



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA

Mateus de Souza Pereira

Teoria da proporção de Eudoxo

Florianópolis
2026

Mateus de Souza Pereira

Teoria da proporção de Eudoxo

Trabalho da graduação apresentado na disciplina
MTM7305-05222 (20261) - História da Matemática.

Florianópolis
2026

Sumário

1	Introdução	4
2	Desenvolvimento.....	5
	2.1 A teoria das proporções.....	5
	2.2 Algumas propriedades.....	8
	2.2.1 Proposição VI.1	8
	2.3 Corte de Dedekind.....	8
3	Conclusão	12
	Referências.....	13

1) Introdução:

A matemática grega clássica é frequentemente admirada por seu rigor lógico e pela busca de uma perfeição geométrica que moldou o pensamento ocidental. No entanto, um dos maiores desafios enfrentados pelos antigos foi a descoberta das grandezas incomensuráveis, um evento que abalou a crença de que o universo poderia ser explicado inteiramente por razões entre números inteiros. Enquanto a aritmética grega inicial sucumbia diante da impossibilidade de medir a diagonal de um quadrado através de frações simples, a geometria exigia uma nova fundamentação que pudesse abarcar tanto o discreto quanto o contínuo.

Eudoxo de Cnido surge nesse cenário como uma figura central. Ao formular sua Teoria das Proporções, preservada no Livro V dos *Elementos* de Euclides, ele estabeleceu um critério revolucionário que permitia comparar magnitudes sem a necessidade de lhes atribuir um valor numérico absoluto. Este trabalho explora como a definição de Eudoxo para razão e proporção, mas também antecipou, com um rigor surpreendente, as construções modernas da análise real.

Por fim, observamos a profunda conexão entre o pensamento eudoxiano e a definição contemporânea de números reais proposta por Richard Dedekind no século XIX. Ao analisar esse paralelo, evidencia-se como uma intuição geométrica do século IV a.C. forneceu os alicerces lógicos para o tratamento rigoroso da continuidade que fundamenta a matemática atual.

2) Desenvolvimento:

Neste capítulo, apresentaremos um pilar fundamental da nossa pesquisa para, em seguida, discutirmos a relevância da Teoria das Proporções de Eudoxo. Analisaremos como a sua definição inovadora de razões e proporções forneceu a sustentação lógica necessária para superar a crise dos incomensuráveis e fundamentar a geometria clássica de forma rigorosa.

Iniciaremos nossa discussão abordando o impasse fundamental que redefiniu os rumos da geometria clássica: a descoberta da incomensurabilidade. Para os pitagóricos, a crença de que a essência do universo residia nos números inteiros e em suas razões $\frac{a}{b}$ foi severamente abalada quando se provou que a diagonal de um quadrado e seu lado não possuíam uma medida comum. Esse fenômeno, que hoje traduzimos como a existência de números irracionais, criou um abismo lógico entre a aritmética e a geometria, uma vez que as ferramentas da época eram insuficientes para tratar grandezas que não podiam ser expressas por frações simples.

Ao final desta discussão, faremos um contraste entre a definição de Eudoxo e as definições contemporâneas de números reais, com ênfase na análise de como a intuição de Eudoxo inspirou a construção dos cortes de Dedekind e como essa transição moldou o rigor da análise matemática atual.

2.1 A teoria das proporções

Podemos encontrar no livro VII de euclides uma definição de proporção para números muito similar a nossa, onde ela diz que $a : b :: c : d$ (a está para b assim como c está para d) se $a \cdot d = b \cdot c$. Onde de cara podemos perceber a semelhança a nossa definição:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Já na Proposição 16 do Livro VI, Euclides aplica isso para segmentos de reta: *Se quatro retas são proporcionais, o retângulo formado pelos extremos é igual ao retângulo formado pelos meios (e reciprocamente).*

Lendo esses enunciados, parece que a ideia de proporção que temos hoje é idêntica à apresentada nos *Elementos*. Mas aí vem a pergunta: se parece tão simples, por que as definições que aparecem no Livro V são tão complexas?

Quando as grandezas são incomensuráveis, aquelas definições de proporção baseadas na igualdade de razões deixam de valer. Elas acabam funcionando apenas para o caso mais simples, que é o das grandezas comensuráveis. Portanto, o surgimento das grandezas incomensuráveis forçou a criação de uma nova teoria das proporções. Era necessário um conceito que funcionasse de forma independente da igualdade entre números inteiros ou frações.

A teoria das proporções entre quatro grandezas apresentada aqui é atribuída ao matemático grego Eudoxo, discípulo de Platão, nascido em torno do ano 400 a.E.C. Esta teoria abstrata das razões e proporções servirá para o estudo das propostas geométricas do livro VI. (ROQUE, 2012)

Definição V.3: *Uma razão é um tipo de relação que diz respeito ao tamanho de duas grandezas do mesmo tipo.*

Essa definição existe para deixar claro que o conceito de razão seja aplicado a grandezas homogêneas. Logo é impossível haver uma razão entre comprimento e área.

Definição V.4: *Diz-se que duas grandezas possuem uma razão entre elas se estas grandezas, quando multiplicadas, podem se ultrapassar mutuamente.*

Definição V.5: *Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, se quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e outros quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, são tais que os primeiros equimúltiplos ultrapassam, um a um, os segundos, ou são iguais a estes, ou são menores, que os últimos equimúltiplos considerados na ordem correspondente aos primeiros.*

Definição V.6: *Grandezas que possuem a mesma razão são chamadas proporcionais.*

Vamos reescrever essas definições com a linguagem atual para a ideia ficar mais clara.

Definição V.4 (modernizada): *para que duas grandezas a, b possuam uma razão é necessário que $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tais que:*

$$ma > b \text{ e } nb > a$$

Definição V.5 (modernizada): Sejam a, b, c e d grandezas homogêneas. Dizemos que elas são proporcionais se e somente se, para todo par $m, n \in \mathbb{Z}$ positivos temos um dos casos abaixo:

(I) *se $ma < nb$ então $mc < nd$*

(II) *se $ma = nb$ então $mc = nd$*

(III) *se $ma > nb$ então $mc > nd$*

Essa segunda situação só funciona se os pares de grandezas (a, b, c, d) forem comensuráveis. Como não dava para associar a razão de duas grandezas incomensuráveis a uma divisão comum, Eudoxo criou a ideia de razão entre grandezas, que é puramente geométrica. Para ele, uma razão entre comprimentos ou áreas não é a mesma coisa que uma razão entre números, embora a regra dele também funcione perfeitamente quando as grandezas são comensuráveis.

Um exemplo: mostrar que 4 está para 10 assim como 6 está para 15. Observamos que 2 está contido duas vezes em 4 e cinco vezes em 10 e 3 está contido duas vezes em 6 e cinco vezes em 15, logo os números 4, 10, 6 e 15 são proporcionais, logo temos o resultado que queremos. E fundamentalmente isso ocorre devido a que *para todo m e n , $4m = 10n$ implica que $6m = 15n$* , ambas as equações equivalente a $2m = 5n$. Logo (II) vale para quaisquer m, n inteiros.

Já que não dava para relacionar a razão de duas grandezas incomensuráveis com a divisão de suas medidas, Eudoxo criou a ideia de razão de grandezas. Com isso, o conceito de razão passou a ter um foco totalmente geométrico, analisando seu comportamento e não o resultado, (*se $ma < nb$ então $mc < nd$ ou se $ma > nb$ então $mc > nd$*) o que de fato

essas sentenças querem dizer é que, tudo que ocorre com a , b também deve acontecer com c , d na mesma proporção.

Exemplo:

$a = 1$		$c = 1/2$
$b = \sqrt{3}$		$d = \sqrt{3}/2$
Seja: $M = 3 \quad N = 2$		
$Ma = 3a = 3$		$Mc = 3c = 3/2$
$Nb = 2b = 2\sqrt{3}$		$Nd = 2d = \sqrt{3}$
Seja: $M = 6, \quad N = 3$		
$Ma = 6a = 6$		$Mc = 6c = 3$
$Nb = 3b = 3\sqrt{3}$		$Nd = 3d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Nas imagens foram definidos segmentos a , b , c , d e suas medidas, pegando um par de inteiros $m = 3$ e $n = 2$, multiplicamos esses segmentos por esse números, e percebemos que $ma < nb$ e como foram pegos segmentos proporcionais $mc < nd$. E poderia ser pego um par de inteiros no qual a polaridade da desigualdade seria invertida.

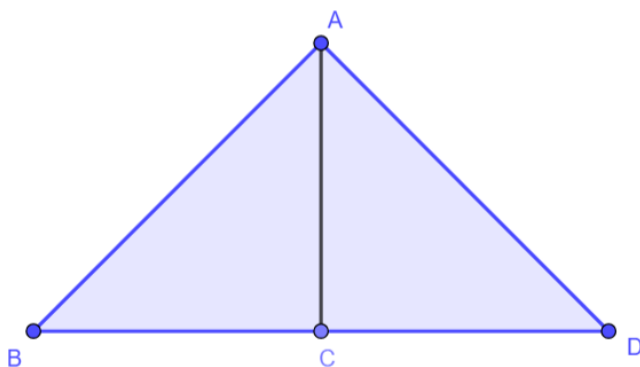
2.2 Algumas propriedades

Agora vamos enunciar e demonstrar algumas propriedades presentes no livro VI de Euclides, essas quais a definição de Eudoxo foi fundamento para a criação e entendimento das mesmas naquela época.

2.2.1 Proposição VI.1

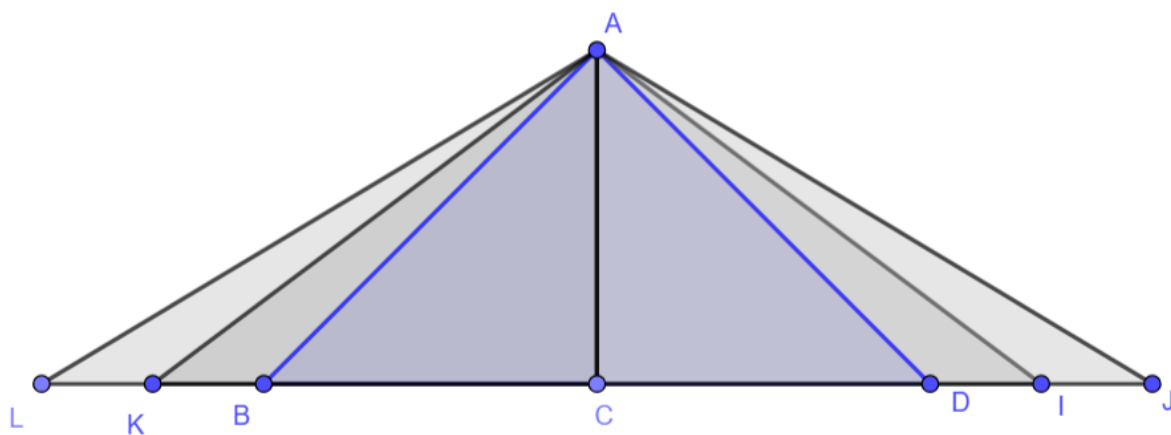
“Os triângulos e os paralelogramos que estão sob a mesma altura estão entre si como as bases.” (Euclides)

Traduzindo para um linguagem um pouco mais familiar, essa proposição quer dizer que existe uma proporção entre as bases e as áreas de triângulos de mesma altura. Ou seja, dados os triângulos ABC e ACD. $\frac{BC}{CD} = \frac{\Delta ABC}{\Delta ADC}$



Como existe a possibilidade que essas grandezas sejam incomensuráveis não podemos simplesmente executar uma demonstração utilizando resultados de números. Por isso vamos utilizar a definição de eudoxo.

Vamos construir quantos triângulos à esquerda do segmento BC quisermos e outros quantos triângulos a direita do segmento CD:



De modo que $BC = KB = KL...$ e $CD = DI = IJ...$ Ou seja as bases dos novos triângulos são múltiplos das bases dos triângulos originais (ABC e ADC).

Euclides já tinha percebido que, se a gente aumenta a base de um triângulo por um número inteiro, a área dele também aumenta na mesma proporção, portanto

- $\Delta ALC = m\Delta ABC$, já que $LC = mBC$
- $\Delta AJC = n\Delta ADC$, já que $JC = nDC$

Como os triângulos têm a mesma altura, se a soma das bases à esquerda for maior que a soma das bases à direita, a área do triângulos à esquerda também será obrigatoriamente maior que a área da direita. Essa relação de "se for maior, é maior, se for igual, é igual, se for menor é menor" se mantém para qualquer número de vezes que você multiplicar as bases e as áreas. O que torna essa prova brilhante é que ela não exige que saibamos o valor numérico das áreas. Ao mostrar que os múltiplos das bases e os múltiplos das áreas sempre se comportam da mesma maneira quando comparados, Euclides satisfaz a definição de Eudoxo.

2.3 Corte de Dedekind

É interessante perceber que a definição de Eudoxo, escrita há mais de dois mil anos, é incrivelmente parecida com a maneira que definimos os números reais hoje. No século XIX, o matemático Richard Dedekind criou os chamados "Cortes de Dedekind" para formalizar o que era um número irracional.

A semelhança está na estratégia de "cercar" um valor difícil de medir usando valores que já conhecemos. Enquanto Eudoxo usava múltiplos de números inteiros para comparar grandezas que podiam ser incomensuráveis, Dedekind usou conjuntos de números racionais para definir um número real. Basicamente, os dois perceberam que, se você não consegue dizer exatamente o que um número "é" (como no caso de um irracional), você pode defini-lo perfeitamente descrevendo como ele divide todos os outros números entre "maiores" e "menores" que ele.

Olhando novamente para definição V.5 (modernizada) do livro 5 de euclides, especificamente os itens (I) e (III):

(I) *se $ma < nb$ então $mc < nd$*

(III) *se $ma > nb$ então $mc > nd$*

Percebemos que elas podem ser reescritas da seguinte forma:

(I) *se $\frac{a}{b} < \frac{n}{m}$ então $\frac{c}{d} < \frac{n}{m}$*

(III) *se $\frac{a}{b} > \frac{n}{m}$ então $\frac{c}{d} > \frac{n}{m}$*

Lembrando que isso vale para todo m, n inteiros. E escolhendo a parte (I) percebemos que existem infinitos racionais a direita de $\frac{a}{b}$ então esses infinitos racionais também estão a direita de $\frac{c}{d}$. E isso significa que entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ não existe nenhum racional. E como $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ estão na mesma proporção pela definição de Eudoxo, faz com que $\frac{a}{b}$ produza um corte nos números racionais. E vai ser esse tipo de corte que vai fazer Dedekind definir os números reais.

3) Conclusão:

Ao longo deste trabalho, vimos que a crise das grandezas incomensuráveis não foi apenas um problema para os gregos, mas o motor que impulsionou a matemática para um novo nível de rigor. A solução encontrada por Eudoxo foi brilhante porque ele parou de tentar "medir" o que era impossível com números inteiros e passou a usar a geometria como uma linguagem universal para as proporções. Isso permitiu que Euclides pudesse provar leis fundamentais em seus *Elementos*, como a relação entre bases e áreas de triângulos, garantindo que a lógica funcionasse para qualquer grandeza, fosse ela "fácil" de medir ou não.

O pulo do gato de Eudoxo é usar múltiplos de inteiros para cercar uma razão que foi a primeira grande ferramenta para lidar com o contínuo de forma lógica. Como analisamos nas demonstrações de Euclides, essa definição não dependia de um sistema decimal ou de frações complexas, mas sim de uma estrutura de comparação muito sólida.

Por fim, a conexão com os Cortes de Dedekind mostra que o pensamento de Eudoxo é, de fato, a base da matemática moderna. Ao formalizar os números reais no século XIX, Dedekind modernizou a ideia de Eudoxo de definir um valor através da forma como ele divide os outros números.

Referências:

- (1) ROQUE, Tatiana. **História da matemática** : uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- (2) O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Eudoxus of Cnidus**. MacTutor History of Mathematics Archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eudoxus/>.
- (3) EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- (4) DEDEKIND, Richard. **Ensaio sobre a teoria dos números**. Tradução de Valmir S. Brandão. Vitória: Edufes, 2011.
- (5) BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.