formalização da teoria dos conjuntos.

Os historiadores perceberam que a descoberta de grandezas incomensuráveis havia engendrado o mesmo tipo de "crise" na Grécia Antiga. Antes, os geômetras antigos, pressupondo que todas as grandezas fossem comensuráveis, haviam utilizado uma teoria das proporções simples, aquela cujo traço apareceria depois no livro VII. Com a descoberta de segmentos incomensuráveis (como a diagonal de um quadrado que tenha por lado a unidade), que revelaram as falhas da teoria, ela foi posta de lado durante algum tempo. Depois surgiu uma nova teoria, a registrada no livro V, geralmente atribuída a Eudoxo de Cnidos (contemporâneo de Aristóteles), que se aplicava às grandezas comensuráveis e incomensuráveis, ainda que a distinção entre elas só

ACIMA, RETRATO DE Euclides por Juste de Gand (século XV). Ao lado, manuscrito dos *Fenômenos* de Euclides, obra de astronomia dedicada às ascensões e declínios de algumas estrelas e à variação da duração do dia em função da época do ano e da latitude



ESTRUTURA GLOBAL dos *Elementos* de Euclides. As flechas indicam os elos dedutivos: em linha fina, de livro a livro, e nas linhas mais grossas, de subconjunto a subconjunto

fosse introduzida no livro X. Essa distinção justifica a *posteriori* o tratamento elaborado no livro V. Euclides teria aplicado a teoria eudoxiana às figuras planas no livro VI e aos sólidos nos livros XI a XIII. No entanto, ele teria mantido parte da antiga teoria em seu livro VII.

Quanto às singularidades do plano euclidiano, podemos explicá-las de outra forma. Vimos já que tal se dava pelo duplo tratamento da proporcionalidade: os antigos privilegiam os objetos sobre as relações entre eles. E uma vez que há dois tipos de objetos, é legítimo ter duas teorias de proporções, ainda que o objetivo, na seqüência, seja o de ver quando podem ser coordenadas (caso das grandezas comensuráveis) e quando isso não é possível (incomensuráveis).

Além disso, a leitura atenta do tratado mostra que a inserção de uma proposição se faz o mais próximo possível do local onde ela será utilizada. Por exemplo, como os irracionais só aparecem no livro XIII, parte dedicada aos sólidos, Euclides inseriu a noção de incomensurabilidade no livro X, justamente antes do tratamento dos sólidos. Essa é, pois, a razão, pela qual a introdução da distinção "comensuráveis/incomensuráveis" até ali se diferencia. Da mesma forma, as noções aritméticas só aparecem no livro X, e os livros aritméticos são inseridos imediatamente antes: ainda que haja um interesse específico pelo assunto em *Elementos*, a razão da existência dos livros VII a IX é seu uso instrumental no estudo da irracionalidade.

Enfim, Euclides se conforma com uma atitude que, segundo Aristóteles, é própria aos matemáticos: em uma ciência demonstrativa, os princípios não demonstrados devem ser tão pouco numerosos quanto possível. Ou seja, se não é necessário usar a teoria das proporções entre grandezas e suas difíceis definições para estabelecer certos resultados, então é melhor dispensá-las.

Assim, Euclides reagrupa nos livros de I a IV todos os resultados que não necessitam dessa teoria, enquanto o sexto livro se ocupa de noções, como a da semelhança de figuras, pelas quais é inevitável o recurso à teoria das proporções. Euclides leva bem longe essa atitude ao reagrupar, nas 28 primeiras proposições de seu livro I, as que não dependem de sua quinta demanda ou postulado de paralelos (tem-se, em substância, que duas retas de um mesmo plano se encontram em um ponto se não formarem, com uma terceira reta, ângulos cuja soma valha dois ângulos retos).

Essa atitude explicaria também por que a estereometria euclidiana é tão mal fundada. Muitas das primeiras proposições do livro XI (1, 2, 3, 7) apresentam provas pouco convincentes: ao que parece, Euclides estava persuadido de poder reduzir logicamente a estereometria à geometria plana sem a introdução de novos postulados. A exposição de Euclides está longe de ser perfeita. No entanto, as singularidades de sua estrutura não se explicam, ou pouco se explicam, pela história das matemáticas pré-euclidianas, como crêem os partidários da leitura arqueológica; elas resultam das escolhas matemáticas e epistemológicas dos *Elementos*. *(BV)*

Medir e *demonstrar*

No primeiro livro de seus Elementos, *Euclides posiciona as bases teóricas do cálculo das áreas poligonais. Estaria interessado nos problemas práticos dos agrimensores?*

LAVRADOR COLHENDO milho, em amuleto da cultura greco-egípcia, século I a.C-I d.C.

Eudemo de Rodes (século IV a.C.) afirma que a igualdade de dois triângulos detentores de um lado igual e de dois ângulos iguais – objeto da proposição I-26 dos *Elementos* de Euclides – já era conhecida por Tales de Mileto. Pois Tales, escreve Eudemo, deve tê-la utilizado no método que elaborara com o intuito de determinar, a partir da margem de um lago ou de um rio, a distância de um bote que dela se aproxima.

Transmitido por Proclo, esse testemunho nos ensina duas coisas: 1) Eudemo – como também muitos historiadores modernos – procedia por reconstrução racional: se Tales tivesse inventado algum método, ele deveria conhecer todos os resultados geométricos que esse método pressupõe. Tal dedução é evidentemente incerta. 2) Para Eudemo, isto é, para a tradição (pseudo) histórica, o interesse da geometria residia na possibilidade de determinar a distância de pontos.

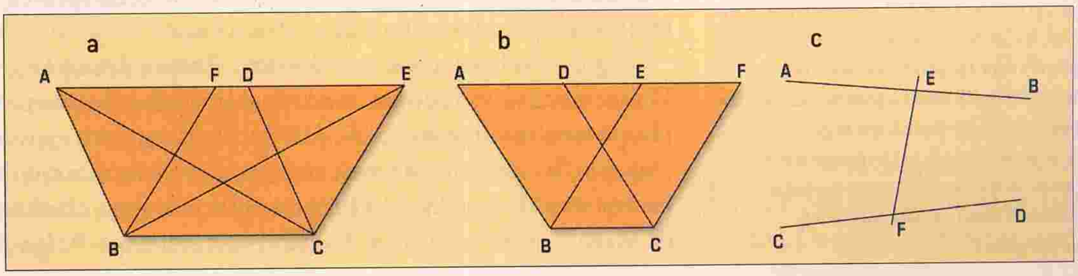
O historiador Heródoto sugeriu que a geometria havia se originado com a agrimensura dos egípcios, isto é, com a medida das superfícies. De fato, eles usavam procedimentos por vezes sumários e aproximativos. Para avaliar a área de um quadrilátero qualquer ABCD, em vez de dividi-lo em dois triângulos, eles se contentavam em medir os lados e multiplicar as metades das somas dos lados opostos: $(AB+CD)/2 \times (BC+DA)/2$ (o que redundava em assimilar o quadrilátero a um retângulo que tivesse como lados as metades dessas somas).

Isso quer dizer que havia um meio de combinar a agrimensura e a geometria teórica. Uma das tarefas da geometria aplicada é precisamente a de medir certas grandezas de maneira indireta: a profundidade de um canal, a altura de uma montanha, o afastamento entre o observador e um ponto inacessível. Heron de Alexandria desenvolveria sistematicamente esse ponto de vista no século I d.C., em seu tratado da *Dioptria*. Assim como Euclides, ele primeiro explicava os procedimentos elementares para em seguida combiná-los para resolver questões complexas. Heron utilizou tanto instrumentos (o dioptro e diferentes tipos de réguas) quanto a proporcionalidade dos lados entre triângulos semelhantes, propriedade que, no ensino básico é chamado hoje como "teorema de Tales".

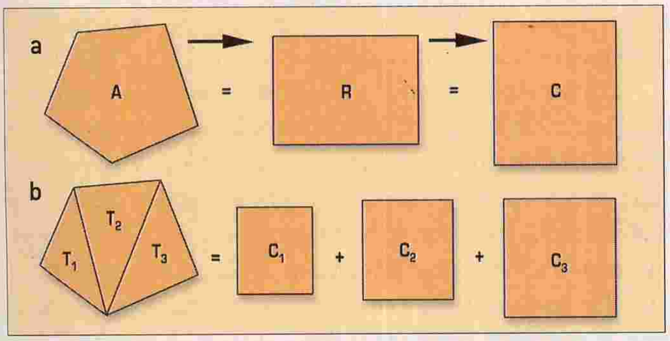
Evolução da Medida

Boa parte da obra de Heron é dedicada a uma série de questões cujo objetivo é conduzir a água de um ponto A a um ponto B, havendo a necessidade de cavar um canal através de uma montanha, em linha reta a partir das duas entradas dadas, e das embocaduras de aeração. Isso faz menção de uma bela realização técnica da época arcaica, o túnel de Eupalinos de Megara, cavado na ilha de Samos, cerca de 530 a.C. Destinado ao abastecimento de água da cidade, chegou ao comprimento de 1 km. A escavação foi empreendida simultaneamente por duas equipes, de ambos os lados da montanha.

É fácil compreender que engenheiros, mecânicos ou arquitetos dêem conta de suas práticas mostrando como elas se apóiam em certos resultados de geometria teórica; é o meio de aumentar o seu prestígio, de fazer reconhecer a um só tempo a utilidade e a tecnicidade de seus saberes. Mas também estariam os geômetras inquietos quanto às possibilidades de aplicação de seus resultados? Já acompanhamos a sua opção por formulações abstratas: mais do que da medida de uma área, falam em "quadratura". No entanto, um passar de olhos sobre o primeiro livro dos *Elementos* mostra que Euclides desejou estabelecer um lugar constitutivo



a) A área do paralelogramo ABCD é duas vezes a do triângulo BCE. b) Os paralelogramos ABCD e EBCF são iguais. c) Demanda nº 5 de Euclides: se a soma dos ângulos BEF e DFE é inferior a 180°, as retas AB e CD seccionar-se-ão do lado de B e D



ACIMA, O TÚNEL DE Eupalinos, em Samos. A escavação, empreendida de ambos os lados da montanha, pressupõe habilidade para manter um alinhamento dos dois buracos e um declive destinado a facilitar o escoamento da água. Alguns viram aí uma ilustração do ensinamento de Pitágoras, nativo de Samos. De fato, Pitágoras deixou sua cidade, fugindo da tirania de Polícrates. E o arquiteto Eupalinos era de Megara, não de Samos. Os procedimentos descritos por Heron mobilizam poucos conhecimentos geométricos. Embaixo, dois métodos euclidianos para tornar quadrada uma figura retilínea: a) a proposição I-45 dá o retângulo R equivalente em área a uma figura retilínea A, em seguida a proposição II-14 fornece o quadrado C equivalente a R. b) Um polígono P é divisível em triângulos T_i. Se conhecemos os quadrados C_i equivalentes a esses triângulos e o quadrado equivalente à soma de dois quadrados, obteremos o quadrado equivalente ao polígono P

entre a quadratura dos polígonos e o modo dedutivo de proceder. Sua intenção era sistematizar a geometria aplicada, conferir-lhe bases teóricas. Sigamos Euclides passo a passo.

Na proposição II-14, o autor de *Elementos* resolve o problema da quadratura dos polígonos: "Construir um quadrado igual a uma figura retilínea [A] dada". Para fazê-lo, ele procede em dois tempos: supõe ter encontrado um retângulo R igual à figura A, – ele explicou como proceder na proposição I-45 – e depois demonstra como encontrar um quadrado C de área igual à do retângulo R, que termina a quadratura *(ver figura "a" no quadro ao lado, abaixo)*.

Com I-45, a quadratura de quaisquer figuras retilíneas é reconduzida a um caso particular: a quadratura dos retângulos. É possível considerar as coisas de outra maneira. Toda figura retilínea pode ser decomposta em triângulos – por exemplo, um pentágono é composto de (no mínimo) três triângulos *(ver figura "b" ao lado)*.

Supõe-se que se saiba encontrar um quadrado equivalente em área a um triângulo. Para resolver o problema da quadratura das áreas retilíneas, basta determinar como obter um quadrado equivalente à soma de dois (três, quatro, cinco...) outros quadrados. Por associação, basta saber fazê-los para dois quadrados e o problema se reduz à questão: "Como encontrar um quadrado equivalente à soma de dois dados quadrados?".

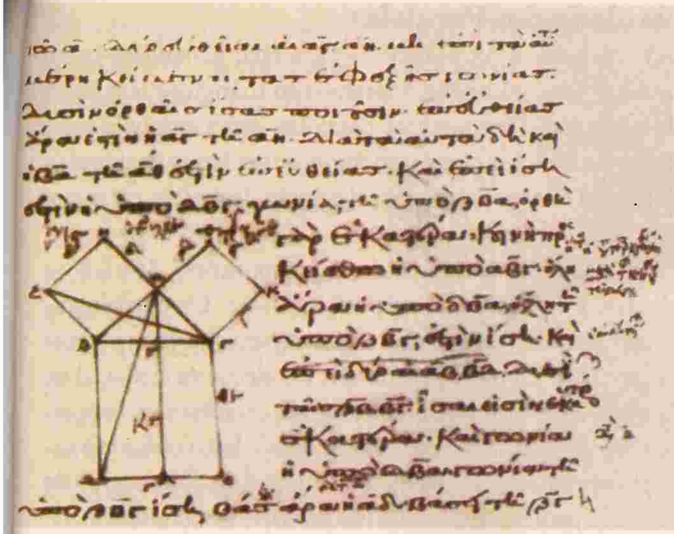
A resposta se encontra em uma das mais célebres proposições de Euclides, o teorema dito da hipotenusa *(I-47, ver quadro na pág. 61)*: "Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados contendo o ângulo reto". Euclides estabelece não só esse teorema, mas a sua recíproca. A propriedade é, portanto, característica da espécie "triângulo retângulo".

Do ponto de vista prático, há interesse nessa recíproca. Como diz o arquiteto romano Vitrúvio, tomando três réguas de 90, 120 e 150 cm, é possível construir um esquadro exato, descoberta bastante útil para a construção de graus de uma escala. A determinação de tais trincas de números (a, b, c) tais que $a^2+b^2 = c^2$ já era conhecida dos babilônios.

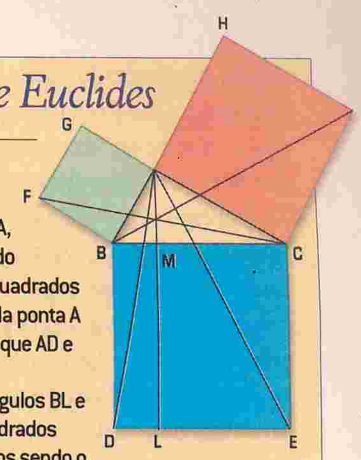
Eudemo havia tentado determinar os teoremas geométricos que Tales, segundo ele, não podia ignorar. Outros fizeram o mesmo por Pitágoras e lhe atribuem a descoberta do teorema que ainda hoje leva o seu nome. Associava-se a pretensa descoberta de Pitágoras a um sacrifício de sangue (segundo a lenda, ele teria sacrificado cem bois para celebrar seu teorema). Mas, essa prática era proibida pelos preceptores da seita pitagórica.

Segundo as fontes clássicas (Heródoto, Platão e Aristóteles), Pitágoras tinha inventado um "modo de vida" fundado em múltiplas prescrições religiosas e práticas de rituais, na crença na transmigração das almas, na recusa de certos cultos cívicos, mas também na vontade de influenciar o regime político de certas cidades da Magna Grécia (sul da Itália, Sicília). Nada indica que Pitágo-

JOHN K./PBASE



A proposição I-47 de Euclides



"Seja o triângulo retângulo ABC tendo o ângulo reto BAC. Digo que o quadrado sobre BC é igual aos quadrados sobre BA, AC. Com efeito, se por um lado o quadrado BDEC é descrito sobre BC, por outro os quadrados GB, HC o são sobre BA, AC; e digo que pela ponta A seja conduzida AL, paralela a BD e CE. E que AD e FC sejam cruzadas."

Euclides demonstra então que os retângulos BL e CL são respectivamente iguais aos quadrados ABFG e ACKH. A soma dos dois retângulos sendo o quadrado BDEC, este será então igual à soma dos quadrados ABFG e ACKH.

AO LADO, MANUSCRITO grego dos *Elementos* de Euclides: a prova do teorema da hipotenusa (I-47)

ras tenha se dedicado à geometria. Mesmo Proclo não esconde seu ceticismo e insiste na perfeição da prova de Euclides.

O estilo do geômetra possui certas características passíveis de ser encontradas já nos fragmentos de Hipócrates: exposição sintética, forma dedutiva, combinação de um texto e de um diagrama letrado tornando um e outro indispensáveis à demonstração. As letras são as únicas partes do discurso matemático que não pertencem à língua natural. Euclides não faz uso de símbolos, e seu discurso recorre apenas a uma reduzida parcela da língua grega, pelo uso que faz de frases estereotipadas. Ele designa as figuras de modo econômico. Por exemplo, fala do quadrado BDEC *(ver quadro acima)*, pois todos esses vértices são mencionados no texto, porém designa os quadrados sobre AB e sobre AC por somente dois vértices opostos, respectivamente BG e HC, e isso lhe basta.

O Teorema por Euclides

O cerne da demonstração consiste em estabelecer que o retângulo BL e o quadrado ABFG são iguais, já que a área de cada um é o dobro da área de triângulos iguais, ABD e FBC. Euclides estabelece a igualdade prévia dos dois graças a uma proposição sobre a igualdade dos triângulos (I-4): nossos dois triângulos têm dois lados iguais a dois lados, os quais contêm ângulos iguais. Ele já havia provado a igualdade desses ângulos ao mostrar que se tratava das somas de dois ângulos iguais dois a dois. De uma perspectiva moderna, a igualdade dos triângulos decorre do fato de que eles se deduzem um do outro por uma rotação de 90 graus. A seqüência da demonstração de Euclides é simples: o retângulo CL chega mesmo a ser igual ao quadrado ACKH (detalhes não são contemplados por Euclides). A reunião dos retângulos BL e CL constituindo o grande quadrado BDEC, este haverá de ser, pois, igual aos dois quadrados BG e HC.

Mas de que modo Euclides justifica que o retângulo BL (respectivamente o quadrado BG) seja duplo do triângulo ABD (FBC)? Tal é estabelecido em um teorema anterior mais geral que combina triângulos e paralelogramos, a proposição I-41: sejam um paralelogramo ABCD e um triângulo BCE (que têm a mesma base BC) "situados nos mesmos paralelos BC e AE" (ou seja, A, D e E estão alinhados sobre uma reta paralela a BC, *(ver figura "a" na pág. 59)*, enquanto ABCD é o duplo do triângulo BCE.

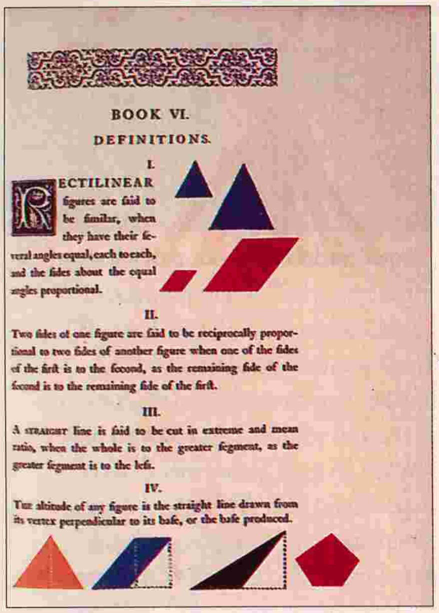
Antes de seguir adiante na prova de I-41, é preciso verificar que ela se aplica em I-47, por exemplo, para o quadrado BG e para o triângulo FBC *(ver o enquadrado em sentido contrário)*. Dois pontos são evidentes: o quadrado BG é um paralelogramo, isto é, uma figura "de linhas paralelas". Idem para o retângulo BL. Além disso, FBC e BG possuem a mesma base, BF. Resta verificar que eles estão nas mesmas paralelas.

As retas FB e GA são paralelas (por construção BFGA é um quadrado). Basta então mostrar que o vértice C está sobre o prolongamento da reta GA. As retas GA e AC, com efeito, teriam podido constituir uma linha quebrada (em A) – não é o caso. Euclides observa: "Uma vez que cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto então relativamente a certa reta: BA, e em um ponto A que está sobre ela, as duas retas [segmentos] AC, AG, não posicionadas do mesmo lado, formam ângulos adjacentes iguais a dois retos. Portanto, CA está alinhado com AG. Então, pela mesma razão, BA também está alinhado com AH".

Nada mais impede que utilizemos o resultado contido em I-41 para estabelecer o teorema da hipotenusa. Graças a esse teorema – a proposição I-47 de Euclides – saberemos encontrar a "soma" de dois quadrados dados sob a forma de um quadrado – bastará construir o triângulo retângulo no qual os lados do ângulo reto são os lados de cada um dos dois quadrados a somar: a hipotenusa do triângulo será então o lado do quadrado "soma". Da mesma forma, para calcular sua diferença, poremos o lado do quadrado maior como hipotenusa de um triângulo retângulo, e o lado do menor como um dos lados do ângulo reto; o lado que restar será o do quadrado equivalendo à diferença dos dois quadrados dados.

Voltemos à prova de I-41. Euclides junta a diagonal AC *(ver figura a na pág. 59)*. Assim, ele constrói o triângulo ABC que também tem BC por base e se situa nos mesmos paralelos. Feito isso, enuncia duas asserções das quais advém o resultado. a) Os triângulos ABC e EBC, por terem a mesma base e estarem nas mesmas paralelas, são iguais. b) O triângulo ABC é a metade do paralelogramo ABCD, porque AC é a diagonal e porque a diagonal de um paralelogramo o secciona em duas partes iguais.

Essa segunda propriedade é bastante simples e advém da igualdade dos triângulos ABC e ADC. Ela tem uma conseqüência interessante: seja, sobre a figura "a" *(pág. 59)*, o ponto F de modo que EF = BC. O quadrilátero BCEF é um paralelogramo, também ele sobre a mesma base e nas mesmas paralelas que ABCD, ABC e ADC; BE é a sua diagonal. Segundo (b), o triângulo EBC, portanto, é a metade do paralelogramo BCEF. Assim, se a afirmação (a) for verdadeira, a asserção (c):


BOOK VI.

DEFINITIONS.

I.

RECTILINEAR figures are ſaid to be ſimilar, when they have their ſeveral angles equal, each to each, and the ſides about the equal angles proportional.

II.

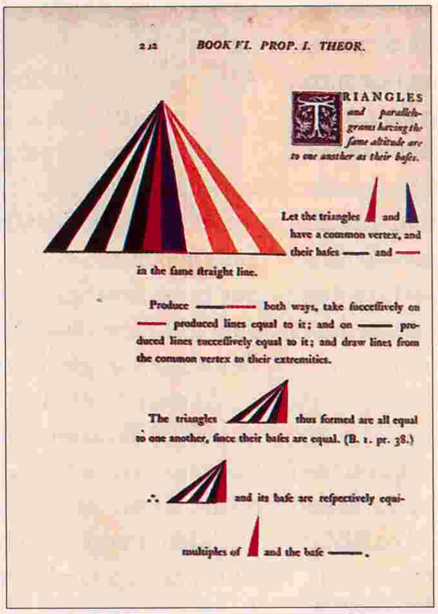
Two ſides of one figure are ſaid to be reciprocally proportional to two ſides of another figure when one of the ſides of the firſt is to the ſecond, as the remaining ſide of the ſecond is to the remaining ſide of the firſt.

III.

A STRAIGHT line is ſaid to be cut in extreme and mean ratio, when the whole is to the greater ſegment, as the greater ſegment is to the leſs.

IV.

THE altitude of any figure is the ſtraight line drawn from its vertex perpendicular to its baſe, or the baſe produced.


212 BOOK VI. PROP. I. THEOR.

TRIANGLES and parallelograms having the ſame altitude are to one another as their baſes.

Let the triangles and have a common vertex, and their baſes —— and —— in the ſame ſtraight line.

Produce —— both ways, take ſucceſſively on —— produced lines equal to it; and on —— produced lines ſucceſſively equal to it; and draw lines from the common vertex to their extremities.

The triangles thus formed are all equal to one another, ſince their baſes are equal. (B. 1. pr. 38.)

∴ and its baſe are reſpectively equimultiples of and the baſe ——.

OS *ELEMENTOS*, em edição de 1847, feita pelo matemático Oliver Byrne. Reúne os seis primeiros livros, que tratam de geometria plana e da teoria das proporções

SUNSITE.UBC.CA/DIGITAL MATHARCHIVE

"Os paralelogramos de mesma base e situados nas mesmas paralelas são iguais entre si", também o é, e reciprocamente.

Em resumo, "os paralelogramos ou triângulos de mesma base e situados nas mesmas paralelas são iguais entre si". Euclides trata os casos "triângulos" (a) e "paralelogramos" (c) separadamente, nas proposições I-37 e I-35. Quanto à asserção (b), é demonstrada em I-34. Os teoremas I-34 e I-35 são os fundamentos da teoria da equivalência em área, notadamente contida nas proposições I-37, 41, 42, 47 e II-14.

Postulado das Paralelas

Tendo chegado à proposição I-35, é fácil generalizá-la em duas direções: 1) Se paralelogramos ou triângulos têm bases iguais e se estão nas mesmas paralelas, eles são iguais entre si. 2) Se paralelogramos ou triângulos têm bases desiguais e se estão nas mesmas paralelas, eles serão desiguais, e o maior será o de base maior.

A primeira generalização é feita nas proposições I-36 e I-38; a segunda é pressuposta na proposição VI-1: "Os paralelogramos ou triângulos situados nas mesmas paralelas estão entre si como sua base", a qual, por sua vez, é o elemento essencial de toda a teoria das proporções entre figuras semelhantes, exposta nos livros VI (figuras planas) e XI (sólidos). Isso confirma o caráter elementar de I-35, pedra fundamental do último terço do livro I. Sua prova compõe uma das principais etapas do livro I.

Essa proposição enuncia-se da seguinte forma: "Sejam ABCD e EBCF paralelogramos sobre a mesma base BC, e nas mesmas paralelas AF, BC *(ver figura b na pág. 59)*. Digo que o paralelogramo ABCD é igual ao paralelogramo EBCF."

Distinguem-se diferentes elementos em sua demonstração, recorrendo a diversos resultados anteriores:

I-33: para afirmar que, uma vez que ABCD e EBCF são paralelogramos, tem-se: AD = BC e BC = EF;

I-29: para estabelecer a igualdade dos ângulos FDC e EAB, porque as retas AB e CD são paralelas;

I-4: para mostrar que os triângulos EAB e DFC são iguais.

Poderíamos dar seqüência a nosso percurso regressivo buscando os elementos mobilizados nessas proposições. Sem entrar em detalhes, contentemo-nos com uma observação sobre a proposição I-29, que afirma: "Se uma linha reta cai sobre retas paralelas, ela faz (i) ângulos alternos iguais e também (ii) o ângulo exterior igual ao ângulo interior e oposto e (iii) os ângulos interiores e do mesmo lado iguais a dois retos [180°]". É 29(ii) que é utilizado em I-35 para estabelecer nossa igualdade angular; a proposição I-29(i) o é em I-34 para o mesmo gênero de inferência. A proposição I-29 de fato quase equivale ao célebre postulado dito das paralelas *(Demanda nº5 de Euclides, ver figura c da pág. 59)*: "Se uma reta caindo sobre duas retas faz ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, as duas retas, indefinidamente prolongadas, encontram-se do lado onde estão os ângulos menores que dois retos".

Esse postulado intervém na prova de I-29(i) e não é mais que seu contraposto (em uma proposição "se X então Y", seu contraposto é "se não Y, então não X"). Com efeito, supomos que os ângulos alternos, AEF e EFD não são iguais, que AEF é o maior. Então, a soma dos ângulos AEF e BEF (dois retos) será maior que a soma dos ângulos BEF e EFD. Em conseqüência, segundo o postulado das paralelas, as retas AB e CD se reencontrarão. Mas na hipótese de I-29 elas são paralelas.

É provável que Euclides tenha escolhido sua formulação – bem mais complexa – do postulado das paralelas tendo em vista sua utilização na demonstração de I-29. É esse, aliás, o primeiro uso: as 28 primeiras proposições do livro I não dependem do que por vezes se denomina geometria "absoluta", mas pertencem a ela. Se Euclides tivesse escolhido uma formulação mais simples ("por um ponto não situado em uma reta passa uma paralela, e uma só, a essa reta"), não é certo que tantos geômetras, desde a Antigüidade, tenham tentado demonstrar essa asserção que, como sua contraposta I-29(i), para eles assumia a feição de um teorema.

EUCLIDES, em gravura de 1661

Mas voltemos à proposição I-35. Outros ingredientes intervêm em sua prova *(ver a figura b na pág. 59)*: Euclides parte da igualdade das duas retas AD, EF a uma mesma terceira, BC, para delas deduzir que são iguais entre si. Essa transitividade é posta na Noção Comum 1: "As coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si".

Acrescentando DE a cada uma delas, deduz-se que AE = DF. Essa compatibilidade da igualdade com a adjunção é posta na Noção Comum 2: "E se, as coisas iguais são acrescentadas coisas iguais, os todos são iguais".

Tendo estabelecido (por I-4) que os triângulos ABE e DCF são iguais, ele cerceia sua porção comum – o triângulo DGE – e daí deduz a igualdade dos quadriláteros ADGB, EGCF. Essa compatibilidade da igualdade com o cerceamento é posicionada na Noção Comum 3: "E se, a partir de coisas iguais, coisas iguais são cerceadas, os restos são iguais".

Enfim, para chegar à igualdade buscada dos paralelogramos ABCD e EBCF, ele acrescenta o triângulo BGC a cada um dos quadriláteros. Utilizou então, ainda uma vez, a compatibilidade com a adjunção posicionada na Noção Comum 2, não mais para linhas, mas desta feita para áreas.

Assim, a proposição I-35 requer as três Noções Comuns (ou axiomas) que governam as manipulações da relação de igualdade. Vimos que a prova utilizava também o postulado das paralelas. Ela pressupõe então os principais princípios (postulados e axiomas) do livro I de Euclides.

O desdobramento de todas essas sutilezas lógicas pode parecer uma inutilidade. As equivalências em área que fazem o objeto das proposições I-35 e I-41 são triviais se recordarmos as fórmulas de cálculo que aprendemos na escola: 1) A superfície de um paralelogramo é o produto de sua base por sua altura. 2) A superfície de um triângulo é a metade desse produto.

Concordo, mas como justificar essas fórmulas? Para a segunda, é fácil: basta mostrar que um triângulo é a metade de um paralelogramo de mesmas base e altura. Ora, é o que Euclides demonstra na segunda parte de I-34. Quanto à primeira igualdade, ela é "evidente" para um retângulo; basta então entendê-la no caso de quaisquer paralelogramos. De qualquer modo, é o que está estabelecido em I-35 e I-36, uma vez que essas proposições permitem afirmar que todo paralelogramo é igual a um retângulo de mesmas base e altura. Portanto, pode-se ler essa passagem dos *Elementos* como uma fundação teórica dos procedimentos do cálculo das áreas planas mais elementares, paralelogramos e triângulos.

A tabuleta cuneiforme Plimpton 322 (segundo milênio antes de nossa era) comporta três colunas de números em notação sexagesimal e uma numeração das entradas de 1 a 15. Os números recontados são da forma $[(b/a)^2, b, c]$ onde (a, b, c) são inteiros verificando a igualdade $a^2+b^2=c^2$. Por que razão se teria realizado tal tabela? Ela implica um conhecimento do teorema da hipotenusa (isto é, uma interpretação geométrica)? Uma coisa é certa: as técnicas matemáticas dos sábios babilônios, muito antes das dos gregos, não eram relegadas a simples aplicações práticas. *(BV)* SA

Construir e *comparar*

Para os platônicos, a geometria do espaço culmina com o estudo dos cinco poliedros regulares, aos quais Euclides dedica o último livro dos seus Elementos

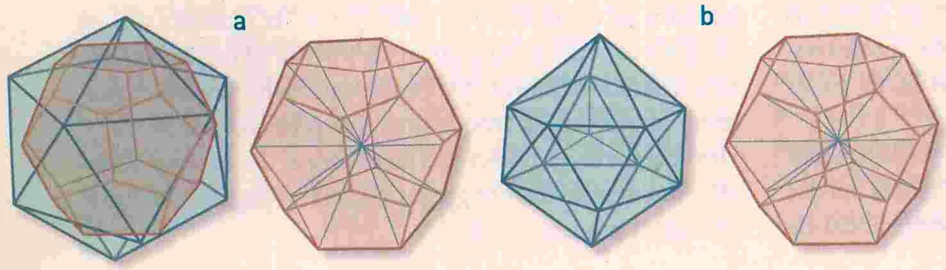
Não sabemos nada a respeito dos anos de formação de Euclides, e há fortes razões para crer que o mesmo se pode dizer de seus comentaristas da Antigüidade tardia. Mas, Proclo de Constantinopla (morto em 485) não hesita em afirmar, ao redigir seu comentário ao livro primeiro dos *Elementos*, que Euclides era platônico. A obra termina com a construção de figuras "platônicas", e isso lhe basta.

Devemos reconhecer que Proclo tem razão em um ponto: há certamente uma ligação entre Platão e Euclides, mais precisamente entre a cosmologia platônica e o final do livro XIII dos *Elementos*. Em seu diálogo *Timeu*, composto entre os anos 360 e 355 a.C., Platão descreve o demiurgo que construiu o corpo do mundo. A cada um dos quatro elementos fundamentais que compõem o mundo (fogo, ar, água e terra), o demiurgo associou um sólido regular: tetraedro para o fogo, octaedro para o ar, icosaedro para a água e cubo para a terra. Platão acrescenta que o demiurgo utilizou uma quinta figura para "representar o Universo em seu conjunto". Trata-se do dodecaedro, que Platão não nomeia. Em suas proposições XIII-13 a XIII-17, Euclides constrói (e circunscreve com uma esfera) todos esses sólidos. Na última proposição do tratado (XIII-18), compara o comprimento das arestas das cinco figuras. Eis a ligação entre os dois. A denominação tradicional de "figuras platônicas", que os cinco poliedros receberam, deve-se à grande fama que obtiveram Platão e seu *Timeu*.

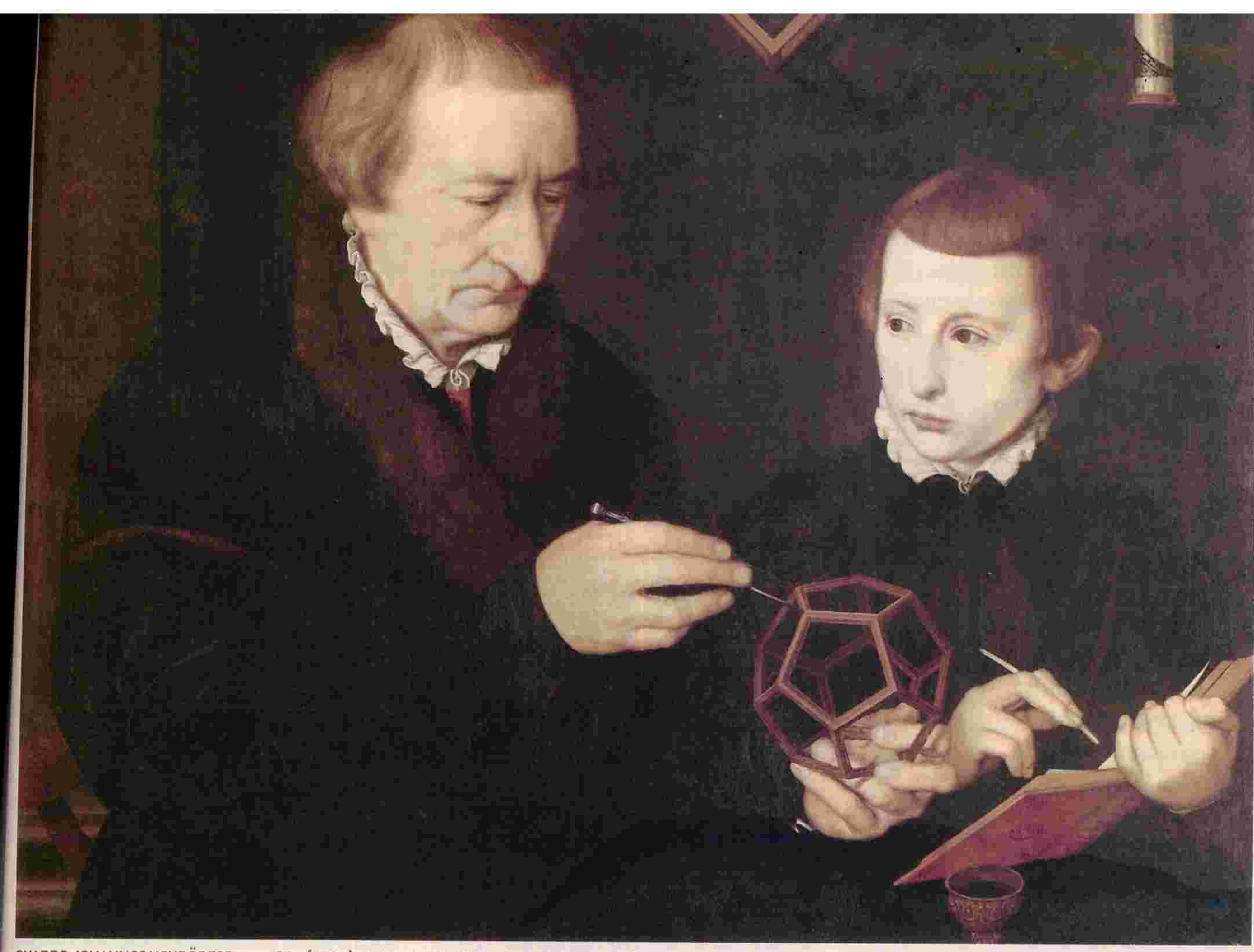
Contudo, a dedução feita por Proclo a respeito da filiação filosófica de Euclides é incerta por dois motivos. O primeiro é que independentemente de quaisquer conotações filosóficas, os cinco sólidos regulares possuem um interesse evidente para todos os geômetras. Como o próprio Proclo afirma, esses poliedros exibem uma propriedade notável: ao passo que é possível inscrever, dentro de uma circunferência, uma infinidade de polígonos eqüiângulos e eqüiláteros, não existem senão cinco sólidos regulares inscritíveis em uma esfera. Ela, ao contrário da circunferência, não se deixa dividir de infinitas maneiras em porções iguais, mas somente de cinco maneiras. No entanto, a esfera é o análogo tridimensional da circunferência.

O segundo é que Proclo já havia mencionado os poliedros regulares ao descrever a genealogia dos *Elementos*. Ele afirmara: "Pitágoras transformou o estudo da geometria em um esquema de educação liberal; (...) foi ele quem descobriu o estudo dos irracionais e a construção das figuras cósmicas [os cinco sólidos regulares]". Mas se Pitágoras havia descoberto a construção dos cinco sólidos regulares, Euclides não seria platônico, mas pitagórico.

De fato, a afirmação relativa a Pitágoras, que Proclo reproduz de Iâmblico, pertence à tradição dos pais fundadores. Seu objetivo é duplo: a atribuição de um "esquema de educação liberal" a Pitágoras visa associá-lo à formulação do sistema quadripartito de descrição das ciências ma-



a) Dodecaedro inscrito em um icosaedro, e vice-versa. *b*) A relação entre a superfície dos dois inscritos em uma mesma esfera é a mesma que entre seus volumes. Para mostrar isso, decompomos cada um dos sólidos em pirâmides (20 para o icosaedro, 12 para o dodecaedro). O volume de uma pirâmide é $Ah/3$, h é a altura e A, a área da base. A mesma circunferência circunscreve as faces do icosaedro e do dodecaedro; portanto, as pirâmides dos dois sólidos possuem a mesma altura h. Assim, o volume do icosaedro é $V_{20} = A_{20}h/3 \times 20$, e o do dodecaedro é $V_{12} = A_{12}h/3 \times 12$, em que A_i, a área de uma face do sólido com i faces, é igual à superfície total do sólido (S_i) dividida por i. Assim, as razões S_{12}/S_{20} e V_{12}/V_{20} são iguais.



GERMANISCHES NATIONALMUSEUM, NUREMBERGUE/BRIDGEMAN

QUADRO *JOHANNES NEUDÖRFER e seu filho* (1561), de Nicolas Neufchatel, mostra o matemático dando uma aula sobre os poliedros regulares. Em sua mão esquerda, um dodecaedro

temáticas (o "quadrivium"), elaborado no começo do século IV a.C.; e as supostas contribuições de Pitágoras ao estudo dos irracionais e dos poliedros regulares são introduzidas para sugerir que grande parte dos *Elementos*, especialmente os resultados presentes nos livros X e XIII, já haviam sido esboçadas pelo filósofo.

Pitágoras ou Teeteto?

Deve-se procurar a motivação para esse tipo de fabulação não mais na história da geometria, mas da filosofia. Diversos autores da Antigüidade tardia tentaram mostrar que Platão seria, na verdade, um (fiel) discípulo de Pitágoras. Já na época helenística, alguns autores, menos generosos, afirmavam que o mestre da Academia era um plagiário, e que havia baseado seu célebre *Timeu* na obra intitulada *De la nature*, do pitagórico Filolau. Essas extravagantes afirmações apoiavam-se em um fato: o personagem principal do diálogo escrito por Platão é um certo Timeu de Locres, apresentado como sábio da Magna Grécia. Nada sabemos a respeito dele, nem mesmo se se trata de um pitagórico do século V a.C. (a cena ocorreria em algum momento entre os anos de 430-420) ou de um simples personagem literário criado por Platão. Mas um bom número de autores antigos acreditou que a cosmologia platônica não passaria de uma retomada de antigas doutrinas pitagóricas. Um falsário da época helenística chegou mesmo a redigir um tratado, *Sobre a natureza do Cosmos e da alma*, atribuído a esse Timeu de Locres, e que era simplesmente um resumo do diálogo de Platão. Muitos, entre os quais Iâmblico, não perceberam a fraude.

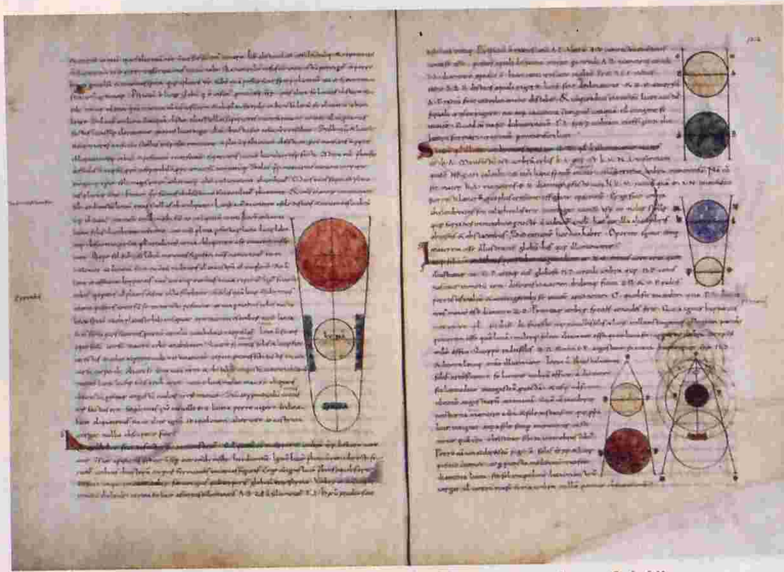
Jamais saberemos ao certo o contexto das primeiras investigações sobre os sólidos geométricos. Alguns testemunhos, no entanto, ainda que somente um pouco mais confiáveis, indicam quem teria lançado o programa de estudo dos poliedros. Trata-se de Teeteto de Atenas (morto em 369), amigo de Platão e discípulo de Teodoro. Costuma-se apresentá-lo como a primeira pessoa a escrever um tratado consagrado às cinco figuras sólidas regulares. Essa obra está perdida, mas foi sem dúvida uma das fontes matemáticas exploradas no *Timeu*, ainda que Teeteto não seja explicitamente citado nesse diálogo de Platão.

Alguns historiadores acreditam que o trabalho de Teeteto foi retomado também por Euclides, e que constitui a essência do livro XIII dos *Elementos*. Isso de fato é possível, embora seja difícil confirmar. Existem diferentes maneiras de tratar os poliedros. Mesmo se considerarmos somente o problema de sua construção, pode-se conceber no mínimo duas abordagens: 1. Constroem-se sucessivamente cada uma das cinco figuras, para depois mostrar como elas podem ser circunscritas por uma esfera. Esse é o procedimento do livro XIII. 2. Toma-se uma esfera e determinam-se, sobre sua superfície, os pontos que fornecem os vértices de cada poliedro. Tal é a via seguida por Pappus, no livro III de sua *Coleção* matemática.

Do ponto de vista técnico, as duas opções revelam-se bastante diferentes – basta comparar a construção dos mesmos poliedros por Euclides e Pappus. Mesmo se admitirmos, hipoteticamente, que Platão inspirou-se em Teeteto, não seria possível determinar a abordagem desse último. O autor do *Timeu* não dá nenhum detalhe relativo à construção dos sólidos. O diálogo mostra que Platão tinha uma idéia a respeito da noção de sólido regular, e sabia que existem somente cinco. Ele descreveu a constituição global desses sólidos (natureza e números de faces e de ângulos sólidos), como uma exposição cosmológica, não um manual de geometria.

Platão preferiu enfatizar o tratamento dessas figuras como elementos simples, a partir dos quais elaborou modelos geométricos. Platão acreditava que elas permitem explicar certas transformações físicas elementares *(ver quadro na pág. 67)*.

A influência do *Timeu*, de seus comentadores, mas também de seus críticos, como Aristóteles, foi formidável, comparável à influência dos *Elementos*: foi utilizado como um dos textos fundamentais da escola neoplatônica, na Antigüidade tardia; na Idade Média, autores cristãos compararam sua cosmologia aos escritos do Gênesis, para contrapor Platão a Aristóteles e sua tese "abominável" da eternidade do mundo, contrária às Escrituras. Na Renascença, retoma-se a lição platônica: é necessário procurar regularidades matemáticas para explicar a ordem e a estrutura do mundo. Johannes Kepler, especificamente, concebeu em 1595 um modelo geométrico do Universo a partir dos sólidos platônicos. Tamanho sucesso ajudou, sem dúvida, a manter constante o interesse pela teoria matemática dos sólidos regulares, para bem além do círculo de especialistas.



BIBLIOTECA DO VATICANO

MANUSCRITO DE MEADOS do séc. X de *Timeu*, traduzido e comentado por Calcídio. Proclo, em seu comentário dos *Elementos*, associou Euclides à cultura platônica

Comparação dos Sólidos

Os geômetras não ficaram indiferentes a todo esse entusiasmo, e a teoria dos sólidos regulares tornou-se um clássico, a ponto de modificar o fim dos *Elementos*: Euclides terminou sua obra com a proposição XIII-18, que estabelece que a ordem decrescente das arestas dos cinco sólidos é a mesma ordem segundo a qual Euclides os construiu, nas proposições 13 a 17. Mas os estudiosos insistiram em acrescentar, até a Renascença, novos resultados.

Na verdade, a coisa é um pouco mais complicada, pois o texto de XIII-18 sofreu diversas alterações e interpolações. Uma delas, bem no final da demonstração, especifica, de maneira um tanto quanto inapta, que, afora os cinco sólidos já estudados, não será possível construir nenhum outro poliedro delimitado por figuras planas eqüiláteras e eqüiângulas idênticas (os polígonos regulares). Para que seja assim, é necessário acrescentar uma condição suplementar – a exigência de que os sólidos possam ser inscritos em uma esfera –, tacitamente suposta pelo autor. Ainda que esse teorema de limitação fosse conhecido antes de Euclides, acredita-se que essa porção de texto não seja autêntica.

A segunda interpolação, indiscutivelmente apócrifa, pretende estabelecer a proporção entre os lados a_i das figuras mencionadas em XIII-18, ou seja, determinar sempre que possível as razões a_n / a_m, em que a_i designa a aresta do poliedro regular com i faces (supõe-se que todos os poliedros estejam inscritos em uma mesma esfera). Em notação moderna, eis o que enuncia o autor:

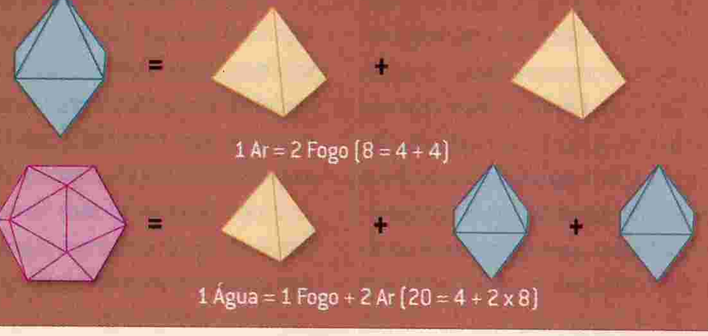
$$(a_4)^2 = 2(a_6)^2;\ (a_4)^2 = 4/3\,(a_8)^2;\ (a_8)^2 = 3/2(a_6)^2$$

Para a_{20} e a_{12}, ele se contenta em lembrar que se trata de segmentos irracionais no sentido euclidiano (fato esse demonstrado em XIII-16 e XIII-17): as proporções $(a_{20})^2/(a_{12})^2$, $(a_{20})^2/(a_4)^2$, $(a_{12})^2/(a_4)^2$, ... não podem ser escritas na forma de fração. As cinco figuras repartem-se em duas famílias: três sólidos "simples" (tetraedro, cubo e octaedro) e dois mais complexos, o icosaedro e o dodecaedro. Essa distinção, de resto, poderia ser percebida desde a construção das figuras. Por outro lado, a própria interpolação necessita ser complementada, mesmo se limitada apenas aos três poliedros "simples".

Assim, pode-se deduzir, a partir da igualdade $(a_4)^2 = 4/3\,(a_8)^2$, que as áreas dos triângulos eqüiláteros que formam, respectivamente, as faces do tetraedro e do octaedro também se encontra em proporção de 3 para 4. Multiplicando-se pelo respectivo número de faces (4 e 8), obtém-se que as áreas do tetraedro e do octaedro (inscritos em uma mesma esfera) estão na proporção de 2 para 3. Então, por que não comparar os sólidos regulares por áreas e volumes, e não só pelas arestas?

Platão e os poliedros

Platão utiliza a associação entre elementos e poliedros regulares para explicar – por meio da decomposição e recomposição das figuras sólidas a partir de suas faces – as transformações mútuas de três dos quatro elementos (fogo, ar e água) observáveis no mundo físico. De fato, os correspondentes sólidos, por serem todos compostos de triângulos eqüiláteros, prestam-se particularmente bem a essas operações. O elemento terra, representado por um cubo, escapa às transmutações.



O caso do icosaedro e do dodecaedro, devido à aparição de proporções quadráticas irracionais, é ainda mais estimulante. Hipsiclo de Alexandria (século II a.C.) informa-nos que o matemático Aristeu chegou a compor um texto intitulado *Sobre a comparação das cinco figuras*, infelizmente perdido. Seu autor, sem dúvida, era um predecessor imediato ou um contemporâneo de Euclides, portanto posterior a Teeteto. A única informação precisa diz que seu estudo continha o seguinte belo resultado: "Uma mesma circunferência circunscreve o pentágono do dodecaedro e o triângulo do icosaedro, que estejam inscritos em uma mesma esfera". Por decomposição em tetraedros, deduz-se daí que a relação entre as superfícies do dodecaedro e do icosaedro é igual à relação entre seus volumes *(ver figura na pág. 64)*.

Hipsiclo observa que Apolônio de Perga, autor das *Cônicas*, havia demonstrado esse resultado em um tratado dedicado à comparação dos dois sólidos complexos. Deve-se a ele a determinação da relação em termos de segmentos de reta: a proporção entre a área (ou volume) do dodecaedro e do icosaedro é igual à proporção entre a aresta do cubo e a do icosaedro. Temos: $S_{12}/S_{20} = V_{12}/V_{20} = a_6/a_{20}$.

Hipsiclo, por sua vez, retomou a mesma comparação e propôs uma nova descrição, em termos de divisão em razão média e extrema (*ver quadro na pág. 68*). No início, seu tratado aparecia de maneira independente. Depois, em alguns manuscritos gregos, foi copiado na seqüência dos *Elementos*, e tornou-se aquilo que se costuma chamar de livro XIV.

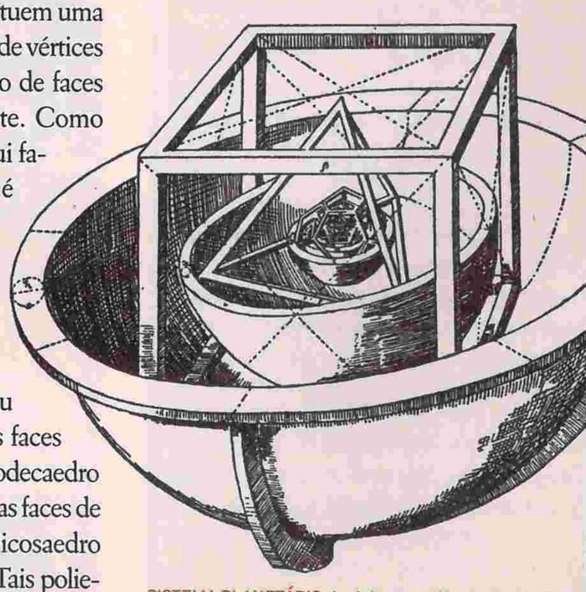
A história do final dos *Elementos* não termina por aí. Com efeito, existem outras maneiras de tornar evidente o fato de que os cinco sólidos regulares constituem uma família. Por exemplo, o número de vértices do icosaedro é igual ao número de faces do dodecaedro, e inversamente. Como cada um desses poliedros possui faces iguais, o centro dessas faces é eqüidistante do centro da esfera que os circunscreve. Portanto, eles ficam situados sobre a superfície da esfera inscrita dentro de cada poliedro, a qual dividem em porções iguais. Ou seja: se ligarmos os centros das faces de um icosaedro, obtemos um dodecaedro inscrito; se ligarmos os centros das faces de um dodecaedro, obtemos um icosaedro inscrito (*ver figura na pág. 64*). Tais poliedros apresentam uma relação de dualidade. O mesmo acontece com o cubo e o octaedro. Já o tetraedro é seu próprio dual.

Sem usar o nome "dual", os antigos interessaram-se por essas relações de inscrição e circunscrição entre os sólidos regulares. Alguns exemplos podem ser encontrados na primeira parte de um tratado composto na Antigüidade tardia, em meio a considerações a respeito dos poliedros e seus ângulos sólidos. Esse texto, anônimo, tornou-se o livro XV dos *Elementos*. É possível seguir essa história para além da Antigüidade. Autores árabes e depois os da Renascença acrescentaram resultados fascinantes a respeito dessas figuras ao final de suas próprias versões de *Elementos*.

Oposições e Regularidade

Em diversas ocasiões, os gregos privilegiaram o raciocínio por oposições. Aristóteles já indicava uma tábua de opostos, na qual dez pares aparecem, tais como limitado/ilimitado, ímpar/par, um/múltiplo, luz/escuridão. Mais tarde, outras listas incluíram oposições como igual/desigual, exprimível/inexprimível, semelhante/diferente, ordenado/desordenado etc.

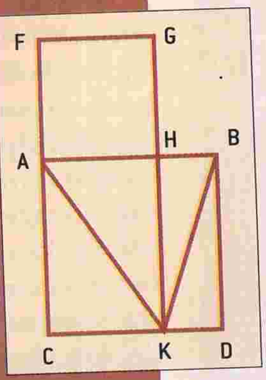
Em cada par, um dos termos é "bom", o outro é "ruim", e há exemplos matemáticos para vários deles. Mas que dizer a respeito da regularidade? De maneira ingênua, pode-se pensar que ela se opõe à



MYSTERIUM COSMIGRAPHICUM, 1596

SISTEMA PLANETÁRIO de Johannes Kepler baseado nos cinco sólidos platônicos

Divina proporção



No século II a.C., Hipsiclo enunciou uma proposição bastante complicada. Sua interpretação geométrica, contudo, é simples, uma vez que se compreenda a terminologia usada: "Uma reta [segmento de reta] qualquer, se está dividida em razão média e extrema, então a proporção da reta que pode produzir o quadrado da reta inteira, mais aquele do segmento maior relativamente à reta que pode produzir o quadrado da reta inteira, mais aquele sobre o segmento menor, é a mesma proporção da aresta do cubo relativamente à aresta do icosaedro".

Dizer que uma reta AB está dividida em razão média e extrema pelo ponto H significa que a razão entre os segmentos AH e HB é igual à razão entre a reta inteira e o segmento maior, AB/AH. Assim, $AB.HB = AH^2$, de maneira que o retângulo BDKH é igual ao quadrado AFGH.

Na Renascença, essa proporção recebeu o nome de "razão áurea". Considerava-se que ela possuía virtudes estéticas e metafísicas. Mais tarde, essa razão foi identificada a um número real (irracional), que recebeu o nome de "áureo" e que pode ser escrito como $(1+\sqrt{5})/2$.

Dizer que uma reta D "pode produzir" a área A significa que o quadrado construído sobre D tem área A. Na figura, devido ao teorema da hipotenusa, temos: $AK^2 = AC^2 + CK^2$, em que CK = AH é o segmento maior e AC = AB. Assim, AK é a reta que pode produzir o quadrado da reta inteira AB mais aquele do segmento maior AH.

De igual maneira, KB é a reta que pode produzir o quadrado da reta inteira AB mais aquele do segmento HB (pois $BK^2 = KH^2 + HB^2$ e KH = AB). Hipsiclo demonstrou que a razão entre a aresta do cubo e a aresta do icosaedro inscritos em uma mesma esfera é igual à razão AK/KB.

Essa proposição completava um dos resultados dos *Elementos* (XIII-17), segundo o qual, ao dividir a aresta de um cubo em razão média e extrema, o segmento maior é igual à aresta do dodecaedro inscrito na mesma esfera que o cubo. Na figura acima, a proporção entre a aresta do cubo e do dodecaedro inscritos na mesma esfera é igual à proporção AH/HB. A divisão em razão média e extrema aparece na construção do pentágono regular, e na construção dos dois sólidos regulares complexos, o icosaedro e o dodecaedro. Diversas proposições dos livros XIII e XIV são dedicadas a essa proporção.

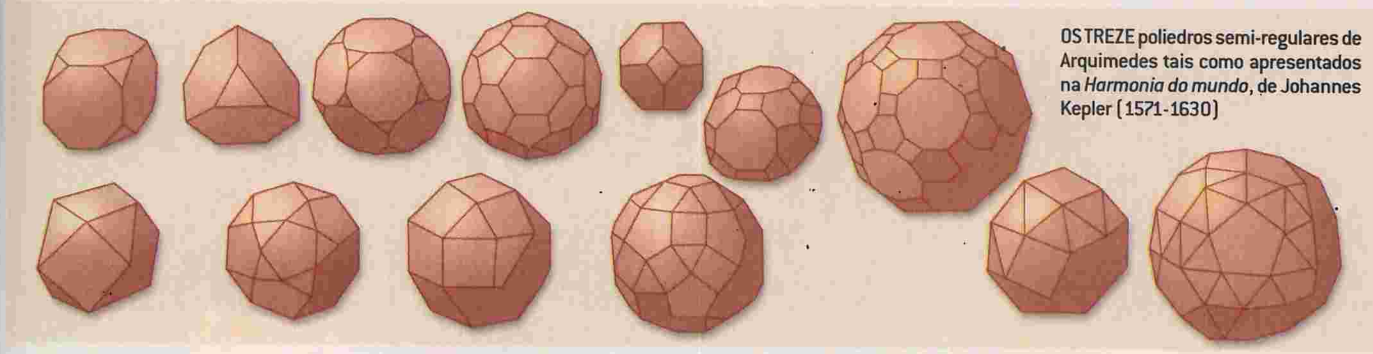
irregularidade. Será possível, no entanto, conferir status matemático a essa oposição, particularmente no que diz respeito às figuras geométricas? Qual e por quê? Duas ordens de consideração tiveram papel nessa discussão.

A primeira reside na descoberta de outra família, composta por 13 sólidos delimitados por faces eqüiláteras e eqüiângulas, mas não necessariamente todas do mesmo tipo (as faces que são de um mesmo tipo, porém, devem ser iguais). Isso significa que também esses sólidos são inscritíveis em uma esfera. O cuboctaedro, por exemplo, é composto por oito triângulos eqüiláteros e seis quadrados (*ver figura na pág 69*). Atualmente, tais poliedros são classificados como "semi-regulares". Os raros estudiosos antigos que falam a seu respeito designam-nos simplesmente pelo nome de seu inventor: Arquimedes. Surge assim uma oposição entre duas famílias. De um lado, os 5 sólidos de Platão; do outro, os 13 de Arquimedes. Os primeiros foram explicitamente qualificados de "regulares" (a palavra utilizada pelos gregos, *tetagmena*, significa "ordenados") porque os de Arquimedes são não-homogêneos (suas faces, e portanto seus ângulos sólidos, não são idênticos). A descoberta de Arquimedes forçou os estudiosos da época a especificar exatamente o que caracterizava as cinco figuras platônicas, e a distinguir, senão os graus, ao menos o máximo da regularidade.

A outra fonte de interesse pelas figuras regulares nasceu dos trabalhos do geômetra Zenodoro. Sabemos que ele redigiu um tratado intitulado *Sobre as figuras isoperimétricas*, que continha (entre outras coisas) dois resultados bastante sugestivos: 1. Entre dois polígonos isoperimétricos (isto é, de igual perímetro) regulares, aquele que possui mais lados é maior (em área). 2. Entre dois polígonos isoperimétricos com o mesmo número de lados, se um é regular e o outro não, o regular possui a maior área. 3.Ele deduziu daí um terceiro resultado: entre todas as figuras planas com um mesmo perímetro, aquela que possui a maior superfície é o círculo.

O resultado 2 justifica o interesse pelas figuras regulares com base em critérios puramente matemáticos. O resultado 3 foi

FUNDAMENTANDO-SE EM suas observações, Ptolomeu afirma, no início do *Almagesto*, que o Cosmos é esférico. Gravura do livro *Claudio Tolomeo, principe degli astrologi e della geografia*, de Giordano Ziletti, 1564



OS TREZE poliedros semi-regulares de Arquimedes tais como apresentados na *Harmonia do mundo*, de Johannes Kepler (1571-1630)

estendido aos sólidos (figuras tridimensionais) por analogia, tanto por Zenodoro como por seus sucessores, gerando um quarto: entre todas as figuras sólidas com uma mesma superfície, aquela que possui o maior volume é a esfera.

Fundamentar de maneira rigorosa a propriedade maximal da esfera estava certamente fora do alcance dos antigos. De toda maneira, eles compararam o volume dos sólidos regulares entre si, e depois com o volume da esfera (considerando sempre figuras de mesma superfície). Pappus reuniu esses trabalhos na última parte do livro V de sua *Coleção*. A questão, provavelmente, já havia sido abordada nos tratados de Aristeu ou Zenodoro. A menos que vejamos aí uma (outra) contribuição de Arquimedes. Seja como for, o resultado obtido para esses sólidos é o mesmo que para as figuras planas. Entre as figuras ditas platônicas com uma mesma superfície, a ordem crescente dos volumes é a mesma do número de faces: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. A partir daí, por extrapolação, conclui-se pela propriedade maximal da esfera.

Cosmos Perfeito

Uma razão em particular permitiu que conhecêssemos esses trabalhos em tantos detalhes. A partir do *Timeu* de Platão, e mesmo antes, atribuiu-se ao Cosmos uma forma esférica. Alguns argumentos apareceram para justificar essa tese. Trata-se, essencialmente, de argumentos de conveniência: o Cosmos seria esférico porque essa é a forma que lhe convém. Por exemplo: "Ao Ser mais perfeito, o Cosmos, corresponde a figura mais perfeita, a esfera". No preâmbulo do *Almagesto*, obra que reuniu e codificou o conhecimento astronômico dos antigos, Cláudio Ptolomeu (século II d.C.) explicita os princípios cosmológicos que admite. Afirma então que o Cosmos, considerado em seu todo, é esférico. Para justificar essa hipótese, ele oferece diversas explicações astronômicas fundadas em observações e acrescenta certos argumentos de conveniência, entre os quais o "isoperimétrico": como a esfera, entre todos os sólidos com uma mesma superfície, é aquele que contém o maior volume, convém que seja essa a forma do Cosmos, que contém todas as coisas.

Com o objetivo de comentar essa observação de Ptolomeu, seus exegetas, principalmente Pappus e Teão de Alexandria, copiaram porções importantes de trabalhos a respeito das figuras que possuem um mesmo perímetro ou uma mesma área. Esse tema, por sua vez, contribuiu para a manutenção do interesse pelos poliedros. Os geômetras antigos sentiam-se reconfortados com a idéia de que era necessário privilegiar o estudo das figuras regulares (os sólidos platônicos e as principais figuras de revolução: esfera, cone, cilindro etc.). Eles se interessaram pouco pelos sólidos em geral, exceção feita à teoria das proporções, como no livro V dos *Elementos*. Porém, a generalidade era obtida pela abstração da noção de dimensão. *(BV)* SA

A última proposição de Euclides

A última proposição dos *Elementos* (XIII-18) estabelecia que a ordem decrescente das arestas dos sólidos regulares inscritos em uma mesma esfera é:

$$a_4 > a_8 > a_6 > a_{20} > a_{12},$$

em que a_n designa a aresta do poliedro regular com n faces. Eis as principais passagens da demonstração:

- AB (=AG) é o diâmetro da esfera, e C o seu centro. O ponto D de AB é tal que AD = 2DB.
- Une-se CG. H é a intersecção de CG com a esfera, e K a projeção de H sobre AB.
- O ponto L de AB é construído de tal maneira que CL = CK.

Euclides verifica que o segmento CL é maior que CD.

- As intersecções da esfera com as perpendiculares a AB em L, D e C são, respectivamente, M, F e E.
- N é construído sobre BF de tal maneira que BF seja dividida em razão média e extrema *(ver quadro na pág. 68)* por N, com BN como segmento maior.

As proposições XIII-13 a XIII-17 permitem afirmar que AF é a aresta do tetraedro (a_4), BF a aresta do cubo (a_6), BE a aresta do octaedro (a_8), BM a aresta do icosaedro (a_{20}) e BN a aresta do dodecaedro (a_{12}). Tem-se portanto que $a_4 > a_8 > a_6 > a_{20}$, e que $a_6 > a_{12}$.

O resto da demonstração consiste então em provar, com auxílio de relações métricas, a relação: BM > BN ($a_{20} > a_{12}$).