

História da Matemática

AULA 5

NÃO ENTRE SE NÃO SOUBER GEOMETRIA



Inscrição na entrada
do departamento de
Matemática da
Universidade de
Oxford.

De volta aos problemas impossíveis

- ▶ Vimos na aula passada os três problemas geométricos impossíveis de ser solucionados com régua e compasso:

De volta aos problemas impossíveis

- ▶ Vimos na aula passada os três problemas geométricos impossíveis de ser solucionados com régua e compasso:
 1. Duplicação do cubo.
 2. Trissecção do ângulo.
 3. Quadratura do círculo.

De volta aos problemas impossíveis

- O problema da duplicação de um cubo de lado a consiste, na linguagem e metodologia da época, em achar dois segmentos x e y tais que

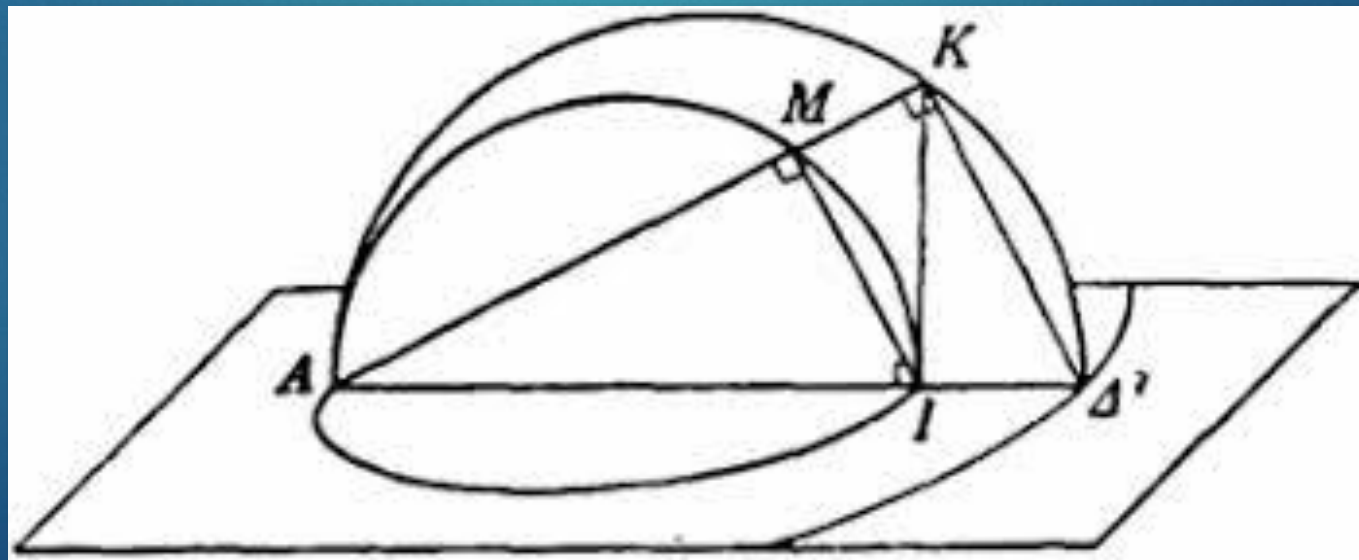
$$2a:x :: x:y :: y:a.$$

Ou em linguagem moderna:

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}.$$

De volta aos problemas impossíveis

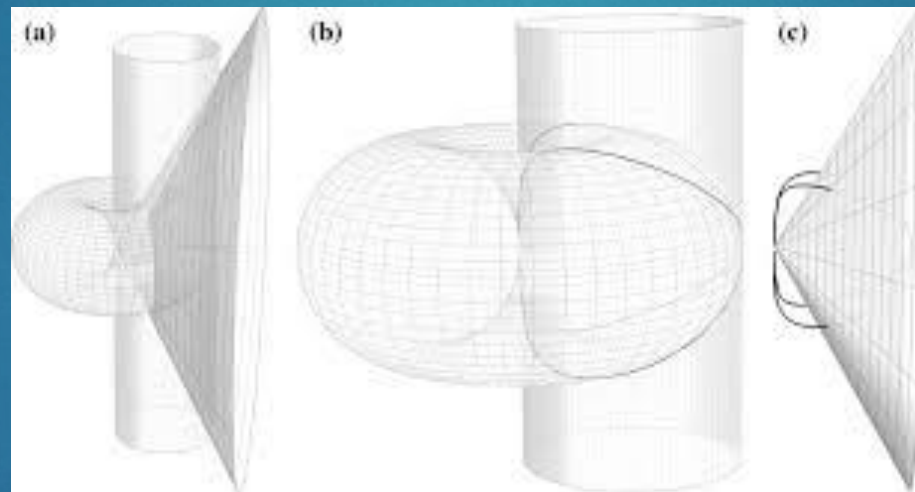
- O problema da duplicação de um cubo de lado a , proporção contínua $\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}$.



De volta aos problemas impossíveis

- O problema da duplicação de um cubo:

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}.$$

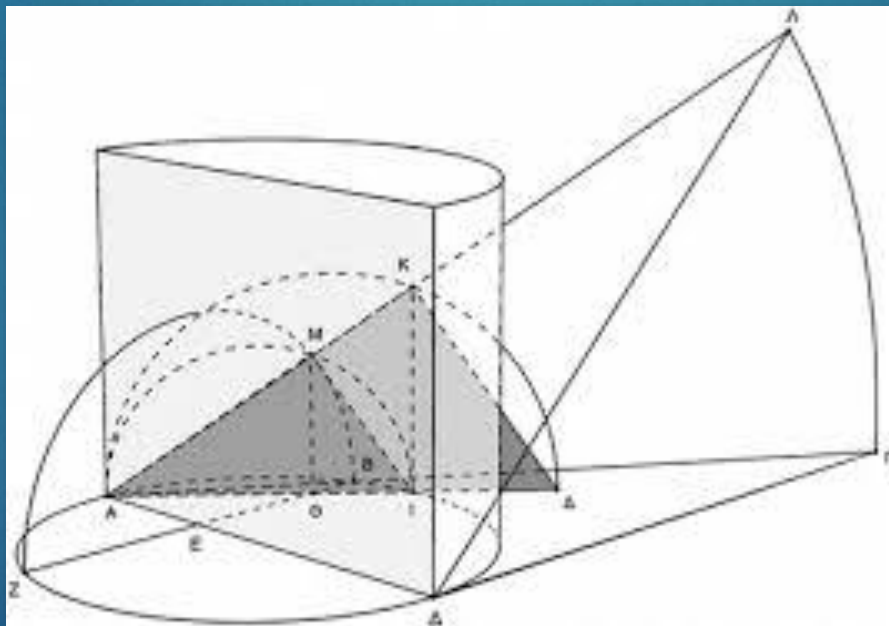


Solução tridimensional de Archytas de Tarento (428-345AEC). Intersecção de um toro, um cilindro e um cone.

De volta aos problemas impossíveis

- O problema da duplicação de um cubo:

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}.$$



Solução tridimensional de Archytas de Tarento (428-345AEC). Intersecção de um toro, um cilindro e um cone.

De volta aos problemas impossíveis

- ▶ O problema da duplicação de um cubo:

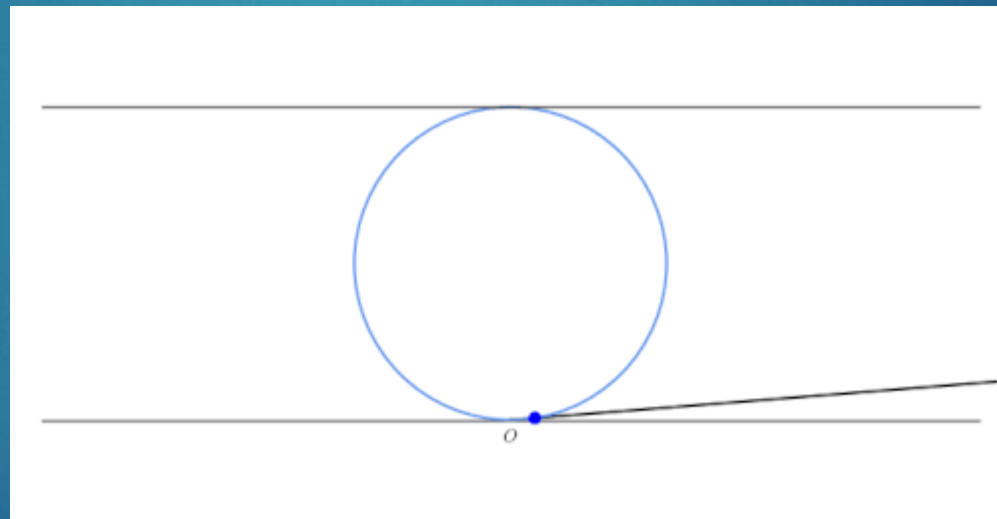
$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}.$$

- ▶ Também dá para duplicar o cubo com o uso de parábolas, cissóides de Diocles (Diócles 240-180 AEC) e conchóides de Nicomedes (Nicomedes 280-210 AEC).

De volta aos problemas impossíveis

► O problema da duplicação de um cubo:

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}.$$

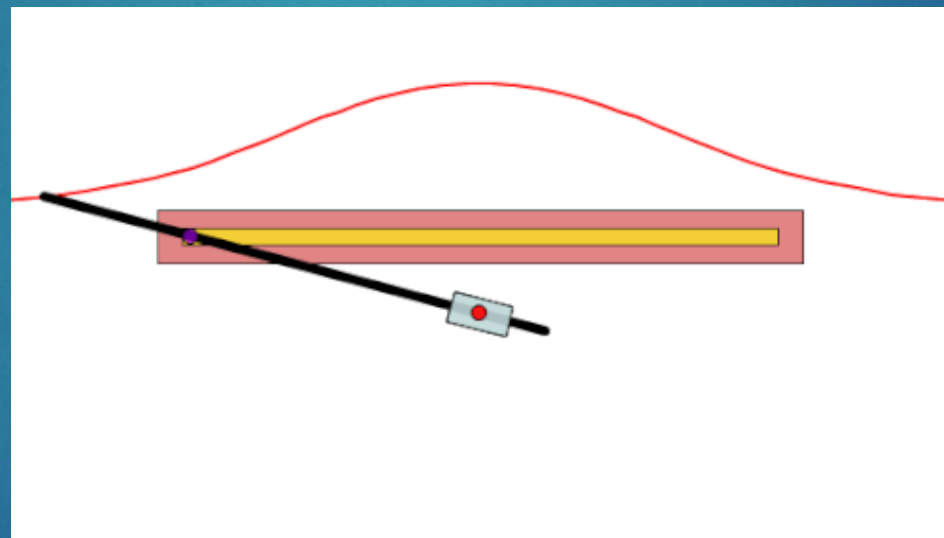


Cissóide de Diocles

De volta aos problemas impossíveis

- O problema da duplicação de um cubo:

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}.$$

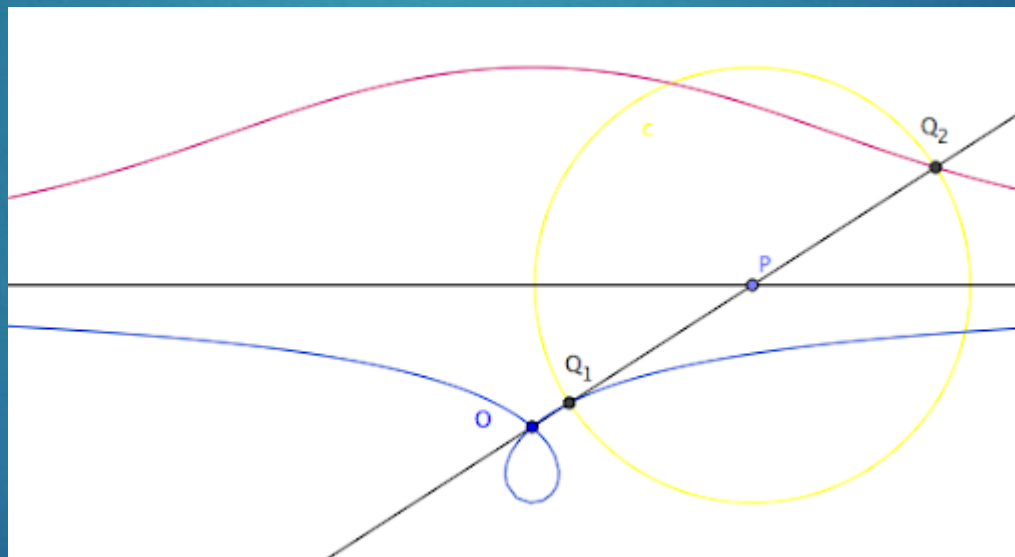


Conchóide de Nicomedes

De volta aos problemas impossíveis

- O problema da duplicação de um cubo:

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}.$$

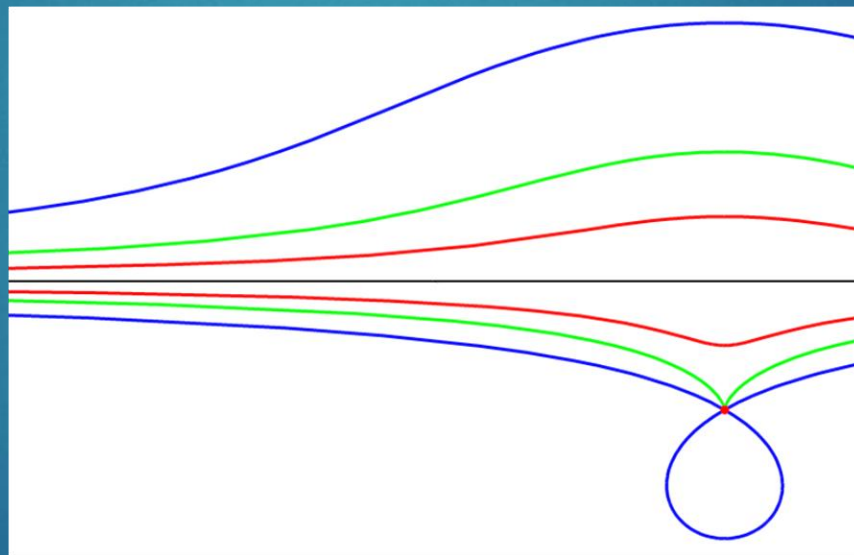


Conchóide de Nicomedes

De volta aos problemas impossíveis

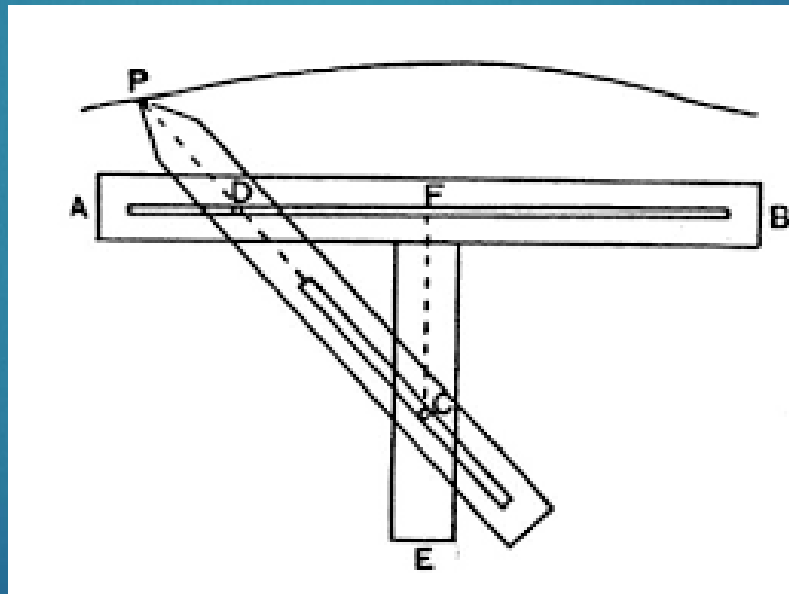
- O problema da duplicação de um cubo:

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}.$$



Conchóide de Nicomedes

De volta aos problemas impossíveis



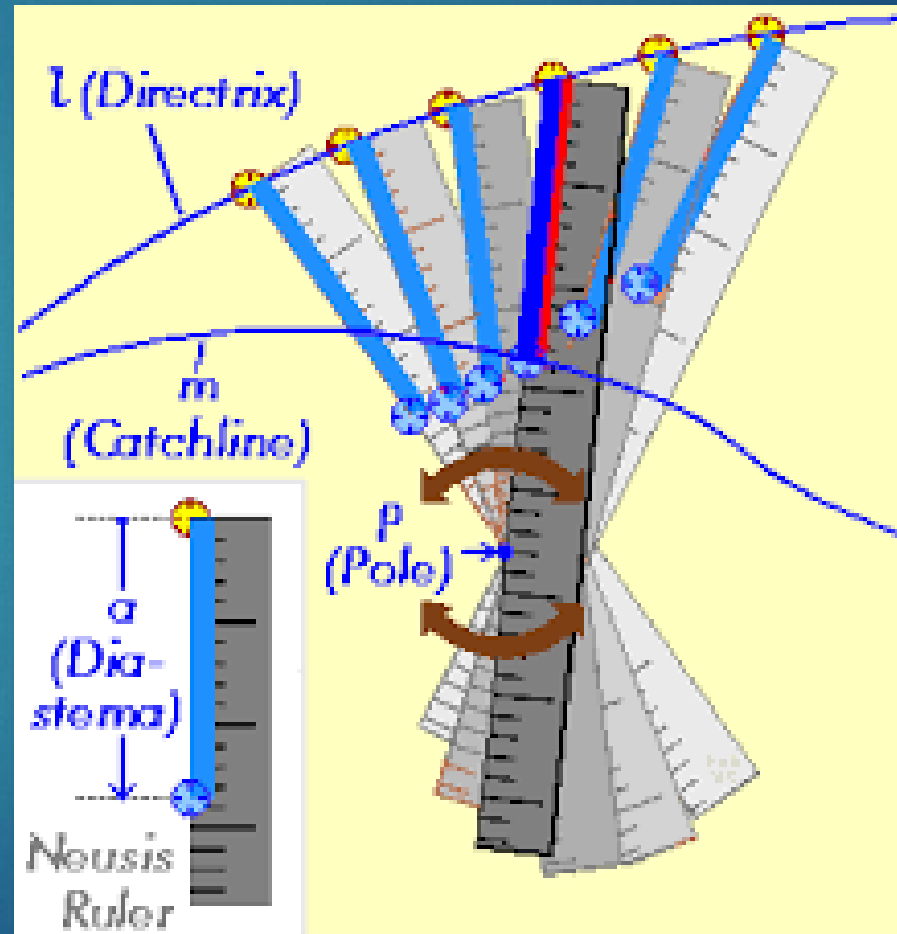
Compasso para Conchóide de Nicomedes

Neusis

- ▶ O termo Neusis (νεῦσις) se refere a um método de construções geométricas que consiste no uso de uma régua com um segmento marcado para ser posicionado entre duas curvas pré determinadas, de tal forma que a reta determina pela régua passe por um ponto dado.

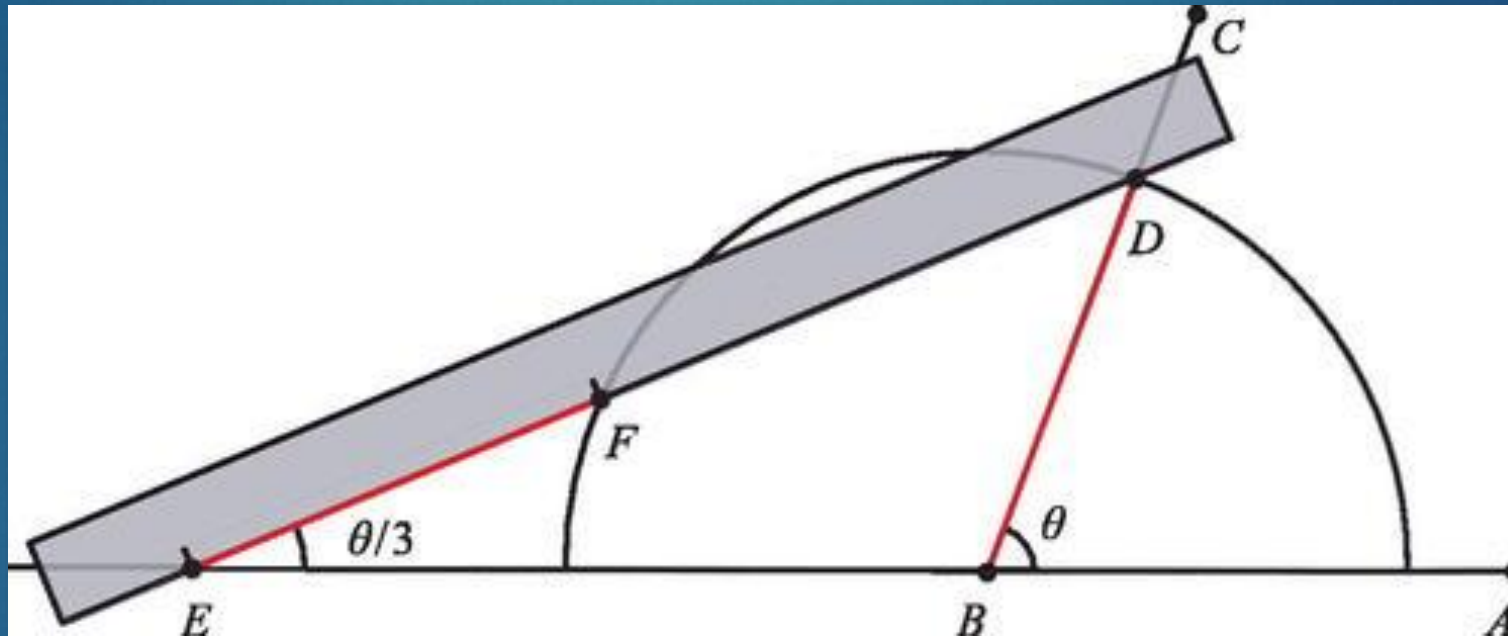
Neusis

► Neusis (νεῦσις)



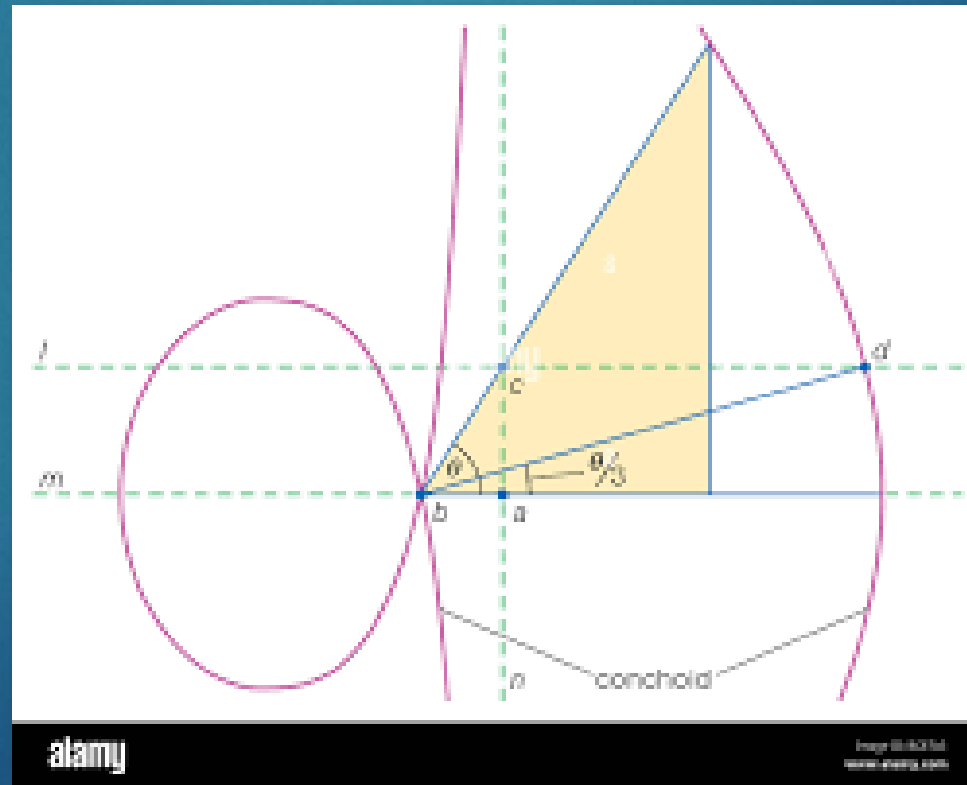
Neusis

- Neusis utilizada para trissecção de ângulos:



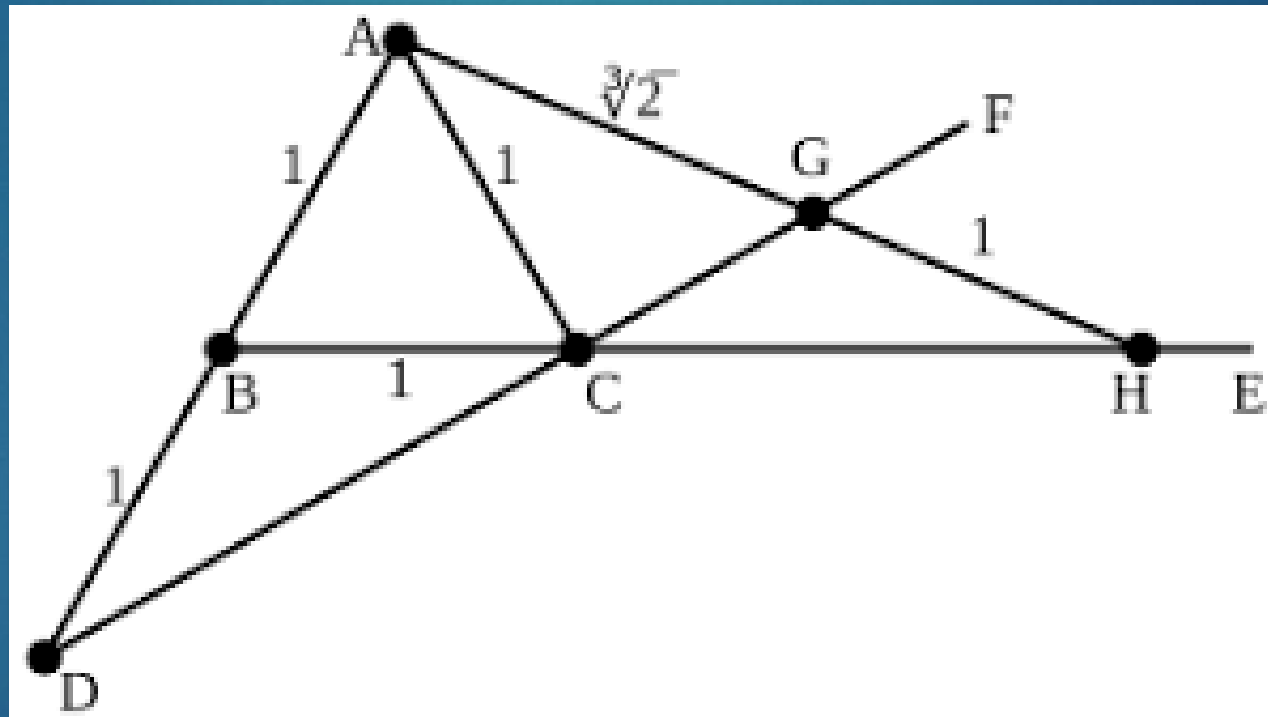
Neusis

- Neusis para trissecção de ângulos a partir do uso de uma conchóide de Nicomedes:



Neusis

- Neusis utilizada para a duplicação do cubo:



Neusis

- ▶ A Neusis não pode ser utilizada para a quadratura do círculo, pois trata-se de uma construção envolvendo uma quantidade transcendente e a Neusis é uma construção algébrica.

De volta aos problemas impossíveis

- ▶ Mas mesmo assim existiam curvas transcendentais para os processos de quadratura do círculo e trissecção de ângulos:

De volta aos problemas impossíveis

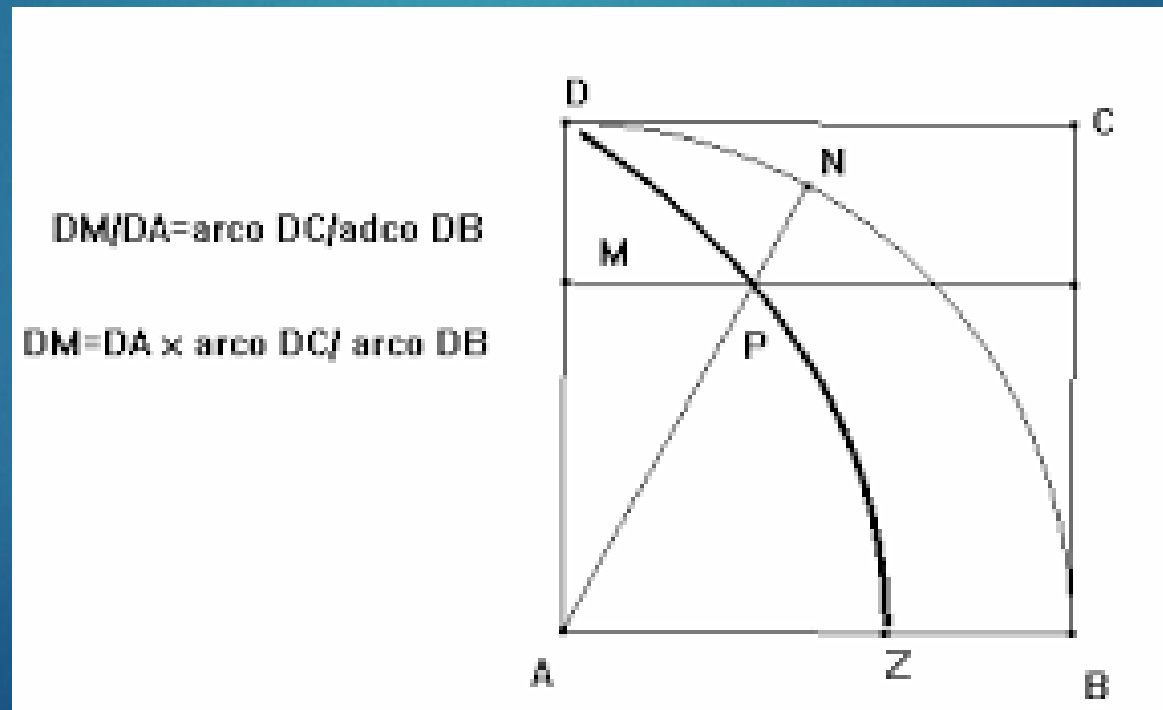
- ▶ Mas mesmo assim existiam curvas transcendentais para os processos de quadratura do círculo e trissecção de ângulos:
- ▶ Trissectriz de Hípias (Hípias de Élis 460-400AEC), também chamada de Quadratriz de Dinóstrato (Dinóstrato 390-320 AEC).

De volta aos problemas impossíveis

- ▶ Mas mesmo assim existiam curvas transcendentais para os processos de quadratura do círculo e trissecção de ângulos:
- ▶ Trissectriz de Hípias (Hípias de Élis 460-400AEC), também chamada de Quadratriz de Dinóstrato (Dinóstrato 390-320 AEC).
- ▶ Espiral de Arquimedes (Arquimedes 287-212 AEC).

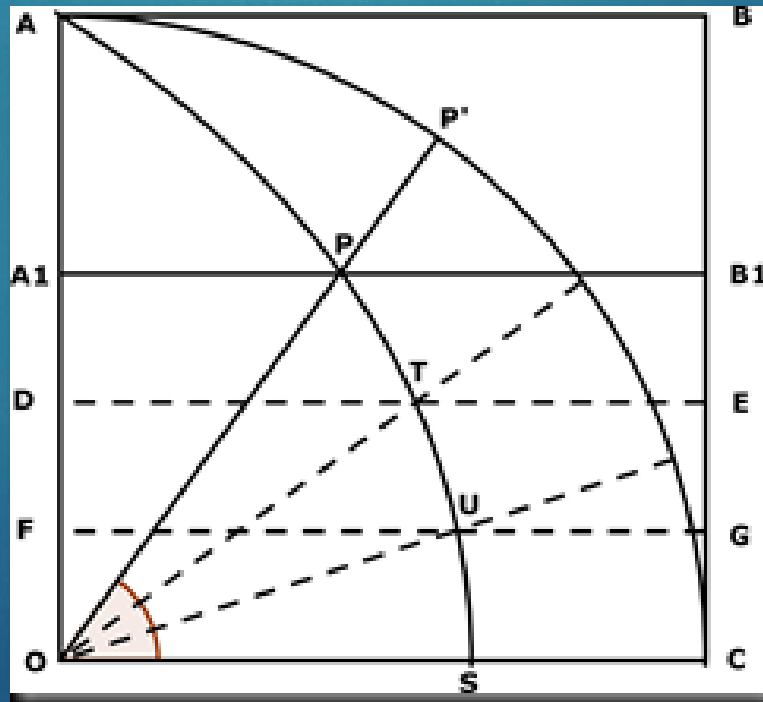
De volta aos problemas impossíveis

- Trissectriz de Hípias ou Quadratriz de Dinóstrato:



De volta aos problemas impossíveis

- Trissectriz de Hípias ou Quadratriz de Dinóstrato:



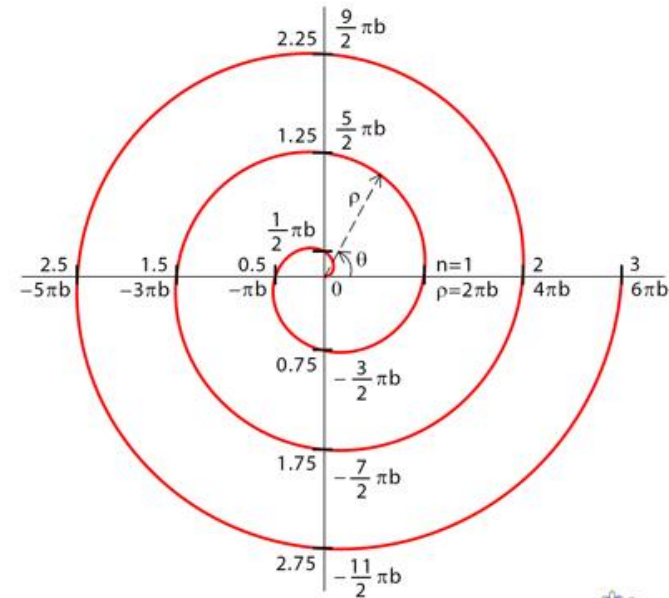
Trissecção de
ângulos

De volta aos problemas impossíveis

► Espiral de Arquimedes:

Archimedean Spiral (with three convolutions)

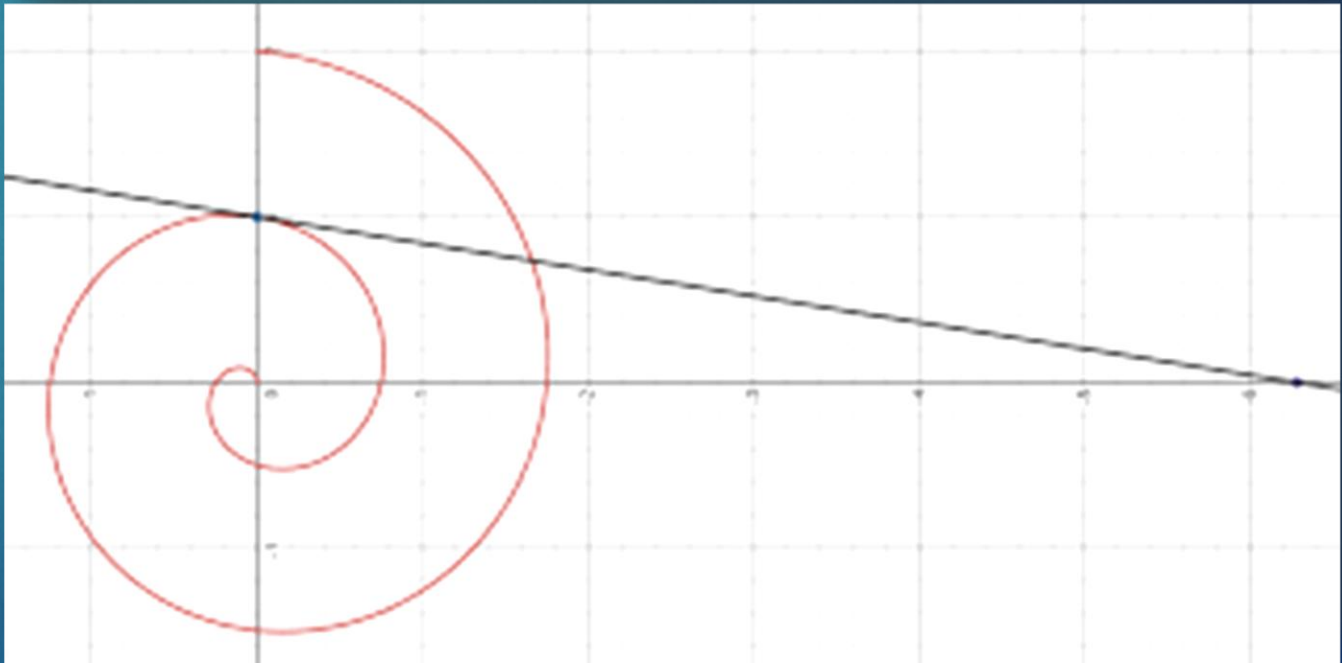
Equation of the spiral: $\rho = b\theta$ Number of convolutions: $n = \frac{\theta}{2\pi}$



De volta aos problemas impossíveis

► Espiral de Arquimedes:

Espiral usada para quadratura do círculo.



Proporções e incomensurabilidade

- ▶ A teoria de grandezas proporcionais é atribuída a Eudoxo de Cnido:

Proporções e incomensurabilidade

- ▶ A teoria de grandezas proporcionais é atribuída a Eudoxo de Cnido:
- ▶ Dizemos que $a:b :: c:d$ se, dados dois números inteiros positivos m, n tivermos
 1. $m.a > n.b \Rightarrow m.c > n.d$;
 2. $m.a = n.b \Rightarrow m.c = n.d$;
 3. $m.a < n.b \Rightarrow m.c < n.d$.

Proporções e incomensurabilidade

- ▶ A teoria de grandezas proporcionais é atribuída a Eudoxo de Cnido:
- ▶ Dizemos que $a:b :: c:d$ se, dados dois números inteiros positivos m, n tivermos

$$1. \quad \frac{a}{b} > \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{n}{m};$$

$$2. \quad \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{n}{m};$$

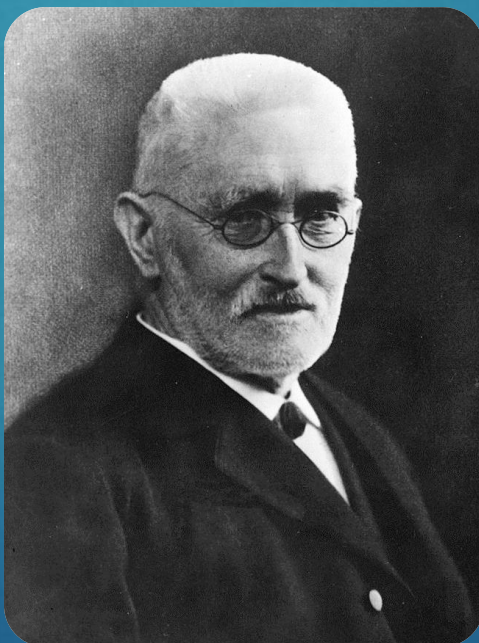
$$3. \quad \frac{a}{b} < \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{c}{d} < \frac{n}{m}.$$

Proporções e incomensurabilidade

- Esta noção de proporcionalidade trás consigo o germe de algo muito moderno: temos que $a:b :: c:d$ se qualquer número racional que for igual/maior/menor que $\frac{a}{b}$ também será igual/maior/menor que $\frac{c}{d}$, isto é, eles definem o mesmo “Corte de Dedekind”, ou seja, o mesmo número real.

Proporções e incomensurabilidade

- ▶ Cortes de Dedekind, se referem a uma construção feita por Richard Dedekind (1831-1916)



Proporções e incomensurabilidade

- ▶ Cortes de Dedekind:
- ▶ Def: Um corte de Dedekind no conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, é um par (A, B) de subconjuntos não vazios de $\mathbb{Q}$ tais que
 1. $A \cup B = \mathbb{Q}$,
 2. $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$.

Proporções e incomensurabilidade

- ▶ Cortes de Dedekind:
- ▶ Teorema: O corpo, ordenado completo dos números reais, $\mathbb{R}$, está em correspondência biunívoca com o conjunto dos Cortes de Dedekind em $\mathbb{Q}$.