Tiago Natã Kinhirin Sanson

A Aproximação Geommétrica das equações de segundo grau

Florianópolis

24 de Abril de 2024

Sumário

1 Introdução

O objetivo desse texto é dissecar desde a época dos babilônicos até os tempos atuais o método mais conhecido para resolver equações do segundo grau e, em um certo nível, ver o desenvolvimento dessas coisas de uma forma breve.

2 Os babilônicos

Os registros da equação de segundo grau datam desde os tempos da babilônia, de fato, os registros datam para 2000 A.C., as equações eram de formas simples, em especial, trabalhava-se com problemas das seguintes formas

- $x^2 = q$
- $x^2 + q = px$
- $x^2 + px = q$
- $x^2 = px$
- $x^2 = px + q$

É evidente que não eram calculados da forma algébrica: o foco era muito mais geométrico, como pode ser visto na tábua BM13901, exposta no museu britânico. Já possuiam um sólido entendimento de como resolver equações daquela forma desde então. O sistema de contagem deixa o entendimento um pouco difícil de compreender o método a uma primeira vista, mas após traduzir o sistema numérico, pode-se ver um sistema muito interessante - e parecido - com o que usamos até hoje. Um exemplo apresentado no livro do Carl Boyer é a solução do seguinte problema:

Tome a metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado.

É um pouco complicado entender a primeira vista, por conta do sistema numérico e tudo mais, mas após um pouco de trabalho "traduzindo" o sistema para uma linguagem moderna, temos a seguinte solução:

Tome a metade de um, que é $\frac{1}{2}$ e multiplique $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$, que nos dá $\frac{1}{4}$, some isto a 870, que nos dá 870,25, que é o quadrado de 29,5. Agora, some $\frac{1}{2}$ a 29,5 e o resultado é 30, o lado do quadrado

Essa solução é a solução positiva do problema $x^2 = x + 870$.

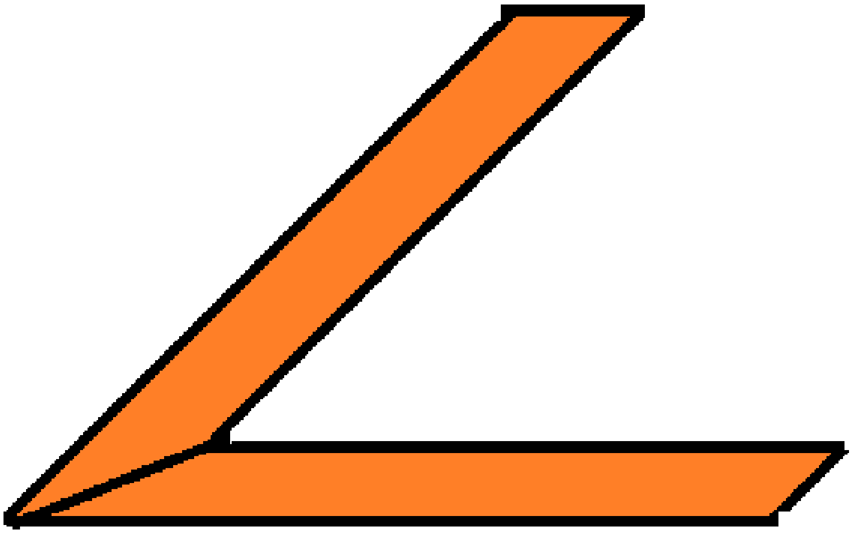
Com efeito, a solução do problema é um algorítmo que pode ser resumido a equação $x = \sqrt{q + (\frac{p}{2})^2} + \frac{p}{2}$ é a solução para equações desse tipo - e é evidente que para as outras equações, os babilônicos também tinham outras soluções, também geométricas.

3 Gnomons

Historicamente, um gnomon é a parte metálica do relógio de sol, responsável por indicar as horas do dia, na matemática a definição já é outra:

Definição 1 *Toda área paralelogrâmica, um dos paralelogramos, qualquer que seja, à volta da diagonal dela, com os dois complementos, seja chamado um gnômon*

Essa definição é um tanto quanto confusa, mas podemos visualizar melhor nas demonstrações, em geral são figuras em forma de L, como na figura abaixo



Essas figuras são de extrema importância para as construções a frente, vamos compará-la com dois retângulos para resolver dois tipos de equações do segundo grau.

4 Euclides e sua solução geométrica

Antes de iniciar, considere aqui uma reta na verdade um segmento de reta.

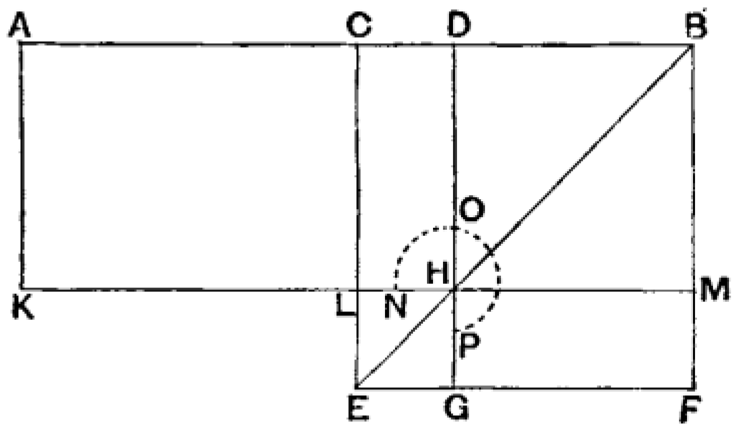
Vamos trabalhar com duas proposições do livro elementos para ver como obter as soluções pelo "meio" do Euclides. Começando pela seguinte proposição:

Proposição 1 (Proposição 5 Livro II) *Caso uma linha reta seja cortada em iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais da reta toda, com o quadrado sobre a entre as seções, é igual ao quadrado sobre a metade.*

Aqui vamos direto a demonstração, com possivelmente algumas imagens de auxílio.

- Considere uma reta AB, C o ponto que divide AB em partes iguais (o ponto médio) e D o ponto que divide CB em partes desiguais ($CD \neq DB$)
- Construa o quadrado $CEFB$, com base no lado CB
- Trace a reta $DG \parallel CE$
- Trace a reta BE e marque sua interseção na reta DG, chamemos de H
- Trace a reta KM passando por H, KM sendo paralela a AB, além disso, trace AK paralela a CL

A figura deve ficar algo assim



Continuando, vamos fazer as contas para mostrar que $AKHD + LEGH = CEFB$

- Note que, pela construção, $CDHL$ tem mesma área que $HMFG$
- Adicionando a área $DOBM$ a ambas, temos que as áreas $CLMB$ e $DGFB$ tem mesmo valor
- Como C é ponto médio, temos que as áreas $AKLC$, $CLMB$ e $DGFB$ são todas iguais
- Adicionando $CLHD$ a $AKLC$ e $DGFB$ nos dá que $AKHD$ tem mesma área que o gnomon $CLHGFB$

- Agora, basta soar o quadrado sobre entre as seções, isto é, o quadrado $LEGH$ a ambos, o que nos resulta em

$$AKHD + LEGH = \text{gnomon } CLHGFB + LEGH = CEFB$$

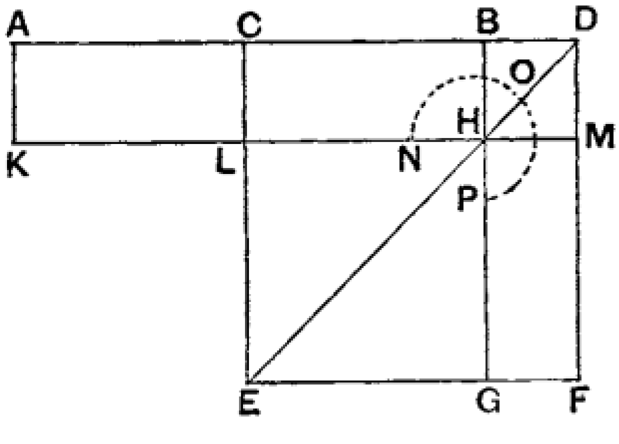
■

A figura apresentada nessa proposição nos gera um problema interessante, tome $AB = a$ e $DB = x$, temos que $ax - x^2 = AKLC = \text{gnomon } CLHGFB$
Vamos supor que a área do gnomon é b^2, com isso, resolver a equação $b^2 = ax - x^2$ nos da a área de $DOMB$. Mas ainda não temos os artifícios para fazer isso, precisamos do outro teorema.

Proposição 2 (Proposição 6 Livro II) *Caso uma linha reta seja cortada em duas, e seja adicionada a ela alguma reta sobre uma reta, o retângulo contido pela reta toda junto com a adicionada e pela adicionada, com o quadrado sobre a metade, é igual ao quadrado sobre a composta tanto da metade quanto da adicionada*

- Considere uma reta AB, com C o ponto de biseção e seja BD uma reta adcionada em AB tal que AD ainda seja uma reta
- Construa o quadrado $CEFD$ com lado de tamanho CD
- Trace a reta ED e considere a intersecção com BG, chame-a de H
- Trace a reta $BG \parallel CE$
- Trace a reta $KM \parallel AD$, considere a intersecção com CE e chame-a de L, trace também AK tal que $AK = BH, AK \parallel BH$

A figura deve ficar algo assim



- Pela construção, temos que as áreas de $CLHB$, $HGFM$ e $AKLC$ são todas iguais
- Adicione $CLMD$ a $AKLC$ e $CLHB$
- Temos portanto, que $AKMD = \text{gnomon } CLHGFD$

- Adicione o quadrado $LEGH$ a ambos dos lados, temos então que $AKMD + LEGH = CEFD$

■

Para esse figura, podemos considerar $AB = a$ e $BD = x$, então, dada a área do gnomon $CLHGFD$ como b^2, temos que o problema é solucionar a equação

$$x^2 + ax = b^2$$

Para tanto, completemos os quadrados. Sabemos que a área de $LEGH$ é $(\frac{a}{2})^2$, podemos somar às duas figuras, que nos dá

$$\begin{aligned} x^2 + ax + (\tfrac{a}{2})^2 &= b^2 + (\tfrac{a}{2})^2 \\ (x + \tfrac{a}{2})^2 &= b^2 + (\tfrac{a}{2})^2 \\ x &= \sqrt{b^2 + \tfrac{a^2}{4}} - \tfrac{a}{2} \end{aligned}$$

Logo, x nos dá justamente o tamanho do lado de BD, dadas as informações do tamanho de AB e do gnomon $CLHGFD$.
Mas e se as informações fossem um pouco diferentes e tivéssemos as seguintes informações: $AB = a$ e $AD = x$? Teremos agora que resolver a seguinte equação, com b^2 sendo também a área de um outro gnomon

$$x^2 - ax = b^2$$

Podemos usufruir da mesma estratégia, e somar o mesmo quadrado, a equação se desenrola de forma análoga e nos gera o resultado, somando o quadrado $LEGH$ que tem área $\frac{a^2}{4}$ nos dá

$$b^2 + \frac{a^2}{4} = (x - \frac{a}{2})^2 \rightarrow x = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}$$

O que conclui a sessão, com o que queriamos mostrar.

5 Comparações com a formula de Baskhara

Primeiro, demonstremos a fórmula de Baskhara, para qualquer número complexo, seja $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$, encontremos os valores de x para essa equação. Veja como o método é parecido.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a} &= 0 \\
x^2 + \tfrac{b}{a}x &= -\tfrac{c}{a} \\
x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b^2}{4} &= -\tfrac{c}{a} + \tfrac{b^2}{4} \\
(x^2 + \tfrac{b}{2a})^2 &= -\tfrac{c}{a} + \tfrac{b^2}{4} \\
x &= \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Note como o método é parecido: completamos o quadrado e seguimos com a vida, a grande diferença aqui é que o sinal não importa, diferentemente de nos tempos antigos, que precisava-se ver apenas os casos estritamente maiores que zero, o que era natural para a época, pois falava-se apenas de figuras e comprimentos.

Referências

[Boyer 2012]BOYER, C. *História da Matemática*. [S.l.]: Blucher, 2012.

[Euclides 2009]EUCLIDES. *Os Elementos*. [S.l.]: Editora Unesp, 2009.

[Heath 1968]HEATH, T. L. *THE THIRTEEN BOOKS OF EUCLID'S ELEMENTS, volume 1*. [S.l.]: Cambridge Press, 1968.