

História da Matemática

AULA 6

UMA ESTRADA REAL PARA A GEOMETRIA

Um legado extenso

- ▶ Euclides (Ευκλείδης) nasceu em meados do século IV AC e morreu em meados do século III AC.

Um legado extenso

- ▶ Euclides (Ευκλείδης) nasceu em meados do século IV AC e morreu em meados do século III AC.
- ▶ Pouco se sabe sobre sua origem e datas precisas de nascimento e morte. Tanto que existem estudiosos que questionam a existência do homem Euclides. Relegando-o a um pseudônimo coletivo.

Um legado extenso

- ▶ Euclides (Ευκλείδης) nasceu em meados do século IV AC e morreu em meados do século III AC.
- ▶ Pouco se sabe sobre sua origem e datas precisas de nascimento e morte. Tanto que existem estudiosos que questionam a existência do homem Euclides. Relegando-o a um pseudônimo coletivo.
- ▶ Tudo o que se sabe sobre Euclides vem de comentaristas posteriores, como Pappus de Alexandria (290-350 EC) e Proclus Lycaeus de Constantinopla (412-485 EC).

Um legado extenso

- ▶ Algumas informações mais precisas indicam que Euclides viveu e atuou em Alexandria durante o reinado de Ptolomeu I, Sóter (323 AC – 283 AC).

Um legado extenso

- ▶ Algumas informações mais precisas indicam que Euclides viveu e atuou em Alexandria durante o reinado de Ptolomeu I, Sóter (323 AC – 283 AC).
- ▶ Um momento folclórico associado a Euclides foi quando o rei Ptolomeu I perguntou se havia alguma forma mais fácil de aprender Geometria ao qual Euclides respondeu: “Não existe estrada real para a Geometria”.

Um legado extenso

- ▶ Mesmo sem “Estradas reais para a Geometria”, seu legado para a Matemática é reconhecido pelo estabelecimento do rigor que, por muitos séculos, foi considerado o padrão da escrita formal em Matemática.

Um legado extenso

- ▶ Mesmo sem “Estradas reais para a Geometria”, seu legado para a Matemática é reconhecido pelo estabelecimento do rigor que, por muitos séculos, foi considerado o padrão da escrita formal em Matemática.
- ▶ Este rigor se expandiu para além dos domínios da Geometria, sendo reconhecido também entre autores de outras áreas do conhecimento.

A obra de Euclides

- ▶ Sua obra principal foi “Os Elementos” (Στοιχείον), que é a obra Matemática da antiguidade mais importante, mais lida e mais traduzida para vários idiomas e que modelou a maneira de ensinar e de fazer Matemática por quase dois milênios.

A obra de Euclides

- ▶ Sua obra principal foi “Os Elementos” (Στοιχείων), que é a obra Matemática da antiguidade mais importante, mais lida e mais traduzida para vários idiomas e que modelou a maneira de ensinar e de fazer Matemática por quase dois milênios.
- ▶ Só perde para a Bíblia no número de edições impressas desde sua primeira edição, em 1482.

A obra de Euclides

- ▶ Sua obra principal foi “Os Elementos” (Στοιχείον), que é a obra Matemática da antiguidade mais importante, mais lida e mais traduzida para vários idiomas e que modelou a maneira de ensinar e de fazer Matemática por quase dois milênios.
- ▶ Só perde para a Bíblia no número de edições impressas desde sua primeira edição, em 1482.
- ▶ Vamos detalhar a obra “Os Elementos” em seguida, mas antes, vamos listar suas outras contribuições (quase todas perdidas ou preservadas parcialmente).

A obra de Euclides

- ▶ “Os dados”: Trata sobre a natureza e implicações de uma determinada informação “dada” em problemas geométricos. O conteúdo está relacionado com o exposto nos quatro primeiros livros dos “Elementos”. Uma das contribuições metodológicas importantes é a distinção entre Análise e Síntese (tanto na resolução de Problemas quanto na Demonstração de Teoremas.

A obra de Euclides

- ▶ “Sobre divisão de figuras”, sobre problemas geométricos relativos à divisão de uma figura dada em uma determinada proporção (sobreviveu parcialmente de uma tradução do árabe).

A obra de Euclides

- ▶ “Sobre divisão de figuras”, sobre problemas geométricos relativos à divisão de uma figura dada em uma determinada proporção (sobreviveu parcialmente de uma tradução do árabe).
- ▶ “Catóptrica”, sobre imagens produzidas por espelhos planos e curvos. Alguns estudiosos atribuem a obra a Theon de Alexandria.

A obra de Euclides

- ▶ “Sobre divisão de figuras”, sobre problemas geométricos relativos à divisão de uma figura dada em uma determinada proporção (sobreviveu parcialmente de uma tradução do árabe).
- ▶ “Catóptrica”, sobre imagens produzidas por espelhos planos e curvos. Alguns estudiosos atribuem a obra a Theon de Alexandria.
- ▶ “Os fenômenos”, um tratado sobre astronomia esférica. Uma versão em grego sobreviveu. Muito similar à obra “Sobre a esfera móvel”, de Autólico de Pitane.

A obra de Euclides

- ▶ “Óptica”, o primeiro tratado grego sobre perspectiva. Sobreviveu graças a uma compilação feita por Pappus.

A obra de Euclides

- ▶ “Óptica”, o primeiro tratado grego sobre perspectiva. Sobreviveu graças a uma compilação feita por Pappus.
- ▶ “Cônicas”, trabalho sobre seções cônicas, totalmente perdido. Sabemos de sua existência por citações de Arquimedes e de Apolônio. Acredita-se que os primeiros quatro livros das “Cônicas” de Apolônio sejam basicamente dependentes da obra de Euclides.

A obra de Euclides

- ▶ “Porismas”, obra com resultados imediatos, corolários de demonstrações anteriores. Acredita-se que sejam referentes às cônicas, mas pouco se sabe sobre o real conteúdo dessa obra.

A obra de Euclides

- ▶ “Porismas”, obra com resultados imediatos, corolários de demonstrações anteriores. Acredita-se que sejam referentes às cônicas, mas pouco se sabe sobre o real conteúdo dessa obra.
- ▶ “Pseudária”, ou livro das falácias. Esta obra tinha um caráter didático em que o autor apresenta algumas demonstrações com erros propositais ou falácias lógicas para que o leitor pudesse localizá-los.

A obra de Euclides

- ▶ “Os lugares em superfícies”. Tratado sobre lugares geométricos (provavelmente superfícies quadráticas). Totalmente desaparecido.

A obra de Euclides

- ▶ “Os lugares em superfícies”. Tratado sobre lugares geométricos (provavelmente superfícies quadráticas). Totalmente desaparecido.
- ▶ Algumas obras sobre mecânica, conhecidas a partir de traduções em árabe, como “Sobre o leve e o pesado”, que trata das noções aristotélicas sobre o movimento dos corpos ou “Sobre o equilíbrio” que seria um tratado sobre alavancas anterior a Arquimedes.

Os Elementos

- ▶ Consistia de um compêndio dos resultados matemáticos existentes até a época e, ao mesmo tempo, de uma estruturação lógica sem precedentes do conhecimento matemático.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 1: Contém 23 definições, 5 postulados e 5 “noções comuns” (axiomas, que eram considerados diferentes de postulados). Consiste de 48 proposições sobre geometria plana.

Os Elementos

- ▶ Postulados: “Sejam as seguintes afirmações postuladas”:
 1. (é possível) traçar uma reta (segmento de reta) de qualquer ponto até qualquer outro ponto.

Os Elementos

- ▶ Postulados: “Sejam as seguintes afirmações postuladas”:
 1. (é possível) traçar uma reta (segmento de reta) de qualquer ponto até qualquer outro ponto.
 2. (é possível) estender uma reta finita (segmento), continuamente em uma reta.

Os Elementos

- ▶ Postulados: “Sejam as seguintes afirmações postuladas”:
- ▶ (é possível) traçar uma reta (segmento de reta) de qualquer ponto até qualquer outro ponto.
- ▶ (é possível) estender uma reta finita (segmento), continuamente em uma reta.
- ▶ (é possível) descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer distância (raio).

Os Elementos

- ▶ Postulados: “Sejam as seguintes afirmações postuladas”:
 1. (é possível) traçar uma reta (segmento de reta) de qualquer ponto até qualquer outro ponto.
 2. (é possível) estender uma reta finita (segmento), continuamente em uma reta.
 3. (é possível) descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer distância (raio).

Os Elementos

- ▶ Postulados: “Sejam as seguintes afirmações postuladas”:
- ▶ Todos os ângulos retos são iguais (congruentes) entre si.

Os Elementos

- ▶ Postulados: “Sejam as seguintes afirmações postuladas”:
- ▶ Todos os ângulos retos são iguais (congruentes) entre si.
- ▶ Se uma reta intersectando duas outras retas faz com que (a soma dos) ângulos interiores do mesmo lado seja menor que dois ângulos retos, então as duas retas, se estendidas indefinidamente, se encontram do mesmo lado que os ângulos somam menos que dois ângulos retos.

Os Elementos

- ▶ Noções comuns:
- ▶ Coisas iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.

Os Elementos

- ▶ Noções comuns:
- ▶ Coisas iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.
- ▶ Se iguais forem adicionados a iguais, os totais serão iguais.
- ▶ Se iguais forem subtraídos de iguais, os restos serão iguais.

Os Elementos

- ▶ Noções comuns:
- ▶ Coisas iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.
- ▶ Se iguais forem adicionados a iguais, os totais serão iguais.
- ▶ Se iguais forem subtraídos de iguais, os restos serão iguais.
- ▶ Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si. (natureza geométrica, noção de congruência)

Os Elementos

- ▶ Noções comuns:
- ▶ Coisas iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.
- ▶ Se iguais forem adicionados a iguais, os totais serão iguais.
- ▶ Se iguais forem subtraídos de iguais, os restos serão iguais.
- ▶ Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
- ▶ O todo é maior que suas partes.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 1: Contém 23 definições, 5 postulados e 5 “noções comuns” (axiomas, que eram considerados diferentes de postulados). Consiste de 48 proposições sobre geometria plana.
- ▶ Proposições, poderiam ser Problemas, como a Proposição 1: “Construir um triângulo equilátero em um segmento de reta”.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 1: Contém 23 definições, 5 postulados e 5 “noções comuns” (axiomas, que eram considerados diferentes de postulados). Consiste de 48 proposições sobre geometria plana.
- ▶ Proposições poderiam ser Problemas, como a Proposição 1: “Construir um triângulo equilátero em um segmento de reta”.
- ▶ Ou poderiam ser Teoremas, como é o caso da Proposição 47 é o “Teorema de Pitágoras” e a Proposição 48 a sua recíproca.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 1: Contém 23 definições, 5 postulados e 5 “noções comuns” (axiomas, que eram considerados diferentes de postulados). Consiste de 48 proposições sobre geometria plana.
- ▶ Proposições poderiam ser Problemas, como a Proposição 1: “Construir um triângulo equilátero em um segmento de reta”.
- ▶ Ou poderiam ser Teoremas, como é o caso da Proposição 47 é o “Teorema de Pitágoras” e a Proposição 48 a sua recíproca.
- ▶ Somente a partir da Proposição 27 que o Postulado 5 das paralelas começa a ser utilizado.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 2: 14 proposições sobre equivalência de áreas e “álgebra geométrica”.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 2: 14 proposições sobre equivalência de áreas e “álgebra geométrica”.
- ▶ Livro 3: 37 proposições sobre a geometria do círculo.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 2: 14 proposições sobre equivalência de áreas e “álgebra geométrica”.
- ▶ Livro 3: 37 proposições sobre a geometria do círculo.
- ▶ Livro 4: 16 proposições sobre polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 2: 14 proposições sobre equivalência de áreas e “álgebra geométrica”.
- ▶ Livro 3: 37 proposições sobre a geometria do círculo.
- ▶ Livro 4: 16 proposições sobre polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência.
- ▶ Livro 5: 18 definições e 25 proposições sobre a teoria de proporções conforme estabelecida por Eudoxo de Cnido.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 6: 33 proposições utilizando a teoria de proporções para obter resultados sobre semelhanças e áreas.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 6: 33 proposições utilizando a teoria de proporções para obter resultados sobre semelhanças e áreas.
- ▶ Livro 7: Início do tratamento do que hoje conhecemos como “Teoria de números”. Trata de divisibilidade de números inteiros, máximo divisor comum e números primos. Contém 22 definições e 39 proposições.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 8: 27 proposições sobre proporções entre números, médias proporcionais, “raízes quadradas” e “raízes cúbicas”.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 8: 27 proposições sobre proporções entre números, médias proporcionais, “raízes quadradas” e “raízes cúbicas”.
- ▶ Livro 9: Consiste de 36 proposições versando, entre outras coisas, sobre progressões geométricas. A Proposição 20 consiste do famoso resultado da infinitude dos números primos.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 10: com 115 proposições, é o mais longo e difícil dos livros. A temática do livro são as grandezas incomensuráveis. A Proposição 1 é a demonstração do que conhecemos como “Método de Exaustão”. Também neste livro é apresentado, na Proposição 2, o algoritmo para o cálculo do máximo divisor comum de dois números (para duas grandezas comensuráveis), este é o famoso algoritmo de Euclides.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 11: com 28 definições e 39 proposições, contém os resultados básicos de geometria espacial, em particular, discutem-se relações entre paralelepípedos.

Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 12: com apenas 18 proposições, acaba versando sobre uma grande amplitude de resultados: As áreas de dois círculos estão na mesma proporção que os quadrados de seus diâmetros (Proposição 2). Um prisma de base triangular é dividido em três pirâmides iguais (Proposição 7). O volume de um cone é um terço do volume de um cilindro com mesmo raio da base e mesma altura (Proposição 10). Os volumes de duas esferas estão na mesma proporção que os cubos de seus diâmetros (Proposição 18).

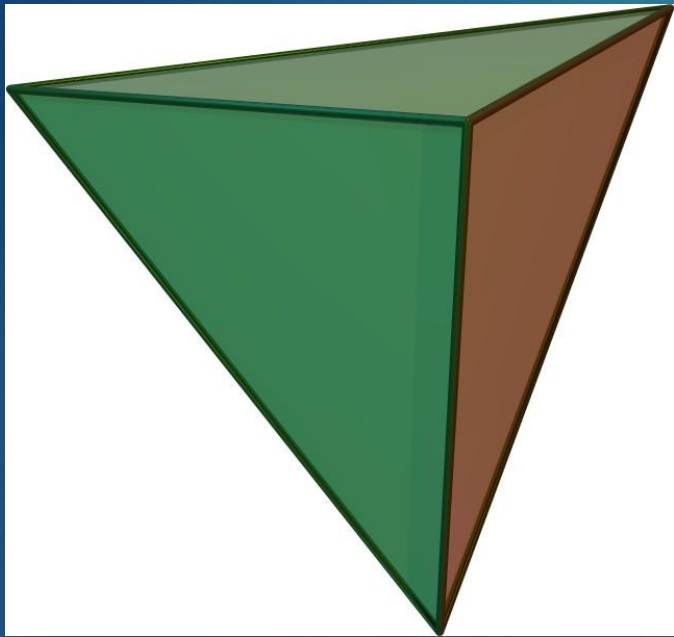
Os Elementos

- ▶ Consiste de 13 livros:
- ▶ Livro 13: também com 18 proposições, divide-se entre dois assuntos distintos, porém complementares. Nas primeiras 11 proposições, se estuda detalhes sobre a média e extrema razão (razão áurea) e o pentágono regular. A partir da Proposição 12, inicia-se o estudo dos 5 sólidos platônicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro). A Proposição 18 mostra, entre outras coisas, que somente existem 5 poliedros regulares.

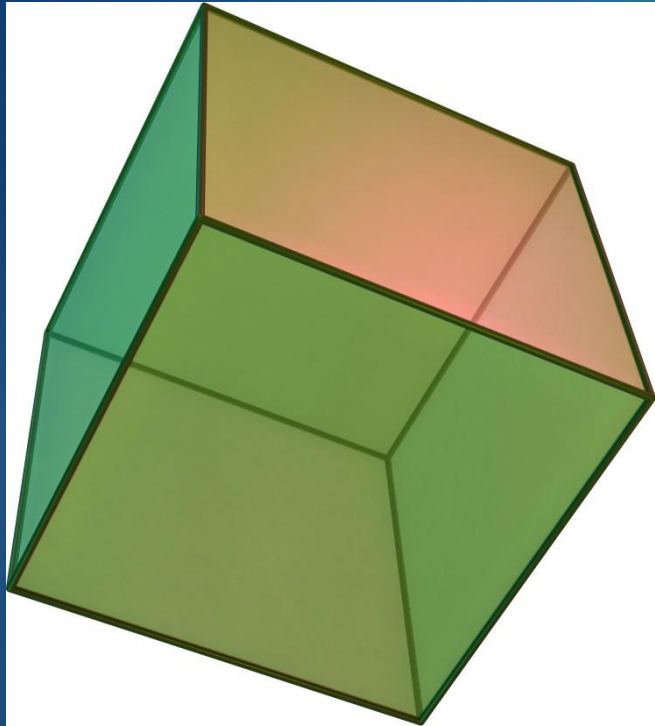
Os Elementos

- ▶ Os Poliedros regulares eram conhecidos anteriormente e foram introduzidos na literatura por Platão na obra Timaeus. Os 5 sólidos estavam relacionados com os elementos:

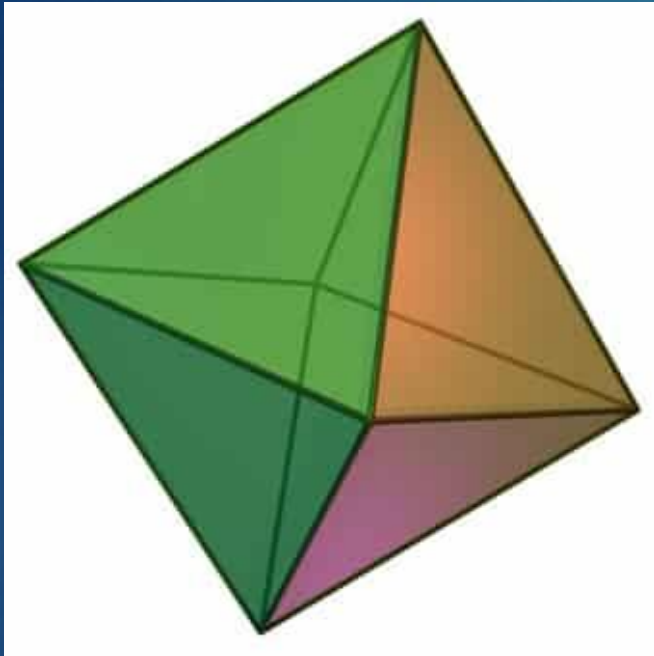
Os Elementos



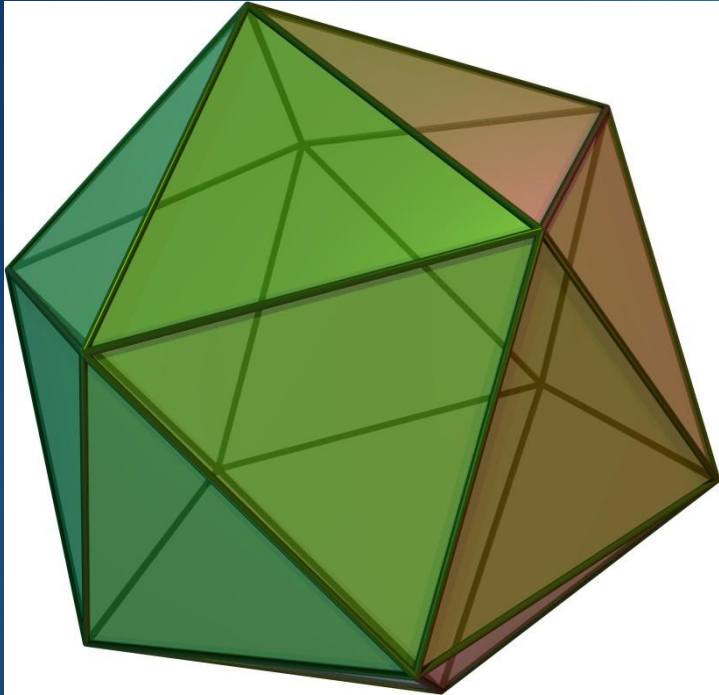
Os Elementos



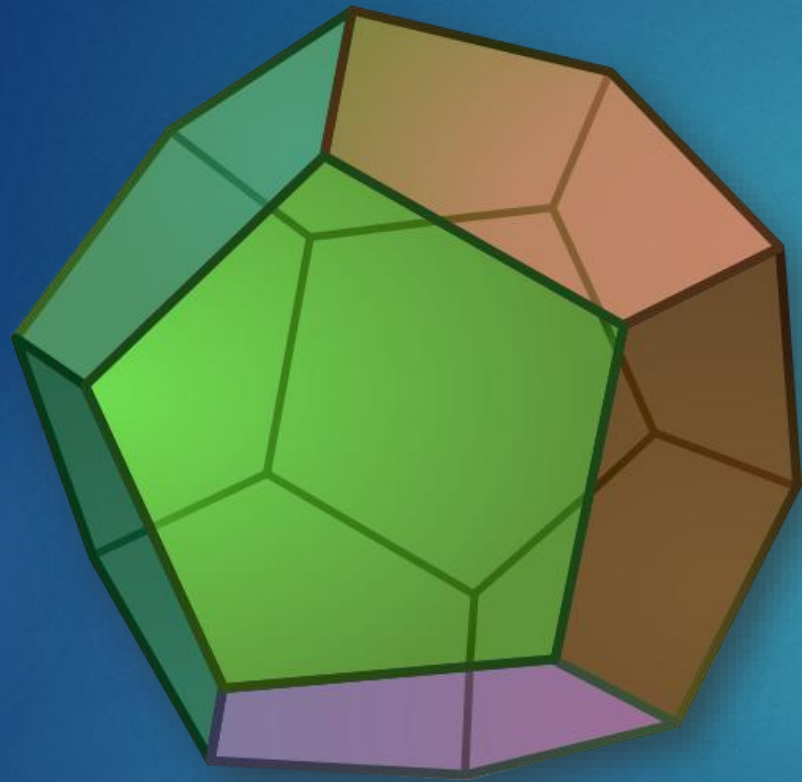
Os Elementos



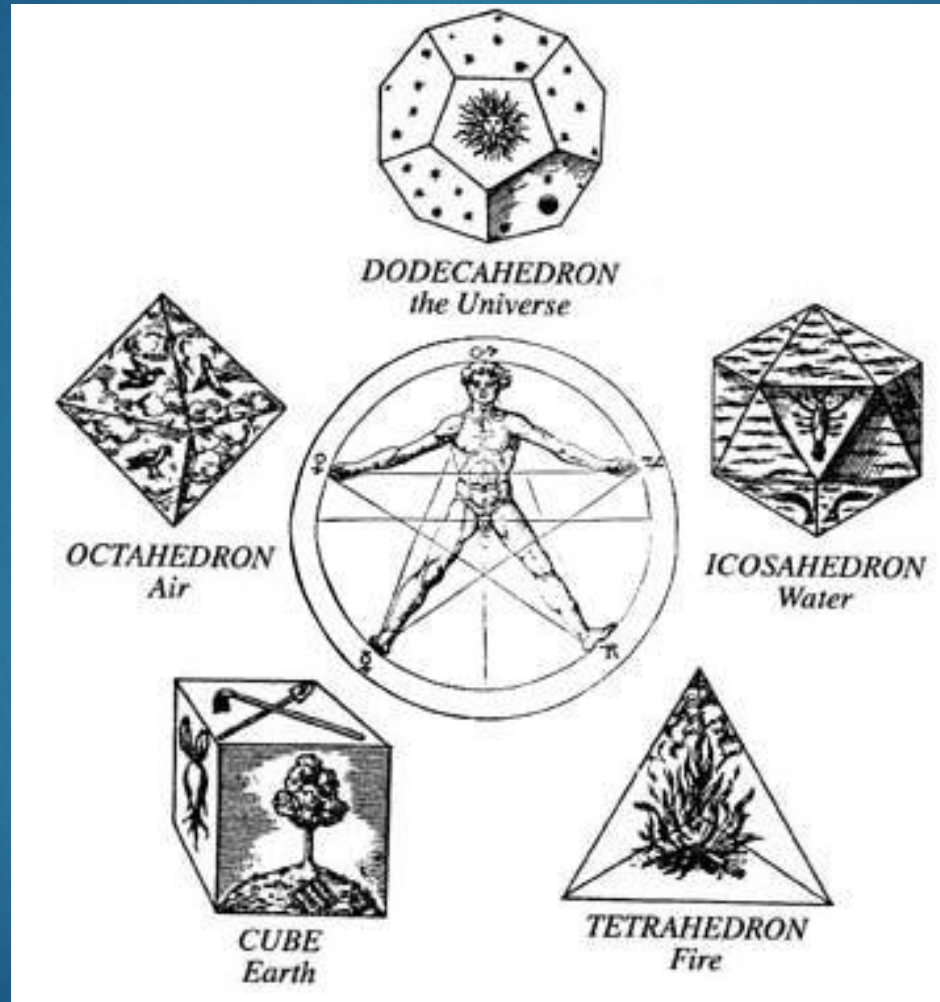
Os Elementos



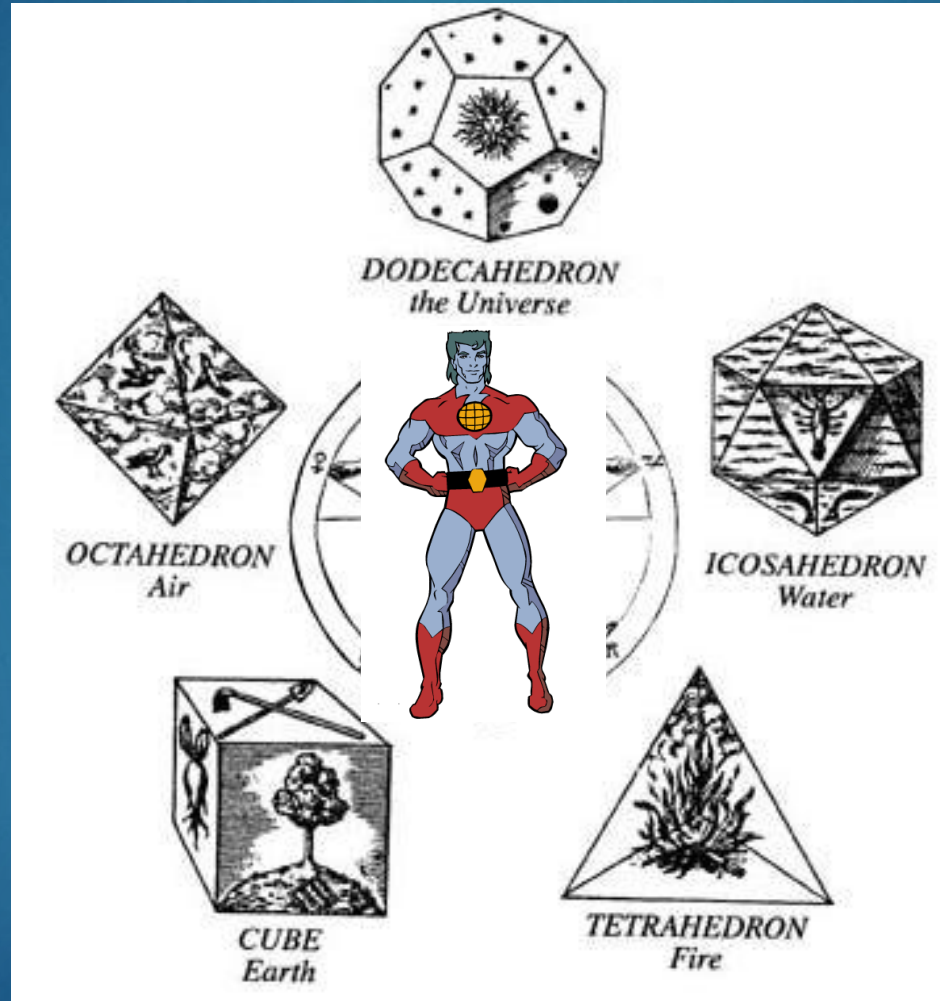
Os Elementos



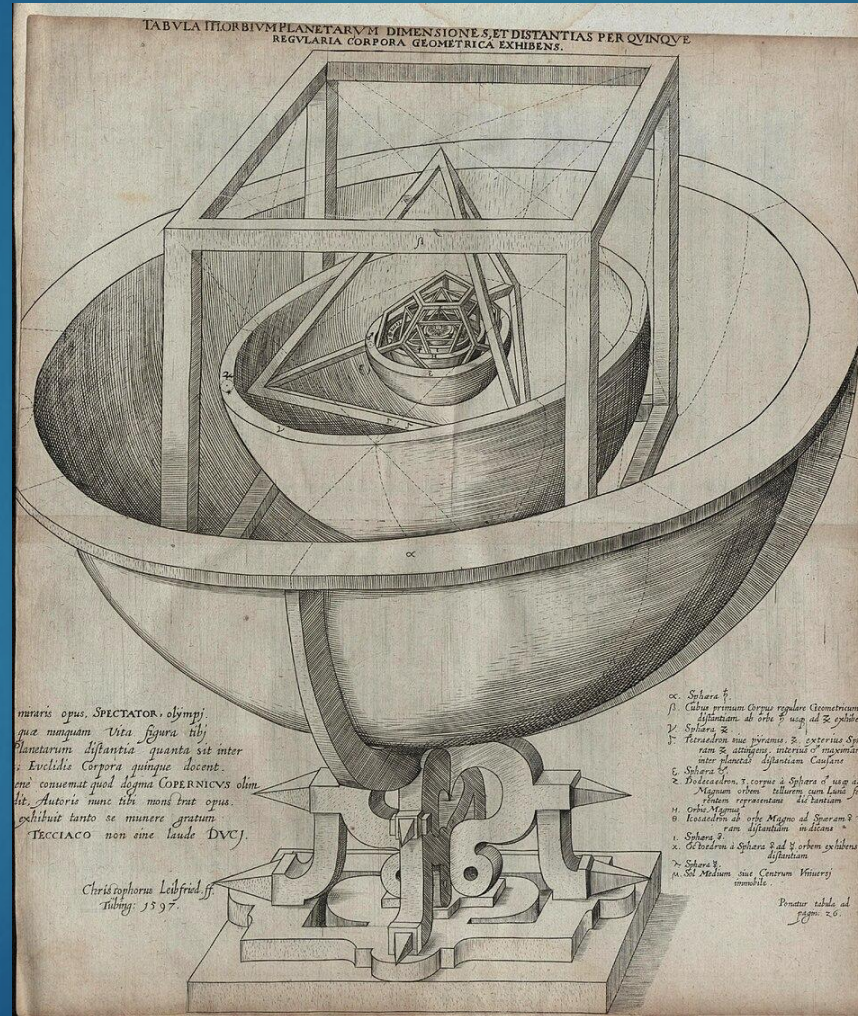
Os Elementos



Os Elementos



Os Elementos



mirari's opus. SPECTATOR, olimpi.
 qua magnum Vna figura tibi
 planetarum distantia quanta sit inter
 Euclidis Corpora, quinque docent.
 ene conueniat quod dogma COPERNICVS olim
 sit. Auctoris nunc tibi non erat opus.
 exhibuit tanto se munere gratum
 TECCIACO non sine laude DVCJ.

Christophorus Wolffrad.
 Tilburgi 1597.

- cc. Sphera f.
- ff. Cubus primum corpus regulare Geometricum
- Exhibentem ab orbe f. usq. ad z. exhibens
- g. Sphera h.
- h. Tetraedron sine pyramidis. & exterioris Sphae-
 ram & attigens, interioris o. maximum
 inter planetas distantiam Causans
- i. Sphera k.
- k. Dodecaedron. 7. corpus à Sphera o. usq. ad
 M. Maximum orbem. tallum, cum laude. ff.
 r. idem representans distantiam
- l. Orbis M. g.
- o. Tetraedron ab orbe M. g. ad Sphaeram q. r. u.
- p. Sphera q. r. u. distantiam indicans
- x. Octaedron à Sphera q. r. u. ad y. orbem exterioris
 distantiam
- y. Sphera y. dicitur Centrum Vltimae
 mundi.

Posuit tabula ad
 paginam 26.