UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA

Gabriel Palacio Pilatti e SIlva

Prof. Eliezer Baptista

O Teorema de Pitágoras: Da Aritmética de Pontos à Métrica do Espaço-Tempo

Trabalho avaliativo parcial da disciplina de graduação MTM7305-05222 (2026.1) - História da Matemática.

Florianópolis
2026

Sumário

1. Introdução
2. Fundamentos e Ontologia: O Número antes da Prova
    - 2.1. O Conhecimento Pragmático:A Mesopotâmia e Tábua Plimpton 322
    - 2.2. Evidência Visual: A “Prova Chinesa”
    - 2.3. Ontologia Pitagórica: O Número como Corporeidade
3. A Proposição I-47 e o Rigor Euclidiano
    - 3.1. Requisitos Lógicos: Às Proposições I-4 e I-38
    - 3.2. A Demonstração de I-47
    - 3.3. Generalização: A Proposição VI-31
4. Expansão Cosmográfica e Mecânica
    - 4.1 Ptolomeu e a Transição Trigonometria
    - 4.2. Copérnico: A Régua do Cosmos
    - 4.3. Kepler: O “Áureo Teorema” e a Harmonia das Esferas
5. O Limite Físico e a Nova Geometria
    - 5.1. Galileu: A Quebra da Semelhança (Lei do Quadrado-Cubo)
    - 5.2. Einstein e a Generalização da Métrica (ds^2)
    - 5.3. Do Plano Euclidiano ao Espaço-Tempo Riemanniano
6. Discussão: Perspicuidade e Representação Física
7. Conclusão
8. Referências

1. Introdução

A matemática grega clássica é frequentemente admirada por seu rigor lógico e pela busca de uma perfeição geométrica que moldou o pensamento ocidental. No entanto, um dos maiores desafios enfrentados pelos antigos foi a transição do discreto para o contínuo, ou seja, como lidar matematicamente com figuras de contornos curvos e grandezas que não podiam ser medidas por números inteiros. Neste cenário, o Teorema de Pitágoras surge não apenas como uma fórmula de cálculo, mas como o pilar central que sustenta a evolução da geometria teórica e sua aplicação na física.

Embora a tradição atribua a descoberta da relação $a^2 + b^2 = c^2$ a Pitágoras, a historiografia moderna revela que este saber já era operado com precisão notável por babilônios e chineses milênios antes do sábio de Samos. A transição da "aritmética de pontinhos" pitagórica — onde o número era indissociável da corporeidade — para o sistema dedutivo dos *Elementos* de Euclides marca uma mudança ontológica fundamental: a matemática deixa de ser uma técnica de contagem para se tornar uma linguagem de equivalência de magnitudes. Veremos, por diferentes fases do teorema, uma evolução dos conceitos físicos que nos faz questionar se há, o que North argumenta haver no âmbito da ciência, “perspicuidade” nos nossos modelos e aplicações matemático-teóricas. Mas mais do que isto, o presente artigo instiga, pela cortante narrativa histórica, a explorarmos os limites e as profundidades que podemos deter das nossas representações na ciência matemática.

2. Fundamentos e Ontologia: O Número antes da Prova

Para compreender o impacto do Teorema de Pitágoras, é necessário desconstruir a ideia de que a verdade matemática reside exclusivamente na demonstração formal. Antes de Euclides, a validade da relação entre os lados de um triângulo retângulo era sustentada pela utilidade prática e pela evidência visual: no cálculo do volume de silos cilíndricos ou na mensuração de áreas de cultivo; na arquitetura e esquadria; no cálculo da altura de objetos inacessíveis; na astronomia e na estimativa de distâncias em navegação, entre outros.

2.1 O Conhecimento Pragmático: A Mesopotâmia e a Tábua Plimpton 322

Mil anos antes de Pitágoras, os babilônios já possuíam um domínio algorítmico impressionante sobre o teorema. A tábua *YBC 7289* demonstra que esses escribas sabiam calcular a diagonal de um quadrado com uma precisão equivalente a uma calculadora moderna de oito dígitos, utilizando a aproximação sexagesimal de 1;24,51,10 (notação moderna) para a raiz de 2. Para o babilônio, é improvável que o teorema fosse um objeto de contemplação filosófica como para os pitagóricos, mas sim uma ferramenta pragmática de simplificação. Ao escrevermos este número no nosso sistema de base 10, obtemos 1 + 24/60

$+ 51/60^2 + 10/60^3$, que é exatamente 1.414213 na nossa notação atual, isto é, $\sqrt{2}$. Nosso maior palpite aponta que a tábua *YBC 7289* foi feita em pretensão de exemplificar como achar a diagonal de qualquer quadrado: multiplicando o comprimento do lado por 1;24,51,10 ($\sqrt{2}$).

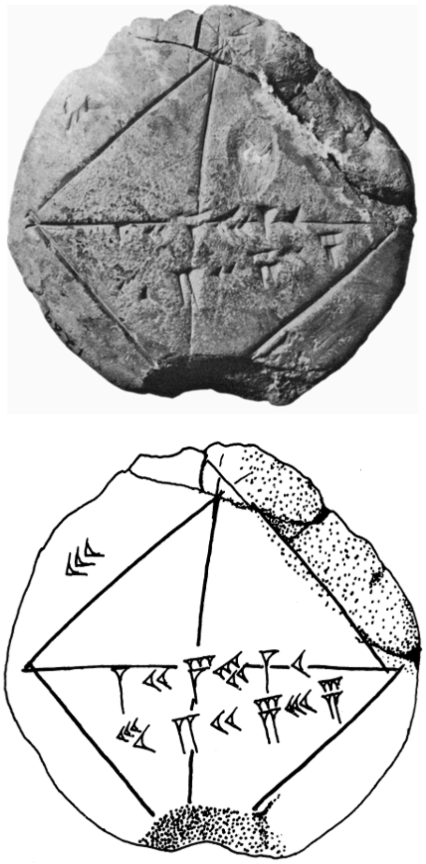


Figure 1.1. YBC 7289 [1]

Ainda mais sofisticada é a tábua *Plimpton 322*, que contém listas de triplas pitagóricas — conjuntos de números inteiros como (3, 4, 5) que satisfazem a relação do teorema. Isso sugere que, na Mesopotâmia, o saber geométrico era detido sob a forma de aritmética aplicada, focada em resolver problemas de agrimensura e administração.

[1] MAOR, 2019, p. 5

Figure 1.3. Plimpton 322

2

TABLE 1.1
Plimpton 322

$(c/a)^2$	b	c	
[1,59,0,]15	1,59	2,49	1
[1,56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1,]38,33,36,36	9,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

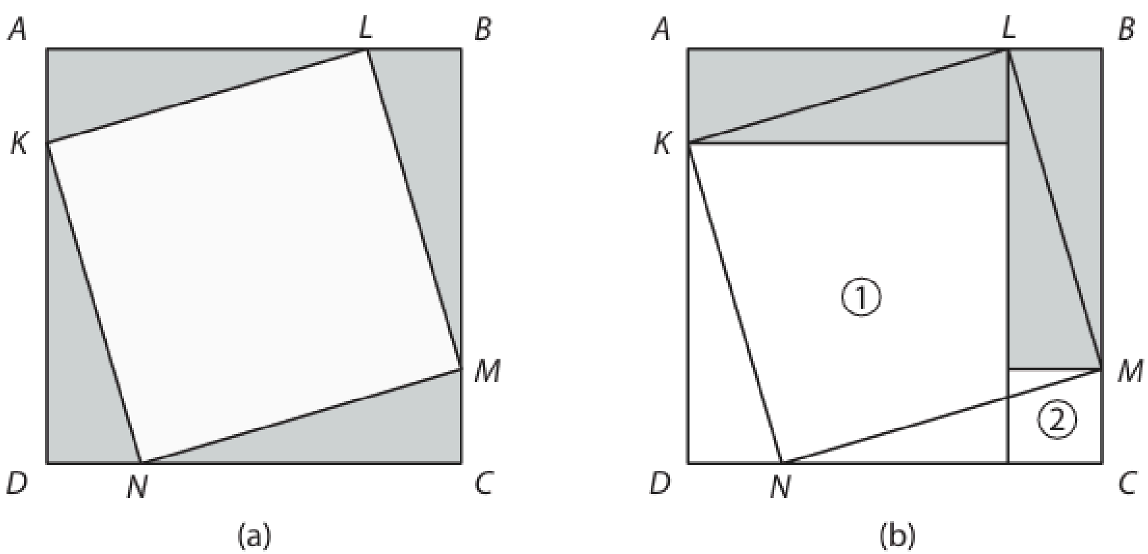
Note: The numbers in brackets are reconstructed.

3

[2] MAOR, 2019, p. 8
[3] MAOR, 2019, p. 9

2.2 Evidência Visual: A "Prova Chinesa"

Diferente do rigor axiomático grego, outras tradições baseavam a "verdade" do teorema na perspicácia do rearranjo de áreas. A chamada "Prova Chinesa" utiliza a decomposição de um quadrado maior em quatro triângulos retângulos congruentes e um quadrado central. Ao reordenar essas peças, a igualdade das áreas torna-se autoevidente.
Da mesma forma, é provável que Pitágoras tenha tido contato com a demonstração para o caso especial do triângulo isósceles, já conhecida pelos hindus – e talvez esta seja a única demonstração viável de associação ao próprio Pitágoras. Nesta versão, a prova é puramente visual: um quadrado construído sobre a diagonal contém quatro triângulos iguais, tornando a soma óbvia pelo preenchimento do espaço. O caso abaixo, retirado de (MAOR, 2019) apresenta a demonstração visual do caso com triângulos retângulos.



[4]

Consideremos um quadrado de lado DA, como temos na figura. Construímos um quadrado inclinado KLMN que dissecta os segmentos de cada lado para formar 4 triângulos retângulos congruentes dentro do quadrado original ABCD – dado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos (outro teorema[5]). Temos que KD = NC = MB = AL e AK = DN = CM = BL. Tomemos KD = α, CM = β e o lado do quadrado igual à γ (que também é a hipotenusa dos triângulos). Como a área total do quadrado maior ABCD é invariável, podemos calculá-la de duas formas a partir do rearranjo de suas peças. Na figura (a), a área de ABCD é a soma dos 4 triângulos com o quadrado interno (de área γ^2). Na figura

[4] MAOR, 2019, p. 26
[5] Como indicado pelo Catálogo dos Geômetras preservado por Proclo, este teorema básico já era de conhecimento dos pitagóricos, e como podemos deduzir aqui, especulativamente, também dos chineses.

(b), a área de ABCD é a soma dos mesmos 4 triângulos com os quadrados indicados por (1) e (2), cujos lados medem α^2 e β^2, respectivamente. Igualando a composição das áreas nas duas figuras, temos:

$$4(\alpha\beta / 2) + \gamma^2 = 4(\alpha\beta / 2) + \alpha^2 + \beta^2 \text{ , da qual obtemos } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

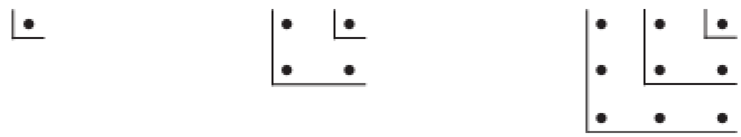
2.3 Ontologia Pitagórica: O Número como Corporeidade

A escola pitagórica introduz uma camada filosófica profunda a esta ferramenta geométrica: o número é a essência do cosmos. Lembremos que para os gregos antigos havia a matemática do contínuo, isto é, daquilo que é *mensurável*, divisível, onde estuda-se as proporções das grandezas (*μεγέθη*); e também havia a matemática do discreto, do múltiplo (que é composto por unidades), isto é, daquilo que é *contável*, onde estuda-se as proporções dos números (*αριθμοι*). Esse número não era uma abstração pura, mas, justamente, uma coleção discreta de unidades representadas por pontos ou pedras numa determinada configuração. Para os pitagóricos, as coisas consistiam de números; não havia separação entre número e corporeidade. Dado que a natureza é composta de corpos, a concepção pitagórica era de haveria uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do *κοσμος* (mundo, ordem), dada pelos números. Dessa forma, o universo seria determinado por um arranjo bem-ordenado baseado na própria delimitação das corpos, podendo ser distinguidos, separados um dos outros, possibilitando, logo, sua contagem. Assim, os pitagóricos tinham razão suficiente para conceber que as propriedades aritméticas dos corpos constituem o seu ser propriamente dito, e o ser de tudo que há, portanto, é o número.

Indo além, os pitagóricos ainda concebiam uma amálgama de relações materiais e de valores com respeito aos números, que não iremos entrar nos pormenores. Nos é útil, contudo, pegar das palavras de Roque (2012): “O Um é ao mesmo tempo par e ímpar, ser bissexuado a partir do qual os outros números se desenvolveram. O par e o ímpar são elementos dos números e na conjugação limitado-ilimitado está a oposição cósmica primordial por trás do mundo, expresso em números.”

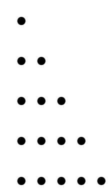
Nesse quadro de constelação de pedrinhas, onde poderíamos deter diferentes tipos de figuras – representando números triangulares, quadrados, pentagonais, etc. –, a "raiz" seria a semente geométrica básica dessa constelação; era o primeiro elemento de uma classe. Por exemplo, se considerarmos os "números quadrados", a raiz seria a menor disposição espacial que mantém essa forma. Todos os outros seres ou números de uma mesma família "evoluíam" a partir desse primeiro arranjo. Nisto, cada tipo de número possuía sua própria "raiz" ou menor número associado. As relações internas entre esses números não eram lineares e semelhantes para todos, mas sim arranjos distintos com ligações próprias.

Tomemos estes exemplos de números quadrados.



$1 = 1^2 = 1 \qquad 1 + 3 = 2^2 = 4 \qquad 1 + 3 + 5 = 3^2 = 9$

A “raiz” desses números, isto é, a menor disposição espacial que mantém sua forma quadrada é o lado (pois sem este número base, ou fundamento, a sua forma seria outra), nestes casos, 1, 2 e 3, respectivamente – que é, a propósito, a mesma quantidade de pedrinhas correspondentes às diagonais. Nota-se, também, que qualquer número quadrado é composto por dois números triangulares sucessivos, como, por exemplo, o número quadrado 9, que é composto pelos números triangulares 3 e 6.
Tomemos agora o número triangular 15:



$1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Neste caso, a “raiz” é ainda o fundamento base que lhe dá forma, neste caso, 5 (que não só é a quantidade de pontinhos da última linha, assim como do lado, mas também da sua “diagonal”, que neste caso era dito como o menor cateto).
Neste sistema, o “teorema” era explorado através do *gnomon* (esquadro em L), que era sinônimo de números ímpares (a forma do L, ou de um esquadro comum, é justamente o de uma “altura” maior que o “comprimento” da base, ou em termos “numéricos”, de lado com maior quantidade de pontinhos que a base, que assim, somados, dão uma quantidade ímpar). A partir dos números quadrados – ou a partir de triangulares, já que estes compõem os quadrados –, analisava-se a sequência dos quadrados com o deslocamento do *gnomon,* processo equivalente a somar a sequência dos números ímpares. Por exemplo, se partimos do 1, adicionamos o *gnomon* de 3 pontos para obter o número quadrado 4, e depois adicionamos o *gnomon* de 5 pontos, obtendo o número quadrado 9. A tripla surge quando o próprio *gnomon* adicionado é, ele mesmo, um número quadrado: ao adicionar o *gnomon* 9 (que é 3^2) ao quadrado 16 (que é 4^2), você obtém o quadrado 25 (que é 5^2). Portanto, dado que todo número quadrado pode ser separado em dois números triangulares sucessivos, então o quadrado 25 pode ser repartido pelos triangulares 10 e 15. Mas não só isto: por ser parte de uma tripla pitagórica, o quadrado 25 pode ser repartido pelos quadrados 9 e 16.
Uma segunda maneira de conceber o método pitagórico é, começando por números ímpares, associa-se um dado número ao menor dos lados do triângulo que formam o ângulo reto, tomamos o seu quadrado, subtraímos a unidade e dividimos por 2, obtendo o outro lado, que

forma o ângulo reto. Para obter o lado oposto, somamos a unidade novamente ao resultado.

- *Exemplo:* Seja 3 o menor lado. $3^2 = 9$. $9 - 1 = 8$. $8/2 = 4$. $4+1 = 5$. Tripla: (3, 4, 5).

Salienta-se, ainda, que tendo em vista estritamente o estudo de padrões numéricos (corpóreos), o que não podia ser delimitado e contado simplesmente não era considerado um "número" no sentido ontológico. Portanto, casos como o da diagonal do quadrado de lado 1 simplesmente não faziam sentido, dado que não lhes era possível atribuir contagem, sendo uma questão de grandeza. Ora, se um quadrado tem lado 1, isso quer dizer que ele é formado por apenas um pontinho: o número primordial, unidade indivisível que dela se dá todos os outros números, portanto, sendo ela mesma a “raiz” de tudo.[6]

3. A Síntese Euclidiana: O Rigor da Área

A Proposição I-47 dos *Elementos* de Euclides é tida como equivalente ao Teorema de Pitágoras, mas sua abordagem é puramente geométrica. Euclides não interpreta o teorema como uma relação métrica (numérica), mas como uma propriedade das áreas dos quadrados erigidos sobre os lados.

3.1 Requisitos Lógicos: As Proposições I-4 e I-38

A **Proposição I-4** estabelece o critério Lado-Ângulo-Lado (LAL) para a congruência de triângulos: se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo entre eles respectivamente iguais, os triângulos são iguais em todas as suas partes. Esta proposição permite a Euclides provar a igualdade de triângulos "rotacionados" dentro da construção do teorema.
A **Proposição I-38** afirma que triângulos com a mesma base e situados entre as mesmas retas paralelas possuem áreas iguais. Importante notar que, na tradição grega, não se media base e altura para calcular a área numericamente; a equivalência era demonstrada visualmente pela constância da distância entre as paralelas.

3.2 Demonstração da Proposição I-47

- *Proposição: nos triângulos retângulos, o quadrado do lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados dos lados que contêm o ângulo reto.*

A demonstração da I-47 consiste em mostrar que o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. Euclides traça uma reta a partir do ângulo reto, paralela aos lados do quadrado maior, dividindo-o em dois retângulos. Utilizando a **Proposição I-4**, ele prova que os triângulos rotacionados são iguais. Em seguida, pela **Proposição I-38**, demonstra que esses triângulos equivalem a metade das áreas do quadrado e do retângulo correspondentes. Conclui-se, assim, que a área de cada cateto "projeta-se"

---

[6] A narrativa de que a incomensurabilidade da $\sqrt{2}$ não teria desenvolvido uma crise na escola pitagórica pode ser encontrada em ROQUE, 2012.

perfeitamente no quadrado da hipotenusa.

Diretamente do volume I dos *Elementos* de Euclides (HEATH, 1908, p. 100), temos a seguinte demonstração:

> Seja ABC um triângulo retângulo tendo o ângulo BAC reto; Eu digo que o quadrado sobre BC é igual aos quadrados sobre BA, AC.
>
> Pois descreva-se sobre BC o quadrado BDEC, e sobre BA, AC os quadrados GB, HC; [I. 46][7] por A trace-se AL paralela a BD ou CE, e unam-se AD, FC.
>
> Então, visto que cada um dos ângulos BAC, BAG é reto, segue-se que com uma linha reta BA, e no ponto A sobre ela, as duas linhas retas AC, AG não situadas no mesmo lado fazem os ângulos adjacentes iguais a dois ângulos retos; portanto CA está em linha reta com AG. [I. 14][8]
>
> Pela mesma razão BA também está em linha reta com AH.
>
> E, visto que o ângulo DBC é igual ao ângulo FBA: pois cada um é reto: adicione-se o ângulo ABC a cada um; portanto o ângulo total DBA é igual ao ângulo total FBC. [N. C. 2][9]
>
> E, visto que DB é igual a BC, e FB a BA, os dois lados AB, BD são iguais aos dois lados FB, BC respectivamente; e o ângulo ABD é igual ao ângulo FBC; portanto a base AD é igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC. [I. 4]
>
> Ora, o paralelogramo[10] BL é o dobro do triângulo ABD, pois eles têm a mesma base BD e estão nas mesmas paralelas BD, AL. [I. 41][11]
>
> E o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC, pois eles têm novamente a mesma base FB e estão nas mesmas paralelas FB, GC. [I. 41]
>
> [Mas os dobros de iguais são iguais entre si.]
>
> Portanto o paralelogramo BL também é igual ao quadrado GB.
>
> De modo semelhante, se AE, BK forem unidos, o paralelogramo CL também pode ser provado igual ao quadrado HC; portanto o quadrado total BDEC é igual aos dois quadrados GB, HC. [N. C. 2]

---

[7] A proposição I 46 diz:

[8] A proposição I 14 diz:

[9] Sigla refere-se ao axioma da Noção Comum 2: “se a iguais são adicionadas coisas iguais, os totais são iguais." (HEATH, 1908)

[10] Na geometria de Euclides, a terminologia é hierárquica: retângulo é, por definição, um paralelogramo (um quadrilátero com lados opostos paralelos). Euclides utiliza o termo "paralelogramo" porque a propriedade que ele está invocando (Proposição I.41) se apoia justamente neste termo.

[11] A proposição I 41 diz: “se um paralelogramo tem a mesma base que um triângulo e está entre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo”. (HEATH, 1908)

> E o quadrado BDEC é descrito sobre BC, e os quadrados GB, HC sobre BA, AC.
>
> Portanto o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC.
>
> Portanto etc. Q. E. D.

3.3 Generalização: A Proposição VI-31

Posteriormente, Euclides apresenta a **Proposição VI-31**, que afirma que a relação vale para quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo. Esta generalização transcende os quadrados e depende da Teoria das Proporções de Eudoxo, permitindo lidar com o contínuo e o incomensurável. Segue demonstração, como retirada de (MAOR, 2019, p. 41):

> [S]eja o triângulo retângulo ABC, com o ângulo reto em C. Assim como na demonstração da I 47, baixamos a perpendicular CD de C para a hipotenusa AB. Visto que AB $\perp$ CD e AC $\perp$ CB, temos $\angle$DAC = $\angle$DCB. Portanto, os triângulos ADC e CDB são semelhantes entre si e ao triângulo todo ACB. Segue-se que AB/AC = AC/AD e AB/BC = BC/BD, de onde obtemos, por multiplicação cruzada, $AC^2 = AB \times AD$ e $BC^2 = AB \times BD$. Somando estas equações, temos $AC^2 + BC^2 = AB \times AD + AB \times BD = AB \times (AD + BD)$. But AD + BD = AB, so we finally get AC2 +BC2=AB×AB=AB2.

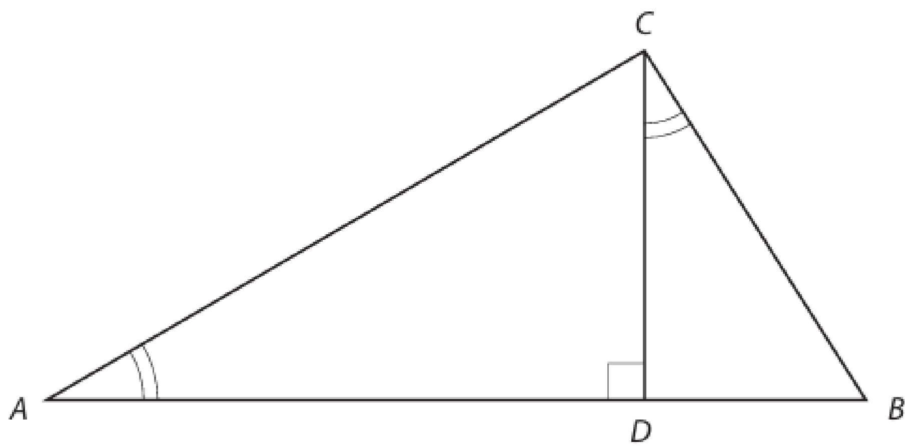


Figure 3.6. Proof of Proposition VI 31

[12]

4. Expansão Cosmográfica e Mecânica

Com a formalização euclidiana, o Teorema de Pitágoras deixou de ser apenas um resultado da geometria plana para se tornar a "régua" fundamental para a medição do universo físico e astronômico.

[12] MAOR, 2019, p. 42.

4.1 Ptolomeu e a Trigonometria das Cordas

Ptolomeu utilizou o teorema como base para o desenvolvimento da trigonometria antiga. O Teorema de Pitágoras emerge como um caso especial do Teorema de Ptolomeu[13] quando o quadrilátero inscrito é um retângulo. Esta fundamentação permitiu a construção de tabelas de cordas precisas, essenciais para mapear o movimento dos astros.
Segue demonstração, como retirada de (MAOR, 2019, p. 104):

Usando um lado, digamos AB, como o lado inicial, construa $\angle ABE = \angle DBC$. Os ângulos CAB e CDB também são iguais, possuindo a corda comum BC. Portanto, os triângulos ABE e DBC são semelhantes, possuindo dois pares de ângulos iguais. Disto decorre que AE / AB = DC / DB, de onde obtemos

$$AE \times DB = AB \times DC \tag{2}$$

Se agora adicionarmos $\angle EBD$ a ambos os lados da equação $\angle ABE = \angle DBC$, obtemos $\angle ABD = \angle EBC$. Mas os ângulos BDA e BCA também são iguais, possuindo a corda comum AB. Portanto, os triângulos ABD e EBC são semelhantes; logo, AD / DB = EC / CB, e assim

$$EC \times DB = AD \times CB \tag{3}$$

Finalmente, somando as equações (2) e (3), obtemos $(AE + EC) \times DB = AB \times DC + AD \times CB$; e substituindo AE + EC por AC, obtemos o resultado exigido (note que todos os lados são segmentos de reta não direcionais, portanto BD = DB, etc.).

O teorema de Pitágoras segue-se agora como um caso especial se deixarmos que o quadrilátero ABCD seja um retângulo [fig. abaixo]; então todos os quatro vértices são ângulos retos e, além disso, AB = CD, BC = DA e AC = BD. O teorema de Ptolomeu diz então,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

[13] O teorema segue da seguinte maneira: "O retângulo contido pelas diagonais de qualquer quadrilátero inscrito em um círculo é igual à soma dos retângulos contidos pelos pares de lados opostos." (MAOR, 2019, p. 102)

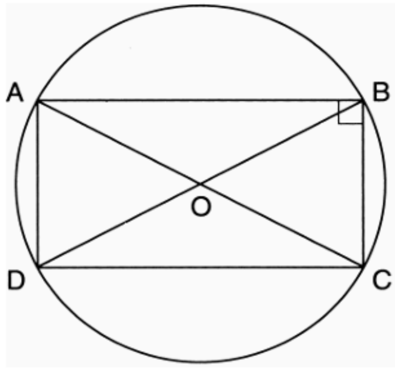


Figure 8.6. The Pythagorean theorem as a special case of Ptolemy's theorem [14]

4.2 Copérnico: A Régua do Cosmos

Copérnico (1543) identificou que a questão principal da astronomia residia em como obter os lados a partir dos ângulos e vice-versa. Para ele, o Teorema de Pitágoras serviu como equação operacional para calcular distâncias no espaço: no Livro I, Capítulo 12 de *De Revolutionibus*, ele demonstra que, em triângulos retângulos inscritos em semicírculos, o quadrado do diâmetro é igual à soma dos quadrados dos lados. Ao converter o teorema em uma ferramenta métrica, ele pôde transformar observações angulares em distâncias planetárias reais.

Dessa forma, ao padronizar o diâmetro do círculo do universo com um valor imenso e fixo (Copérnico frequentemente usava partes de um diâmetro de 100.000 ou 200.000 unidades para garantir precisão decimal), ele transformou o Teorema de Pitágoras em um algoritmo. Se ele observasse o ângulo de um planeta no céu e soubesse a medida de uma das cordas nas suas tabelas, ele usava a equação acima para deduzir imediatamente a outra corda (a distância).

Colocando em equação, relevando o anacronismo da notação: dado um círculo de diâmetro D e raio r, considere um arco de círculo α, tal que ele tenha uma corda associada[15]. O que falta para completar o semicírculo é o arco suplementar (180° - α). Seja c a velocidade da luz no vácuo, então, temos sempre a relação geométrica

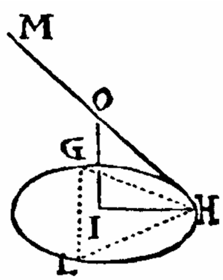
$$D^2 = crd^2(\alpha) + crd^2(180° - \alpha)$$

4.3 Kepler: O "Áureo Teorema" e a Harmonia das Esferas

[14] MAOR, 2019, p. 105

[15] Não havia tido ainda a inserção corrente da notação de senos e cossenos na época de Copérnico, que foi ganhar popularidade com Euler em 1748, e, portanto, assim como Ptolomeu, ele usava a ideia de "cordas" de círculo, e se apoiava em extensas tabelas numéricas pré-calculadas (1978). Para adaptação, interpreta-se o seno de um ângulo como a metade da corda do dobro do ângulo. Associamos aqui a corda de um arco α com a notação *crd(α)*.

Kepler (1596), um dos últimos pitagóricos (ao menos, autoproclamado) elevou o teorema ao status de objeto místico e funcional, chamando-o até de "áureo teorema de Pitágoras". No Capítulo XIII do *Mysterium Cosmographicum*, ele o utilizou para calcular as distâncias entre as esferas celestes através de sólidos platônicos. Kepler demonstrava que o raio da esfera inscrita (IO) podia ser encontrado subtraindo o quadrado do raio do círculo da base (HI) do quadrado do raio da esfera circunscrita (HO), conforme a *Proposição I-47*.
Para o astrólogo alemão, provar o espaçamento entre os planetas era um problema de geometria tridimensional (sólidos platônicos aninhados dentro de esferas). Para resolver isso, ele precisava "fatiar" esses sólidos 3D para encontrar um triângulo retângulo 2D lá dentro e aplicar Euclides.
A ideia seguia de tal maneira: imagine um sólido platônico (como um cubo ou um tetraedro) perfeitamente centrado no universo. Seja o ponto O (Sol) o centro do sistema e o ponto de origem das esferas; o ponto I (centro da face) onde a esfera interior (inscrita) toca o sólido platônico, e a linha que liga o centro do universo a este ponto, IO, é o raio da órbita do planeta interior; o ponto H (vértice) uma das quinas do sólido platônico, onde a esfera exterior (circunscrita) o toca, e a linha que liga o centro do universo a este ponto, HO, é o raio da órbita do planeta exterior; o segmento HI (raio de círculo da base) a distância sobre a face plana do sólido, do centro da face até o vértice.
[16]



O triângulo ∠HIO é um triângulo retângulo, com o ângulo reto localizado exatamente no ponto I. Isso ocorre porque o raio que vai do centro à face (IO) é sempre perpendicular a esta face. Como a linha HO (raio maior) é a hipotenusa, a relação métrica fundamental que rege o cosmos de Kepler é: $HO^2 = IO^2 + HI^2$
Assim, o Teorema de Pitágoras funcionou, para Kepler, como a ponte entre o mundo geométrico ideal (os sólidos) e a realidade física observada (as distâncias planetárias).

5. O Limite Físico e a Nova Geometria

A transição da geometria clássica para a física moderna exigiu que o Teorema de Pitágoras deixasse de ser uma forma ideal para se tornar uma métrica física, sujeita às leis da matéria e à curvatura do espaço.

5.1 Galileu: A Quebra da Semelhança (Lei do Quadrado-Cubo)

Galileu Galilei (1638), em *Discursos e Demonstrações Matemáticas em Torno de Duas Novas Ciências*, promoveu a "fisicalização" da forma euclidiana. Ele demonstrou que a semelhança geométrica pura não é acompanhada por uma semelhança física quando o próprio peso é considerado. Através da *Lei do Quadrado-Cubo*, Galileu provou que o peso de uma estrutura cresce proporcionalmente ao cubo das dimensões homólogas, enquanto sua resistência (área transversal) cresce apenas ao quadrado. Ou seja, enquanto que na

[16] KEPLER, 1981, p. 152.

matemática pura segue de N. C. 2 e de I-47 que ao multiplicar as dimensões de um triângulo retângulo, o ângulo se preserva e o teorema permite esticar a figura ao infinito sem nunca perder sua forma, isto não ocorre com um triângulo real, digamos, construído usando vigas de madeira ou ferro, tal que segue que ao multiplicar suas dimensões, digamos, por 10, a resistência das vigas aumenta exponencialmente em 100 vezes, e o volume e peso em 1000 vezes. O triângulo se curva, com as vigas não aguentando seu próprio peso: a viga reta da hipotenusa "embarriga" e afunda para baixo, e o ângulo que deveria ser de 90° é esmagado e se deforma.
Esta relação impõe um limite físico à perfeição geométrica: as proporções de um ser vivo ou de uma estrutura não podem ser escaladas indefinidamente sem que a geometria colapse sob o próprio peso. Assim, o triângulo retângulo de Pitágoras deixa de ser uma forma neutra para se tornar uma medida de tensão suportada, onde a natureza impõe limites à abstração matemática, pois que passou-se a entender que na física a forma não é independente da matéria: se você construir um triângulo pitagórico gigante com matéria real, a gravidade vai deformar as retas e os ângulos. O teorema puro falha em descrever o objeto físico, porque ele não leva a massa e a gravidade em consideração.
Podemos considerar este dado como impressionante levando em conta o tempo que levou para atestamos que o Teorema de Pitágoras (e todas as demais ferramentas matemáticas) são, de fato, instrumentos para expressão de representações físicas e não intrínsecas aos corpos físicos, como os pitagóricos pensavam.

5.2 Einstein e a Generalização da Métrica (ds^2)

O passo decisivo na evolução do teorema ocorreu com Albert Einstein. A transição da geometria euclidiana clássica para a formulação relativística exige o abandono do espaço rígido tradicional. No cenário clássico, o Teorema de Pitágoras descreve uma distância invariante em um espaço plano e tridimensional, na qual a "hipotenusa" geométrica é dada pela soma dos quadrados das coordenadas ortogonais: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Contudo, como Abraham Pais narra em suas análises biográficas (2005), Albert Einstein percebeu que essa rigidez falhava ao descrever a física em sistemas rotativos e acelerados, onde fenômenos como a contração de Lorentz[17] quebram as regras de Euclides de semelhança geométrica. Logo, na Relatividade Especial, o teorema precisou ser estendido para quatro dimensões no espaço de Minkowski, onde a "hipotenusa quadridimensional" ou intervalo (ds^2) é dado por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$. Este modelo ainda preserva uma forma "pseudo-euclidiana" de Pitágoras, mas integra o tempo como uma dimensão inseparável.

5.3 Do Plano Euclidiano ao Espaço-Tempo Riemanniano

A revolução completa manifesta-se na Relatividade Geral. Einstein percebeu que a geometria

---

[17] Efeito da Relatividade Especial onde o comprimento de um objeto em movimento relativo (v) a um observador é medido como sendo mais curto na direção do movimento, segundo a equação
$L = L_0 * \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ (PAIS, 2005).

euclidiana não poderia sustentar as leis da física em sistemas acelerados ou sob influência da gravidade. Agora, o teorema deixa de usar coeficientes estáticos e adota o invariante quadrático fundamental da geometria de Riemann. Em um espaço-tempo curvo, os multiplicadores unitários da equação de Minkowski não são mais globais; eles dependem intrinsecamente da distribuição local de massa e energia. A métrica geométrica adquire a forma tensorial descrita pela equação $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ (*Tensor Métrico*) – uma generalização do teorema pitagórico. Ao abrirmos essa soma matemática para as quatro dimensões espaciais e temporais, revelamos a estrutura polinomial desta "hipotenusa curvilínea", composta por dez coeficientes dinâmicos:

$$ds^2 = g_0(cdt)^2 + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2 + 2g_{01}(cdt)dx + 2g_{02}(cdt)dy + \dots$$

Diferente da "geometria de pedrinhas" discreta e fixa dos pitagóricos antigos, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ estabelece campos contínuos que corrigem constantemente a relação de Pitágoras em cada ponto do espaço-tempo devido à presença de massa e energia. Graças ao vocabulário geométrico introduzido por Marcel Grossmann, Einstein pôde nos mostrar com seus cálculos que o Teorema de Pitágoras clássico é apenas uma aproximação local — perfeitamente válido apenas em escalas infinitamente pequenas —, enquanto a métrica global do cosmos é uma malha maleável, ditada não por axiomas matemáticos absolutos, mas pela própria presença da matéria (PAIS, 2005).

6. Discussão Final: Perspicuidade e Representação

A trajetória do Teorema de Pitágoras revela uma mudança profunda na forma como representamos a realidade física. Segundo North, a eficácia de uma prova matemática está ligada à sua "perspicuidade"[18] — a capacidade de uma imagem ou símbolo de tornar a verdade imediatamente compreensível. Para os pitagóricos, podemos dizer que a perspicuidade residia na observação visual de padrões em pedrinhas organizadas (*gnomons*); a verdade era "vista" no arranjo espacial.

A demonstração euclidiana da Proposição I-47, embora rigorosa, foi criticada por filósofos como Arthur Schopenhauer, que a descrevia como uma "armadilha" onde linhas são traçadas sem que se saiba o porquê, forçando o consentimento do leitor atônito. Segundo Tobias Dantzig, a interpretação literal de Euclides restringia o teorema a uma propriedade das áreas de quadrados, em vez de uma relação métrica pura entre lados (MAOR, 2019). Para os gregos, um produto era sempre uma área de retângulo; eles não possuíam a noção moderna

[18] North (2026) enfatiza que "há uma noção *sui generis* de perspicuidade de representação na física, a qual não é apenas uma questão de verdade ou precisão, mas é, não obstante, uma característica objetiva, e que é uma faceta importante da nossa teorização física"; e que "uma representação que é relativamente perspícua é aquela que não apenas é verdadeira, mas também possui uma qualidade distintiva no que diz respeito à correspondência ou compatibilidade com aquilo que está sendo representado". Em outro momento: "A representação mais perspícua [...] geralmente produz a melhor explicação dos fenômenos, pois invoca o que está realmente ocorrendo fisicamente, em vez de formular as coisas em termos de artifícios matemáticos indiretos".

de operação algébrica abstrata.
A modernidade operou uma transição da imagem para o símbolo. Na Relatividade de Einstein, a perspicuidade visual do triângulo retângulo é substituída pela perspicuidade operacional dos tensores. O Teorema de Pitágoras tornou-se um invariante quadrático fundamental, perdendo sua "corporeidade" visual em favor de uma precisão funcional que descreve o invisível tecido do espaço-tempo. Esta mudança reflete o amadurecimento da física: passamos de uma ciência que imita as formas do mundo para uma ciência que opera sobre as leis que as geram.
Isto tudo é muito lindo de se professar. Mas deixando toda essa predisposição realista de lado, cabe questionarmos: há, de fato, graus objetivos – isto é, como North argumenta, de fator não-pragmático – de perspicuidades? Ou melhor, podemos dizer que existem aparatos matemáticos que intrinsecamente, independente do cientista que o emprega, são mais alinhados com a estrutura intrínseca de determinada representação física, favorecendo-nos um olhar mais perspicaz? Analisar um objeto cilíndrico por coordenadas cilíndricas ao invés de polares, por exemplo, é mais perspícuo, objetivamente, independente da pessoa que a utiliza?
Esta é uma das mais recentes dúvidas que a filosofia da física está a cutucar – questão que o desenvolvimento histórico que podemos ver com estas selecionadas fases do emprego do Teorema de Pitágoras nos rebate de forma (pedindo o perdão da palavra) perspicaz.

7. Conclusão

Este artigo foi construído com o intuito de traçar diferentes fases de um teorema milenar, que perfurou bolhas culturais e geracionais. Dos babilônios aos chineses aos pitagóricos aos modernos; da física matemática contemporânea ao ensino fundamental: $a^2 + b^2 = c^2$ é uma relação matemática básica que permeia até os mais profundos cálculos e as mais profundas interpretações da matemática como sintaxe, e da matemática como realidade.
O Teorema de Pitágoras não é uma "lei divina" imutável, mas um modelo geométrico que evoluiu com a nossa compreensão do universo. Ele percorreu um caminho extraordinário: de uma técnica de agrimensura babilônica a uma ontologia mística pitagórica; de um cálculo de áreas euclidiano a uma régua cosmográfica para Copérnico e Kepler; e, finalmente, de um limite físico para Galileu a uma métrica dinâmica para Einstein.
Compreender esta evolução nos ensina que a geometria não é apenas o palco onde a física acontece, mas a própria linguagem que define o que é possível na natureza – seja do mundo, ou seja da nossa episteme. O teorema permanece como o elo fundamental entre o discreto e o contínuo, lembrando-nos que, mesmo nas escalas mais vastas da relatividade geral, a verdade do universo ainda pode ser rastreada até a simples relação entre os lados de um triângulo retângulo. E mais do que tudo isso: havendo mais de 400 demonstrações diferentes, demonstram que sua versatilidade em concepção e aplicabilidade permite a qualquer um, desde uma criança ao presidente do Estado Unidos, poder dizer: “eu sei fazer, ao menos *uma* demonstração matemática”; e este pode não ser o passo que dê paz ao mundo ou resolva nossas questões ontológicas, mas definitivamente nos coloca mais adiante cognitivamente.

8. Referências

COPERNICUS, Nicolaus. *De Revolutionibus Orbium Coelestium, Libri VI*. Tradução e notas de Edward Rosen. Warsaw: Polish Scientific Publications, 1978

EUCLIDES. *Elementos de Euclides, Vol. I, Introduction and Books I, II*. Tradução e notas de Thomas L. Heath. Cambridge: University Press, 1908.

GALILEI, Galileo. *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno à due nuove scienze*. In: Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid, 1965.

KEPLER, Johannes. *Mysterium Cosmographicum: The Secret of the Universe*. Tradução e notas de E. J. Aiton. Nova Iorque: Abaris Books, 1981.

LOOMIS, Elisha Scott. *The Pythagorean Proposition*. NCTM, 1940.

MAOR, Eli. *The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History*. Princeton University Press, 2019.

NORTH, Jill. *On Perspicuous Representation on Physics*. In: Journal for General Philosophy of Science, 2026.

PAIS, Abraham. *'Subtle is the Lord...': The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford University Press, 1982; 2005.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar, 2012.