



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA

Luiza Dilli Cadore

O Método de Eudoxo e o Cálculo Infinitesimal

Florianópolis
2026

Luiza Dilli Cadore

O Método de Eudoxo e o Cálculo Infinitesimal

Projeto apresentado como exigência parcial para a conclusão da disciplina “História da Matemática” do curso de Matemática, da Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Reitor João David Ferreira Lima.

Florianópolis
2026

Sumário

1	Introdução	4
2	Desenvolvimento	5
2.1	A Teoria das Proporções	5
2.2	O Método de Exaustão de Eudoxo	7
2.3	O Cálculo Infinitesimal	8
2.3.1	O Problema da Área	8
2.3.2	O Problema da Tangente	11
3	Conclusão	14

1 Introdução

A matemática grega clássica é frequentemente admirada por seu rigor lógico e pela busca de uma perfeição geométrica que moldou o pensamento ocidental. No entanto, um dos maiores desafios enfrentados pelos antigos foi a transição do discreto para o contínuo, ou seja, como lidar matematicamente com figuras de contornos curvos e grandezas que não podiam ser medidas por números inteiros. Enquanto a matemática moderna trata razões como frações numéricas independentes $\left(\frac{a}{b}\right)$, para os gregos, a proporcionalidade era uma relação intrínseca entre magnitudes do mesmo gênero, sem necessariamente estarem vinculadas a um sistema métrico numérico.

Eudoxo de Cnido, um dos matemáticos mais brilhantes de sua era, surge nesse cenário como uma figura central. Considerado o "avô" do cálculo integral, ele desenvolveu ferramentas para calcular áreas e volumes de figuras curvilíneas de forma rigorosa. Este trabalho explora como sua Teoria das Proporções e o seu Método de Exaustão forneceram a sustentação lógica necessária para que, séculos depois, Newton e Leibniz pudessem formalizar o cálculo infinitesimal moderno.

Por fim, observaremos o contraste entre o método de exaustão geométrico clássico e a dinâmica dos limites contemporâneos, evidenciando como a percepção do tempo e do movimento alterou profundamente a prática matemática.

2 Desenvolvimento

Neste capítulo, apresentaremos os dois tópicos fundamentais da nossa pesquisa para, em seguida, discutirmos a relevância do método da exaustão de Eudoxo. Analisaremos como a mecânica de exaurir áreas e volumes por meio de exaustão lógica forneceu a sustentação necessária para o surgimento do cálculo infinitesimal. Ao final desta discussão, faremos um contraste entre os métodos com ênfase na análise do poder do tempo na mudança de como fazemos matemática.

Eudoxo de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.) nascido em Cnido (atual Turquia), foi um importante matemático e astrônomo grego. Sua trajetória foi um tanto vasta, sabe-se que ele viajou para Tarento, atualmente na Itália, onde estudou com Arquitas, um dos seguidores de Pitágoras. Depois, viajou para a Sicília, onde estudou medicina, depois para Atenas em que teria assistido algumas aulas de Platão e ido até o Egito onde estudou astronomia e fundou sua própria academia. (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999)

O Método de Exaustão, desenvolvido principalmente por Eudoxo de Cnido no século IV a.C., é considerado o “avô” do cálculo integral moderno. Ele foi a primeira ferramenta rigorosa na história para calcular áreas e volumes de figuras curvas. Para ser possível compreender como ele se relaciona com o cálculo moderno vamos, em um primeiro momento, entender como funciona a Teoria das Proporções de Eudoxo e, posteriormente, mostrar e entender como funciona o Método de Euxaustão.

2.1 A Teoria das Proporções

Podemos encontrar a teoria desenvolvida por Eudoxo no livro V dos Elementos de Euclides. Aqui, se estuda a proporcionalidade entre duas grandezas e, vale ressaltar que, a ideia de proporcionalidade que é aplicada aqui é diferente do que entendemos como razão hoje (ROQUE, 2012).

No livro V dos Elementos, é apenas dado que $a:b :: c:d$ (a está para b assim como c está para d), mas nada se sabe sobre o significado das razões $a:b$ e $c:d$ separadamente. Hoje $a:b$ é relacionado à uma fração $\frac{a}{b}$ o que atribui um significado independente para a e b, o que não poderia acontecer dentro da obra de Euclides pois, nem sempre, as grandezas eram associadas a números pela medida.

As definições apresentadas a seguir foram baseadas na obra de Roque (2012), embora

a numeração aqui utilizada tenha sido reorganizada para melhor se adequar à estrutura lógica deste trabalho

Definição 2.1. *Uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero.*

Definição 2.2. *Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma à outra.*

Definição 2.3. *Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam, ou, ao mesmo tempo, sejam iguais, ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes.*

Definição 2.4. *E as magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção.*

Pode-se notar que, não podemos comparar a razão de duas naturezas diferentes, ou seja, não podemos, por exemplo, comparar a razão de um volume com uma área.

Podemos, para um entendimento mais claro, passar algumas dessas definições para a linguagem utilizada atualmente na matemática. Assim,

Definição 2.5. *(Atualização da definição 2.2) Para que duas grandezas a, b sejam ditas em proporção é necessário que existam $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que:*

$$ma > b \quad e \quad nb > a$$

Atualmente é conhecida, dentro da Análise Real, uma propriedade muito similar a essa chamada de Propriedade Arquimediana:

Definição 2.6 (Propriedade Arquimediana). *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x > 0$ e $y > 0$ existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

Ou seja, se existe um segmento de reta de tamanho x qualquer e outro segmento de tamanho y , mesmo que y seja muito maior que x , com somas consecutivas de x somos capazes de extrapolar o tamanho y .

Definição 2.7. *(Atualização da definição 2.3) Temos que $a:b :: c:d$ se, e somente se, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ um dos casos abaixo ocorre:*

i) se $ma < mb$ então, $mc < md$;

ii) se $ma = mb$ então, $mc = md$;

iii) se $ma > mb$ então, $mc > md$.

Para que seja possível compreender como Eudoxo transitava entre a geometria e aritmética é preciso entender o conceito de comensurabilidade, ou seja, a comensurabilidade servia para transformar um problema geométrico em um problema de contagem.

Para Eudoxo, dois segmentos de reta eram considerados comensuráveis quando possuíam uma "medida comum", isto é, quando existia um terceiro segmento menor que cabia um número inteiro de vezes em ambos. Matematicamente, isso significa que a razão entre esses dois segmentos poderia ser expressa por uma razão entre números inteiros (o que hoje chamamos de números racionais).

Contudo, a descoberta de grandezas incomensuráveis, como a diagonal e o lado de um quadrado, gerou uma crise na matemática grega, pois "como poderiam existir grandezas que não podem ser comparadas com números inteiros?". Então, Eudoxo expandiu a ideia de comparação entre grandezas incomensuráveis para que fosse possível compará-las através de múltiplos inteiros.

Aqui Eudoxo permitiu comparar grandezas incomensuráveis. A partir disso, podemos estudar o Método de Exaustão em que iremos comparar áreas e volumes de figuras curvilíneas utilizando polígonos.

2.2 O Método de Exaustão de Eudoxo

O método de Eudoxo consiste "esgotar", isto é, exaurir a diferença entre a área de uma figura curvilínea e um polígono inscrito. Para isto, inscrevemos um polígono regular em uma figura curvilínea, como um círculo, e vamos dobrar o número de lados em repetições sucessivas até que a área da figura inscrita fique tão próxima à área do círculo quanto queremos.

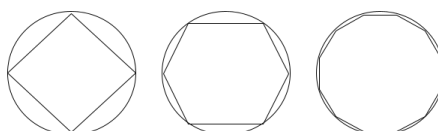


Figura 2.2.1: representação do método da exaustão de Eudoxo para um círculo, mostrando polígonos regulares inscritos com 4, 6 e 12 lados - Elaborada pela autora

Arquimedes (287 a.C - 212 a.C), então aprimora o método de Eudoxo, ele utiliza polígonos inscritos e circunscritos comprimindo a figura entre duas outras, e assim, as áreas mudam e tendem para a da figura inicial, uma interna crescendo e a externa decrescendo.

Utilizando o exemplo acima, obtemos a seguinte figura:

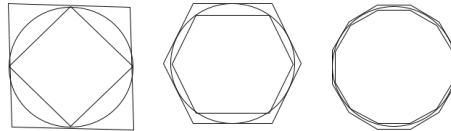


Figura 2.2.2: Elaborada pela autora

Desta forma, ele aplicou esse método para deduzir fórmulas e valores numéricos precisos, como na clássica aproximação de π , utilizando um polígono de 96 lados, e na quadratura da parábola.

2.3 O Cálculo Infinitesimal

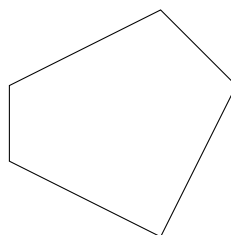
Esta sessão será dedicada á exposição do cálculo infinitesimal moderno. A exposição a seguir baseia-se fundamentalmente no livro [5]

Primeiramente, precisamos entender o que significa a palavra infinitesimal. A palavra infinitesimal tem sua estrutura morfológica derivada do latim infinitus, que significa “sem fim”, com o sufixo -esimal que traduz a ideia de subdivisão. Logo, quando pensamos no sentido carregado pela palavra infinitesimal seria uma subdivisão infinita de algo.

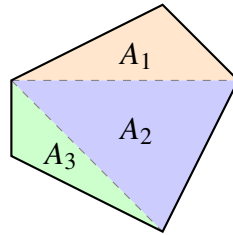
O cálculo que conhecemos hoje tem suas origens em torno de dois problemas que envolvem gráfico de funções: o problema da área e o problema da tangente.

2.3.1 O Problema da Área

Para encontrar a área de um polígono qualquer, podemos utilizar o processo da triangularização. Para exemplificar, suponha que queremos encontrar a área do polígono abaixo:



Note que, podemos dividir o polígono utilizando triângulos não sobrepostos que cobrem toda a área da figura original:



Assim, a área original A pode ser escrita como $A = A_1 + A_2 + A_3$ uma vez que já é conhecido como calcular a área de um triângulo. Contudo, com figuras curvas, não podemos dividi-las em triângulos de uma forma que não exista uma perda significativa da área original.

Para resolver esse problema, aplicamos o método de exaustão de Eudoxo. Por exemplo, vamos encontrar a área A abaixo do gráfico da função $y = f(x)$.

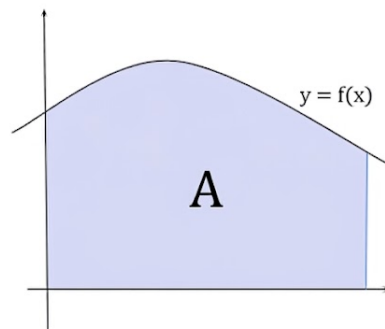


Figura 2.3.1: Elaborado com o Gemini

Para isso, particionar o intervalo $[a, b]$ da seguinte forma, o conjunto dos pontos é dado por $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ assim temos n sub-intervalos da forma x_{i-1}, x_i cujo tamanho é dado por $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Definimos agora, em cada sub-intervalo:

1. Considere m_i o ponto de valor mínimo da função, assim, obtemos um valor aproximado por falta para a área da região dado por:

$$s(P, f) = \Delta x f(m_1) + \dots + \Delta x f(m_n) = \sum_{i=1}^n \Delta x f(m_i)$$

denominada soma inferior relativa à partição P e à função f .

2. Considere M_i o ponto de valor máximo da função, assim, obtemos um valor aproximado

por excesso para a área da região dado por:

$$S(P,f) = \Delta x f(M_1) + \dots + \Delta x f(M_n) = \sum_{i=1}^n \Delta x f(M_i)$$

denominada soma superior relativa à partição P e à função f.

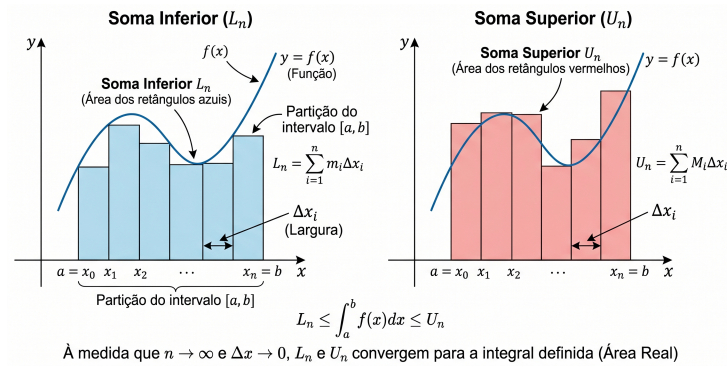


Figura 2.3.2: Gemini

3. Se considerarmos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ um ponto qualquer no intervalo tal que $x_i^* \neq m_i, M_i$ obtemos um valor aproximado para a área da região, dado por:

$$s^*(P,f) = \Delta x f(x_1^*) + \dots + \Delta x f(x_n^*) = \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_i^*)$$

denominada soma de Riemann

Note que,

$$s(P,f) \leq s^*(P,f) \leq S(P,f)$$

Assim, quando $n \rightarrow \infty$ (ou seja, a área de cada um dos retângulos fica cada vez menor), temos que:

$$s(P,f) = S(P,f) = A$$

E, pelo Teorema do Confronto, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} s^*(P,f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_i^*) = A$

Portanto, definimos a integral definida da função f dentro do intervalo $[a, b]$ como:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta x f(x_i^*) = A$$

2.3.2 O Problema da Tangente

O problema de determinar a reta tangente a uma curva foi, junto ao problema da área, foi o motor principal para a invenção do cálculo infinitesimal. O século XVII na Europa foi um período dual, por um lado foi uma época de crises profundas (Guerra dos Trinta Anos, recessão econômica e fome)[7], mas, simultaneamente, foi o século da Revolução Científica pelos avanços de Galileu Galilei e Isaac Newton.

Na antiguidade, Apolônio de Perga (262-190 a.C.) resolveu o problema das tangentes especificamente para seções cônicas, sua obra *As Cônicas* (c. 200 a.C.). Para isso, em seu quinto livro, ele trata teoremas relativos a retas máximas e mínimas traçadas a uma cônica, ou seja, podemos as enxergar como limites de retas secantes. No entanto, a geometria clássica tinha dificuldade em criar soluções que se aplicassem a classes completas de figuras.

Com a introdução da geometria analítica por Descartes em 1637, as curvas passaram a ser descritas por equações como $F(x, y) = 0$. Isso permitiu que o problema da tangente fosse abordado de forma algébrica e não apenas visual.

Com isso, Pierre de Fermat (1601-1665), em 1638, introduziu o conceito de adequação, uma relação em que duas quantidades são tratadas como se fossem iguais para “derivar” uma equação. Fermat utilizava o símbolo $\approx$ para indicar essa “quase igualdade” ao comparar os pontos de uma curva com os pontos de sua reta tangente, calcular máximos e mínimos de funções, tangentes a curvas, área, centro de massa, mínima ação.

O procedimento se dá da seguinte forma, vamos encontrar o coeficiente angular m da reta tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$ em uma curva para uma parábola $y = px^2$

1. Escrever a adequação: Relaciona-se a equação da curva com os pontos da tangente: $px^2 - y_0 \approx m(x - x_0)$;
2. Substituir o ponto conhecido: Como $y_0 = px_0^2$, a relação torna-se $px^2 - px_0^2 \approx m(x - x_0)$;
3. Simplificar: Dividindo ambos os lados por $(x - x_0)$, supondo que $(x - x_0)$, obtém-se $p(x + x_0) \approx m$;
4. Finalizar: Ao fazer $x = x_0$, a adequação transforma-se em uma igualdade exata: $m = 2px_0$.

E, para encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função $F(x)$, Fermat buscava os pontos onde a reta tangente fosse horizontal. Seguimos os seguintes passos:

1. Considere a adequação:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \approx 0$$

2. Impomos a condição $x = x_0$, e assim obtemos uma equação que permitia encontrar o ponto crítico x_0 :

$$\left. \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \right|_{x=x_0} = 0$$

O método desenvolvido por Fermat era extremamente abrangente, uma vez que se aplica à curvas transcendentais. Mas, a técnica se torna extremamente difícil para a aplicação em equações muito complexas.

Descartes foi um grande crítico desse método. Enquanto Fermat focava na relação de “quase igualdade”, Descartes privilegiava o estudo das propriedades específicas da equação da curva para derivar suas propriedades geométricas. Contudo, alguns matemáticos como Lagrange viram, nesse processo, a primeira aparição da derivada.

Para os historiadores modernos, o método de Fermat não introduz a derivada como um operador com regras gerais, isso só aconteceu com Newton e Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), nascido em Leipzig, Alemanha, foi um matemático, filósofo e doutor em Direito. Além disso, desempenhou um papel fundamental na sistematização do cálculo infinitesimal, inclusive, a notação hoje utilizada no cálculo infinitesimal é, basicamente, devida a Leibniz.

Em 1684, Leibniz publicou no periódico *Acta Eruditorum* o artigo intitulado “Novos métodos para máximos e mínimos, assim como tangentes, os quais não são obstruídos por quantidades fracionárias e irracionais, e um cálculo notável para eles”, que é considerado o marco inicial do cálculo diferencial formal.

Leibniz foi um dos primeiros a separar o cálculo da derivada $F'(x)$ do seu uso prático para encontrar pontos de máximo e mínimo (quando $F'(x) = 0$). Somado a isso, ele definiu os conceitos dx , dy como as quantidades “infinitamente pequenas” que conhecemos hoje e trouxe enuncia as regras de diferenciação que transformaram o cálculo num operador:

1. Constante: Se a é uma constante, então $da = 0$;
2. Identidade: $dx = 1$ (quando derivado em relação a x);
3. Soma e Subtração: $d(y + z - w) = dy + dz - dw$;
4. Regra do Produto: $d(yz) = ydz + zdy$.

Contudo, Leibniz não foi o único matemático da época que elaborava uma teoria dentro do cálculo infinitesimal. Alguns anos antes, Isaac Newton (1643-1727), elaborou uma teoria similar a de Leibniz, mas a publicaria algum tempo depois.

Newton nasceu prematuro e órfão de pai em Woolsthorpe, Inglaterra. Após uma infância marcada por um desempenho escolar inicialmente mediano e uma breve tentativa materna de torná-lo agricultor, seu talento foi reconhecido, levando-o ao Trinity College, em Cambridge. Em 1665, devido à Grande Peste, Newton retornou à sua cidade natal, período em que realizou descobertas fundamentais em isolamento.

A abordagem de Newton foi profundamente motivada pela física e pelo estudo do movimento. Em seu trabalho, as quantidades x e y são chamadas de fluentes, ou “fluíam” continuamente com o tempo, e as suas velocidades chamadas de fluxões, com os símbolos $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

Por mais que o trabalho de Newton fosse muito similar ao de Leibniz, existia uma abordagem que foi essencial que diferenciava suas perspectivas. Newton, expandiu significativamente o uso de séries infinitas, ele percebeu que muitas funções difíceis de manipular poderiam ser transformadas em somas infinitas de polinômios simples.

Existiu uma grande disputa entre Newton e Leibniz sobre quem seria o real criador do cálculo. Newton desenvolveu suas ideias por volta de 1665-1666, mas demorou para publicar formalmente seu trabalho. Já Leibniz, desenvolveu o cálculo de forma independente anos depois, mas publicou primeiro e criou a notação (como $\frac{dy}{dx}$ e o símbolo de integral $\int$) que usamos até hoje.

3 Conclusão

Ao compararmos o Método de Exaustão de Eudoxo com o cálculo infinitesimal moderno, percebemos uma evolução que parte da intuição geométrica estática para a abstração algébrica dinâmica. O método de Eudoxo baseava-se em "esgotar" a diferença entre uma figura curva e polígonos inscritos, aumentando o número de lados até que a área resultante fosse suficientemente próxima do alvo. Embora rigoroso, esse processo era puramente geométrico e carecia do conceito formal de limite que define a análise moderna.

Arquimedes aprimorou o trabalho de Eudoxo ao "comprimir" a figura entre polígonos inscritos e circunscritos, foi apenas no século XVII que o cálculo se tornou um operador universal. Leibniz e Newton transformaram o que eram soluções específicas para problemas de área e tangente em um sistema formal com regras de diferenciação e integração.

Em conclusão, a transição do método de Eudoxo para a integral moderna de Riemann exemplifica o poder do tempo na mudança da matemática: o que antes era uma "quase igualdade" buscada por procedimentos exaustivos de triangularização tornou-se uma igualdade exata atingida pelo limite do infinito.

Referências

- [1] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Eudoxus of Cnidus**. MacTutor History of Mathematics Archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eudoxus/>. Acesso em: 12 abr. 2026.
- [2] ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- [3] CORRÊA, João Nazareno Pantoja; BRANDEMBERG, João Cláudio. **O Método da Exaustão e o uso de Tecnologias Digitais**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, Fortaleza, v. 11, n. 32, p. 1-12, 2024. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/12445>. Acesso em: 16 abr. 2026.
- [4] SILVA, João Dantas Almeida. **Sobre o método da exaustão de Eudoxo e o cálculo de áreas de regiões planas**. 2019. 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2019. Disponível em: <http://tede2.uefs.br:8080/handle/tede/1326>. Acesso em: 16 abr. 2026.
- [5] STEWART, James; CLEGG, Daniel K.; WATSON, Saleem. **Cálculo**: volume 1. 9. ed. Tradução técnica: Francisco Magalhães Gomes. São Paulo: Cengage Learning, 2022.
- [6] UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Instituto de Física. **Somas de Riemann**. In: e-Cálculo. São Paulo, [s.d.]. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/integrais/soma_riemann/soma_riemann.htm. Acesso em: 20 abr. 2026.
- [7] LUIGI, Paolo. **Uma breve história da matemática**. São Paulo: IME-USP, [s.d.]. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/pluigi/palestratoria.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2026.
- [8] Souza, Lindomar Duarte de. **Cônicas e Suas Propriedades Notáveis**. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/128599> . Acesso em: 20 abr. 2026

- [9] SITES FEM UNICAMP. **Gottfried Wilhelm Leibniz**. [S. l.], [s.d.]. Disponível em: <https://sites.fem.unicamp.br/em313/paginas/person/leibniz.htm>. Acesso em: 21 abr. 2026.
- [10] IME UNICAMP. **Sir Isaac Newton (1642-1727)**. Campinas, [s.d.]. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/sandra/CCA/history/newton/newton.html>. Acesso em: 21 abr. 2026.