



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA

Felipe Rosa Grams

**O CÁLCULO DO VOLUME DA ESFERA:
DE ARQUIMEDES ATÉ A MATEMÁTICA MODERNA**

FLORIANÓPOLIS

2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA

Felipe Rosa Grams

**O CÁLCULO DO VOLUME DA ESFERA:
DE ARQUIMEDES ATÉ A MATEMÁTICA MODERNA**

Trabalho da graduação apresentado na disciplina
MTM7305-05222 (20261) - História da
Matemática.

FLORIANÓPOLIS

2026

SUMÁRIO

SUMÁRIO	3
Resumo	4
1 INTRODUÇÃO	5
2 CONTEXTO HISTÓRICO	5
3 MÉTODO DE ARQUIMEDES	6
3.1 Lei das Alavancas.....	6
3.2 Volume da Esfera segundo Arquimedes.....	8
4 Método moderno	11
5 Comparação	14
6 Conclusão	14
Referências	15

RESUMO

A matemática, desde a Antiguidade, tem desempenhado papel fundamental na construção do pensamento científico, destacando-se, nesse processo, as contribuições da matemática grega, marcada pelo rigor lógico e pelo uso de demonstrações geométricas. Nesse contexto, Arquimedes sobressai como um dos principais nomes, especialmente por seus estudos relacionados ao cálculo de áreas e volumes. Entre suas realizações mais relevantes está a determinação do volume da esfera, obtida por meio de métodos geométricos e do uso de princípios mecânicos, como a Lei das Alavancas, evidenciando uma notável capacidade de abstração e intuição matemática. Embora não dispusesse do formalismo do cálculo moderno, seus procedimentos antecipam ideias fundamentais, como a noção de limite.

Diante disso, o presente trabalho tem como objetivo analisar o método de Arquimedes para o cálculo do volume da esfera e estabelecer um diálogo com o cálculo integral moderno. Para tanto, são abordados aspectos históricos, conceituais e metodológicos, evidenciando as diferenças entre a abordagem geométrica clássica e a formulação analítica baseada em integrais. A partir dessa comparação, observa-se a evolução da matemática, que passa de métodos específicos e construtivos para técnicas gerais e sistematizadas, ampliando significativamente seu alcance e precisão.

Palavras-chave: História da Matemática. Volume da esfera. Arquimedes. Cálculo integral.

1 INTRODUÇÃO

A matemática, ao longo da história, tem sido uma das principais ferramentas para compreender o mundo, evoluindo conforme novas ideias e necessidades surgem. Na Antiguidade, especialmente na Grécia, ela ganhou um caráter mais rigoroso, baseado em demonstrações lógicas e construções geométricas, que influenciaram profundamente o desenvolvimento do pensamento científico. Nesse cenário, destaca-se Arquimedes, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, conhecido por sua habilidade em resolver problemas complexos com criatividade e precisão.

Entre suas contribuições mais notáveis está o cálculo do volume da esfera, um problema que, à primeira vista, parece simples, mas que exigiu uma abordagem bastante engenhosa para ser resolvido. Arquimedes utilizou comparações entre sólidos e recorreu a ideias da mecânica, como a Lei das Alavancas, para chegar a seus resultados. Mesmo sem dispor das ferramentas do cálculo moderno, ele conseguiu desenvolver raciocínios que hoje reconhecemos como próximos do conceito de limite, evidenciando a profundidade de sua intuição matemática.

Diante disso, este trabalho busca analisar o método utilizado por Arquimedes e relacioná-lo com o cálculo integral moderno, mostrando como a matemática evoluiu ao longo do tempo. Ao comparar essas duas abordagens, pretende-se destacar não apenas as diferenças técnicas, mas também a continuidade das ideias, evidenciando como conceitos antigos serviram de base para o desenvolvimento de ferramentas mais gerais e precisas na matemática atual.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Arquimedes nasceu por volta de 287 a.C., na cidade de Siracusa, importante colônia grega na Sicília, sendo filho do astrônomo Fídias. Inserido em um contexto de intensa produção intelectual da Magna Grécia, é provável que tenha realizado parte de sua formação em Alexandria, onde teve contato com a tradição matemática euclidiana, marcada pelo rigor lógico e pelas demonstrações geométricas sistemáticas (HEATH, 2002). Após esse período,

retornou a Siracusa, onde passou a dedicar-se integralmente à investigação científica, mantendo relações com estudiosos e com a corte do rei Hieron (HEATH, 2002).

A obra de Arquimedes destaca-se pela profundidade e originalidade, abrangendo áreas como geometria, mecânica e hidrostática. Seus estudos sobre áreas e volumes de figuras curvas, especialmente presentes em *Sobre a Esfera e o Cilindro*, são considerados marcos fundamentais que antecipam ideias do cálculo integral moderno (HEATH, 2002). Além disso, no tratado *O Método*, o próprio autor revela que muitas de suas descobertas foram inicialmente obtidas por meio de raciocínios mecânicos, utilizando, por exemplo, a Lei das Alavancas, antes de serem formalizadas por demonstrações geométricas rigorosas. Nesse sentido, afirma: “Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria” (ARQUIMEDES, apud ÁVILA, 2010, p. 3).

Entre suas contribuições mais célebres está a relação entre o volume da esfera e o do cilindro que a circunscribe, resultado que o próprio Arquimedes considerava sua maior realização. Segundo Plutarco, ele teria solicitado que essa relação fosse representada em seu túmulo, evidenciando o valor atribuído à descoberta: “pediu a seus parentes que [...] mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera” (PLUTARCO, apud ÁVILA, 2010, p. 1). Sua morte, ocorrida em 212 a.C. durante a tomada de Siracusa, também se tornou simbólica: de acordo com relatos históricos, ele foi morto por um soldado enquanto estava concentrado em um problema geométrico, o que reforça sua dedicação extrema à ciência (HEATH, 2002). Assim, o contexto histórico de Arquimedes evidencia não apenas um período de grande desenvolvimento intelectual, mas também o surgimento de ideias que anteciparam conceitos fundamentais da matemática moderna.

3 MÉTODO DE ARQUIMEDES

3.1 Lei das Alavancas

A **Lei das Alavancas** é essencial para compreendermos como Arquimedes calculou o volume da esfera. Ao imaginar uma esfera e um cone equilibrando um cilindro em uma balança idealizada, o siracusano transformou a mecânica em uma ferramenta de descoberta,

permitindo-lhe enxergar proporções que os métodos de demonstração da época não permitiam. Para melhor compreendermos seu raciocínio, segue abaixo os postulados e proposições da tradução do trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos ou os Centros de Gravidade dos Planos*, de Arquimedes, apresentados conforme a tradução de Henrique B. Cardoso, Paulo de Tarso C. Freire e Josué Mendes Filho, que se baseia na edição clássica de Thomas L. Heath (1952).

Postulado 1. *Pesos iguais a distâncias iguais estão em equilíbrio, e pesos iguais a distâncias desiguais não estão em equilíbrio, mas pendendo para o lado do peso que está a maior distância.*

Postulado 2. *Se, quando pesos a certas distâncias estão em equilíbrio, alguma coisa foi adicionada a um dos pesos, eles não ficam [mais] em equilíbrio, mas inclinados para o peso ao qual foi feita a adição.*

Postulado 3. *Similarmente, se alguma coisa é tirada de um dos pesos, eles não ficam em equilíbrio, mas pendendo para o peso do qual não foi nada tirado.*

Postulado 4. *Quando figuras planas semelhantes e iguais coincidem quando sobrepostas uma sobre a outra, seus centros de gravidade coincidem do mesmo modo.*

Postulado 5. *Em figuras que são desiguais, mas similares, seus centros de gravidade estarão situados similarmente. Por pontos situados similarmente em relação a figuras similares, entende-se pontos tais que se as linhas retas forem traçadas a partir deles, formando ângulos iguais, elas formam ângulos iguais com os lados correspondentes.*

Postulado 6. *Se magnitudes [grandezas, extensões] a certas distâncias estão em equilíbrio, outras grandezas iguais a elas também estarão em equilíbrio nas mesmas distâncias.*

PROPOSIÇÃO 1: *Pesos que se equilibram a distâncias iguais são iguais.*

PROPOSIÇÃO 2: *Pesos desiguais a distâncias iguais não se equilibram e irão inclinar para o lado do peso maior.*

PROPOSIÇÃO 3: *Pesos desiguais irão se equilibrar a distâncias desiguais com o peso maior estando à menor distância*

PROPOSIÇÃO 4: *Se dois pesos iguais não têm o mesmo centro de gravidade 5 , o centro de gravidade de ambos, tomados juntos, estão no ponto médio de uma linha unindo seus centros de gravidade*

PROPOSIÇÃO 5: *Se três magnitudes iguais têm seus centros de gravidade sobre uma linha reta a distâncias iguais, o centro de gravidade do sistema irá coincidir com aquele de magnitude no meio.*

PROPOSIÇÕES 6 e 7: *Se duas magnitudes são comensuráveis 6 [Prop. 6] ou incomensuráveis 7 [Prop. 7], elas se equilibram a distâncias reciprocamente (inversamente) proporcionais às magnitudes.*

PROPOSIÇÃO 8: *Se AE é uma magnitude cujo centro de gravidade é C , e AD uma parte dela cujo centro de gravidade é F , então, o centro de gravidade da parte restante será um ponto G , sobre FC tal que resulta: $\frac{GC}{CF} = \frac{AD}{DE}$*

O princípio nos garante que existe equilíbrio quando $p_1 \cdot d_1 = p_2 \cdot d_2$ onde p_1 e p_2 são os pesos que se encontram no sistema e d_1 e d_2 são as distâncias que esses pesos se encontram do fulcro respectivamente.

3.2 Volume da Esfera segundo Arquimedes

Segundo Boyer (2010, p.94), o teorema do volume da esfera, assim como a quadratura da parábola também foi demonstrado pelo método das alavancas. Sendo assim enunciado:

Teorema:

1. *O volume de qualquer esfera é quatro vezes o do cone com base igual ao círculo máximo da esfera e com altura igual ao raio da mesma esfera; e*
2. *O volume do cilindro com base igual ao círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro é $1\frac{1}{2}$ vezes o volume da esfera.*

Para esta demonstração, nos sustentaremos na demonstração presente de Fátima Vinagre

Demonstração: Considere os três sólidos seguintes: uma esfera gerada pela rotação do seu círculo maior de raio r e centro O' em torno do seu diâmetro, um cone de raio e altura iguais ao diâmetro da esfera e um cilindro de raio e altura iguais ao diâmetro da esfera cujo eixo coincide com o diâmetro da esfera, dispostos conforme a figura 1.

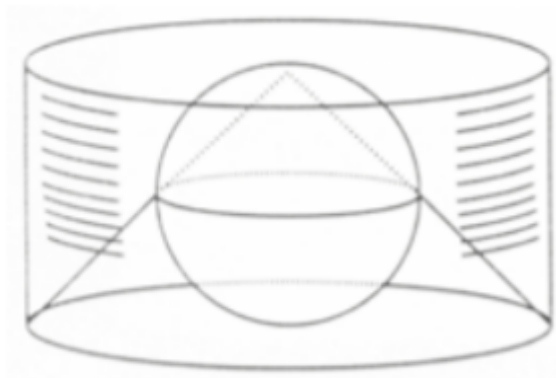


Figura 1 - Elaborada por Fátima Vinagre

Tome o vértice do cone como o ponto de suspensão dos três sólidos. Tome o segmento de reta HC como sendo a alavanca e considere que o fulcro se encontra no vértice do cone. Seja A o fulcro.

Agora, faça um corte transversal nos três sólidos, atravessando o fulcro, bem como o círculo máximo da esfera de centro O' e suponha que os sólidos estão suspensos neste ponto.

Em seguida, faça três cortes nos sólidos segundo planos paralelos ao plano da base do cilindro, tais que o cilindro fique dividido em quatro partes iguais e seccionando AC em quatro partes iguais, sendo S , O' e G os pontos de interseção dos planos com o eixo de rotação do cilindro. Denote por O e P os pontos de interseção do círculo com a reta MR e Q e N os pontos de interseção do segmento de reta MR com o triângulo $\triangle AEH$, e considere-se o triângulo $\triangle AOC$ como na imagem abaixo:

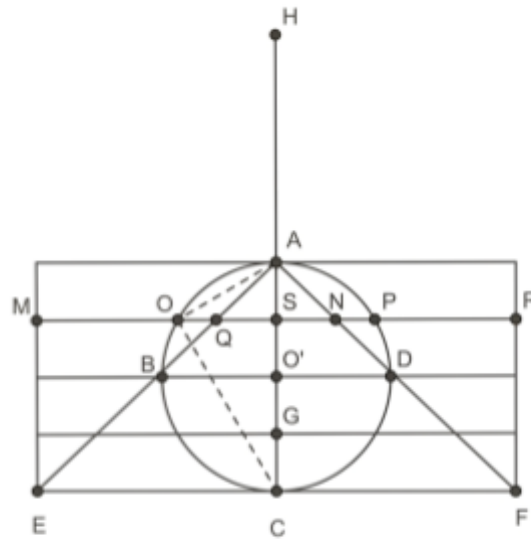


Figura 2 - Elaborada com Gemini

Assim sendo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{AS}{AC} &= \frac{AS}{AC} \cdot \frac{AC}{AC} \\ &= \frac{AS \cdot AC}{(AC)^2} = \frac{AS \cdot (AS + SC)}{(AC)^2} = \frac{(AS)^2 + AS \cdot SC}{(AC)^2} \end{aligned}$$

Como AC e OP são cordas que se intersectam no ponto S, temos que $AS \cdot SC = OS \cdot SP$, e $OS = SP$, Temos

$$\frac{AS}{AC} = \frac{(AS)^2 + OS \cdot SP}{(AC)^2} = \frac{(AS)^2 + (OS)^2}{(AC)^2}$$

$$\text{e, portanto, } AS \cdot (AC)^2 = AC \cdot (AS)^2 + (OS)^2. \quad (1)$$

Por construção, tem-se que $AH = AC = MS$, atendendo a que o triângulo ΔAQS é isósceles (porque os ângulos $\angle QAS$ e $\angle AQS$ têm as mesmas amplitudes, são ambos de 45°), tem-se que $QS = AS$. E, a igualdade (1) é equivalente a $AS \cdot (MS)^2 = AH \cdot (QS)^2 + (OS)^2$, ou seja,

$$\frac{AS}{AH} = \frac{(QS)^2 + (OS)^2}{(MS)^2} \Leftrightarrow \frac{AS}{AH} = \frac{\pi(QS)^2 + \pi(OS)^2}{\pi(MS)^2}$$

De fato, pela lei da alavanca, a relação acima nos diz que os círculos de raios QS e OS , quando transferidos para H , e o círculo de raio MS suspenso no ponto S ou seja, a uma distância horizontal do fulcro igual a $\frac{r}{2}$.

Interpretando o cilindro como a união infinita dos círculos de raio MS , o cone como a união infinita dos círculos de raio QS e a semiesfera como a união infinita dos círculos de raio igual a OS , com S variando de A até O' Podemos concluir que o equilíbrio da alavanca não é perturbado se remontarmos os sólidos e os colocássemos suspensos seguinte forma: a semiesfera e o cone na extremidade H da alavanca e o cilindro no ponto de suspensão S tal que AS é igual a r e AH é igual a $2r$.

Definindo os volumes da semiesfera por V_s , do cone por V_c e do cilindro por V_i , temos que como a alavanca se mantém equilibrada com a suspensão dos sólidos, temos a seguinte relação:

$$\frac{V_c + V_s}{V_i} = \frac{AO'}{AH} = \frac{r}{2r} \Leftrightarrow \frac{V_c + V_s}{V_i} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Sabendo que $V_c = \frac{1}{3}\pi r^3$ e $V_i = 2\pi r^3$, realizando a substituição em (2) e isolando V_s , temos que:

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^3 + V_s}{2\pi r^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow V_s = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$\Leftrightarrow V_s = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Como o volume da esfera inicial é o dobro do volume desta semiesfera, podemos concluir que o volume da esfera inicial é $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

4 Método moderno

O cálculo integral permite calcular o volume da esfera.

Definição 2.1: Partição de um Intervalo: Uma partição P em um intervalo [a,b] é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ em que $a = x_0 < x_1 < x_2, \dots < x_n = b$.

Uma partição P de [a,b] divide [a,b] em n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, \dots, n$.

Definição 2.2: Soma de Riemann: Sejam f uma função definida em [a,b] e $P: a = x_0 < x_1 < x_2, \dots < x_n = b$ uma partição de [a,b]. Seja c_i um número escolhido arbitrariamente e pertencente a $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, \dots, n$. Então, define-se *soma de Riemann* de f, relativa à partição P e a cada c_i da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$$

Definição 2.3: Integral de Riemann: Sejam f uma função definida em [a,b] e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ tende a L, quando o $\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0$ e escrevemos

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que que só dependa de ε , mas não dá particular escolha dos c_i , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

para toda partição P de [a,b], com $\text{máx } \Delta x_i < \delta$.

Com L existindo e sendo único, denomina-se Integral de Riemann de f em [a,b] e indica-se por $\int_a^b f(x)dx$. Por definição

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

Teorema: Sejam f, g integráveis em $[a,b]$ e k uma constante. Então

$$a) \quad f+g \text{ é integrável em } [a,b] \text{ e } \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$b) \quad kf \text{ é integrável em } [a,b] \text{ e } \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

$$c) \quad \text{Se } f(x) \geq 0 \text{ em } [a,b], \text{ então } \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

d) Se $c \in]a, b[$ e f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$ então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo: Se f é integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Definição 2.4: Volume: Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_{xy} passando por x e perpendicular ao eixo x , é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o volume de S é

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

Se colocarmos a esfera de modo que o seu centro se encontre na origem, então o plano P_x intercepta a esfera em um círculo cujo raio é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Portanto, a área da secção transversal é

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Usando a definição de volume com $a = -r$ e $b = r$, temos

$$V = \int_{-r}^r A(x)dx = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2)dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^r \pi(r^2 - x^2) dx \\
&= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) \\
&= \frac{4}{3} \pi r^3
\end{aligned}$$

5 Comparação

O método de Arquimedes para determinar volumes, especialmente o da esfera, baseava-se em uma combinação engenhosa de geometria e raciocínio mecânico. Ao comparar a esfera com um cilindro e um cone de mesmas dimensões, ele utilizou relações de equilíbrio (inspiradas na Lei das Alavancas) para demonstrar que o volume da esfera correspondia a dois terços do volume do cilindro circunscrito. Esse procedimento, embora extremamente rigoroso para a época, dependia de construções específicas e de comparações indiretas, sem o uso de uma linguagem algébrica formal ou do conceito explícito de limite.

Em contraste, o cálculo integral moderno resolve o mesmo problema por meio de uma abordagem sistemática e generalizável. A esfera é decomposta em infinitos elementos infinitesimais — como discos ou cascas cilíndricas — e seu volume é obtido pela soma (integral) desses elementos ao longo de um intervalo. Esse método não depende de analogias geométricas particulares, pois se apoia em um formalismo bem definido, no qual o conceito de limite garante rigor e precisão. Assim, enquanto o método de Arquimedes é mais construtivo e geométrico, o cálculo integral é abstrato, algébrico e aplicável a uma ampla gama de situações.

6 Conclusão

A análise comparativa evidencia a evolução da matemática ao longo do tempo, passando de estratégias geométricas intuitivas para métodos analíticos altamente formalizados. Arquimedes, ao utilizar comparações e princípios físicos, antecipou ideias fundamentais que mais tarde seriam incorporadas ao cálculo, ainda que de maneira não formalizada. Seu trabalho demonstra como a busca por rigor já estava presente, mesmo antes da consolidação dos conceitos modernos.

Com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, especialmente a partir do século XVII, essas intuições foram organizadas em um sistema coerente baseado em limites, derivadas e integrais. Isso permitiu transformar procedimentos específicos em técnicas gerais, capazes de resolver não apenas problemas clássicos, mas também novos desafios em diversas áreas da ciência.

Dessa forma, a transição do método de Arquimedes para o cálculo integral simboliza uma mudança profunda na forma de fazer matemática: de construções geométricas particulares para uma linguagem universal e abstrata. Essa evolução não apenas aumentou a precisão dos resultados, mas também ampliou significativamente o alcance e o poder explicativo da matemática.

Referências

- ÁVILA, Geraldo. **Arquimedes, o rigor e o método**. Matemática Universitária, SBM, Rio de Janeiro, RJ, v.1, n.4, p. 27-45, dez. 1986.
- CARDOSO, Henrique B.; FREIRE, Paulo de Tarso C.; MENDES FILHO, Josué. Arquimedes e a lei da alavanca: erros conceituais em livros didáticos. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 23, n. 2, p. 218-237, ago. 2006.
- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Editora Blucher, 2019.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Editora da UNICAMP, 2008.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo, vol. 1**. Grupo Gen-LTC, 2000.
- HEATH, Thomas Little et al. **The works of Archimedes**. Courier Corporation, 2002.
- STEWART, James. **Cálculo**. Cengage Learning, 2017.
- VINAGRE, Fátima. ARQUIMEDES E O VOLUME DA ESFERA