UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA

Kevin Alexander Maron

O problema da Duplicação do Volume do Cubo

FLORIANÓPOLIS
2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FíSICAS E MATEMÁTICA

Kevin Alexander Maron

O problema da Duplicação do Volume do Cubo

Trabalho da graduação apresentado na disciplina
MTM7305-05222 (20261) - História da Matemática.

FLORIANÓPOLIS
2026

Introdução

A matemática na Grécia Antiga, durante o período clássico entre os séculos V e IV a.C., vivenciou uma transformação profunda que deslocou o conhecimento técnico-prático de civilizações anteriores para um sistema de pensamento puramente dedutivo e abstrato. Nesse contexto, a geometria consolidou-se como o núcleo da investigação científica, onde a busca pela verdade não residia somente na medição física, mas na demonstração lógica. Esse período foi marcado pela transição do pensamento pré-socrático para a sistematização das formas, estabelecendo as bases do que viria a ser o rigor metodológico da ciência ocidental.

Na região da Magna Grécia, especificamente na cidade de Taranto, floresceu um centro intelectual de destaque sob a influência da tradição pitagórica. Arquitas de Taranto emergiu como uma figura central nesse cenário, atuando tanto na liderança política quanto no avanço das ciências matemáticas e mecânicas. A produção científica dessa região caracterizava-se pela integração pioneira entre a teoria dos números, a geometria sólida e a aplicação de princípios matemáticos a problemas físicos, como a música e a acústica, expandindo as fronteiras do conhecimento para além do plano bidimensional.

A atmosfera intelectual da época era fortemente influenciada pela interação entre as escolas de pensamento da Itália Meridional e a Academia de Platão em Atenas. Para os matemáticos clássicos, a resolução de problemas geométricos não era apenas um exercício intelectual, mas uma busca pela compreensão da ordem e da harmonia que regiam o mundo. O desenvolvimento da teoria das proporções e o estudo das seções cônicas e curvas superiores começaram a surgir como ferramentas necessárias para enfrentar desafios que a geometria elementar de régua e compasso não conseguia solucionar de forma satisfatória.

O rigor científico grego exigia que cada nova descoberta fosse fundamentada em primeiros princípios, o que levou à criação de métodos de exaustão e à exploração de movimentos cinemáticos para gerar formas complexas. Esse ambiente de agito acadêmico incentivava a competição intelectual e o desenvolvimento de soluções engenhosas para enigmas que pareciam insolúveis dentro das limitações tradicionais. A ciência desse período estava, portanto, em um dos pontos mais altos de sua sofisticação teórica, preparando o terreno para as grandes sistematizações de autores posteriores, como Euclides e Arquimedes.

Essa busca incessante por precisão geométrica e pela resolução de paradoxos matemáticos serviu de catalisador para a formulação de questões que perdurariam por milênios. A necessidade de encontrar métodos para construir magnitudes específicas levou os geômetras a investigar a relação entre volumes e proporções lineares de maneira exaustiva. Esse cenário de transição científica e inovação metodológica fundamenta o surgimento de um dos maiores desafios da Antiguidade, conhecido como o Problema de Délio, ou a Duplicação do Cubo.

A Origem do Problema

Para compreender a magnitude deste problema é preciso viajar para a fronteira onde a matemática rigorosa se encontra com os mitos e a dramaturgia da Grécia Antiga. A origem desta questão não se deu em um quadro-negro moderno, mas sim nos caprichos de reis e na fúria dos deuses.

A primeira das lendas que deram origem a este enigma nos é contada através de uma correspondência (um texto de Eratóstenes citado posteriormente por Eutócio em sua carta ao Rei Ptolomeu). Nela, relata-se a história de um antigo poeta trágico que encenou o Rei Minos ordenando a construção de uma tumba monumental para seu filho, Glauco. Ao inspecionar a tumba de forma cúbica, que media cem pés de cada lado, Minos exclamou que o monumento era pequeno demais para um descanso real. Imperativo, o rei ordenou: "Façam-no com o dobro do tamanho. Mas, sem estragar a forma, dobrem rapidamente cada lado da tumba!" . Eratóstenes aponta o erro cômico e trágico do poeta: ao dobrar as arestas de um cubo, o seu volume torna-se oito vezes maior.

A segunda história, ainda mais célebre e que batiza o desafio matemático, envolve uma terrível praga que assolou Atenas e a ilha de Delos por volta de 430 a.C.. Desesperados para conter a mortandade, os cidadãos de Delos enviaram uma delegação para consultar

o Oráculo de Apolo, em Delfos. A resposta divina foi clara, porém enigmática: a praga só terminaria se os delianos construíssem um novo altar cúbico para o deus, com exatamente o dobro do volume do altar existente. Os artesãos e arquitetos delianos coçaram a cabeça e, caindo na mesma armadilha do poeta de Minos, simplesmente dobraram o comprimento de cada aresta do altar original. Novamente, a geometria cobrou seu preço: um cubo com o dobro da aresta resulta em um volume oito vezes maior , e não o dobro. Diz a lenda que esse grosseiro erro matemático não aplacou a fúria dos deuses, e a praga continuou a devastar a população.
Totalmente perplexos, os cidadãos foram pedir socorro à mente mais sábia que conheciam: Platão. Com a perspicácia de um verdadeiro filósofo, Platão lhes explicou que o oráculo não significava que Apolo realmente precisasse de um altar maior. Na verdade, o deus havia imposto essa tarefa para envergonhar os gregos por negligenciarem a matemática e demonstrarem desprezo pela geometria. Uma outra versão, contada por Plutarco, sugere que os delianos buscavam curar problemas políticos internos, e o oráculo receitou o extenuante estudo da geometria para acalmar suas paixões mundanas.

Independentemente de qual lenda seja a original, a "Tumba de Glauco" e a "Praga de Delos" imortalizaram a busca pelo cubo perfeito. O que parecia um mero capricho arquitetônico revelou-se um desafio matemático intransponível para as ferramentas clássicas.

Uma Análise Contemporânea

Sob a ótica da Matemática contemporânea, o problema da Duplicação do Cubo pode ser formulado e compreendido de maneira direta através da álgebra. Dado um cubo cuja aresta inicial mede x, o seu volume é naturalmente expresso por x^3. Para encontrar um cubo que possua exatamente o dobro desse volume, ou seja, $2x^3$, precisamos determinar uma nova aresta (digamos, y) que satisfaça a equação $y^3 = 2x^3$. Portanto a medida da aresta do nosso novo cubo ser y = $x\sqrt[3]{2}$.

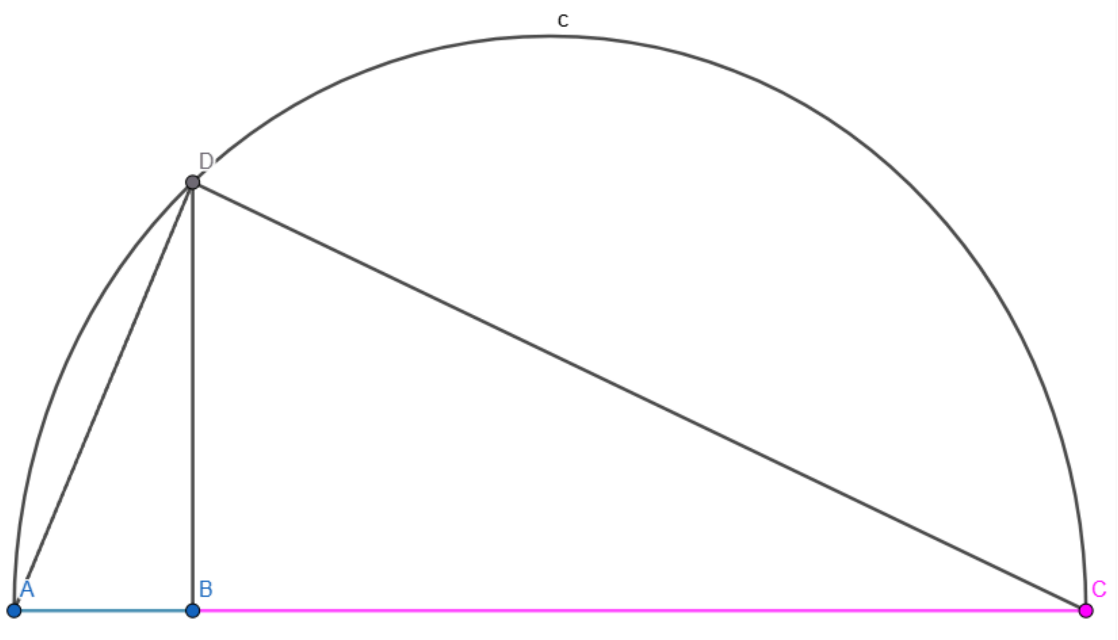
Desta forma, o que parecia ser um desafio puramente arquitetônico e tridimensional se transforma em uma questão geométrica unidimensional: como construir um segmento de reta que equivalha à aresta original multiplicada pelo número irracional $\sqrt[3]{2}$.

O grande salto metodológico para a resolução do problema daquele período foi dado por Hipócrates de Quios, que conseguiu traduzir a exigência volumétrica para a linguagem das proporções lineares planas.

Hipócrates demonstrou que a duplicação do cubo era equivalente à busca de "duas médias proporcionais" entre dois segmentos de reta dados, onde o maior tem o dobro do comprimento do menor. Em notação analítica atual, se temos a aresta original a e um segmento b=2a, o objetivo é encontrar os comprimentos r e s de modo que a proporção seja satisfeita: $\frac{a}{r} = \frac{r}{s} = \frac{s}{b}$.

Se tomarmos as proporções de Hipócrates utilizando as ferramentas modernas, sabemos que $\frac{a}{r} = \frac{r}{s}$ implica em $r^2 = as$. Da mesma forma, $\frac{r}{s} = \frac{s}{b}$ teremos $s^2 = rb \leftrightarrow s^2 = 2ar$. Substituindo s da primeira equação na segunda, chegamos em $(\frac{r^2}{a})^2 = 2ar$, simplificando $r^4 = 2a^3r \leftrightarrow r^3 = 2a^3 \leftrightarrow r = a\sqrt[3]{2}$. Logo o comprimento de r representa o tamanho da aresta do cubo com volume duplicado.

Apesar das limitações impostas pela utilização de régua não-graduada e compasso, os matemáticos da época eram capazes de construir segmentos cujo comprimento era a raiz quadrada de qualquer número construtível, como no seguinte exemplo: Construa um segmento de tamanho $\overline{AB} = 1$, em seguida, construa o segmento com o qual gostaria de extrair a raiz, neste caso, $\overline{BC} = 5$AB, em seguida, trace o semi círculo centrado no ponto médio do segmento AC. Construa A perpendicular ao segmento AB passando por B. O ponto na qual a perpendicular toca o semi-círculo é chamado de D. Em seguida construa o triângulo $\triangle ADC$ como na figura abaixo:



Note que $\triangle ADB \sim \triangle BDC$, desta forma, $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC} \leftrightarrow \frac{1}{BD} = \frac{BD}{5}$, portanto, $BD=\sqrt{5}$.

Porém, a pergunta central ainda permanecia sem solução, como construir utilizando régua e compasso um segmento cujo comprimento é a raiz cúbica de um número? Hoje, a Matemática resolve e explica essa impossibilidade através da álgebra abstrata e da teoria de Galois. Em 1837, o matemático francês Pierre Wantzel provou que construções utilizando apenas régua e compasso só podem gerar pontos cujas coordenadas correspondam a extensões de corpos cujo grau seja uma potência de 2. Como o problema da duplicação do cubo recai na resolução do polinômio $p(x) = x^3 - 2 = 0$, que é irredutível sobre os números racionais e resulta em uma extensão de corpo de grau 3, a magnitude $\sqrt[3]{2}$ é formalmente não-construtível com as ferramentas euclidianas clássicas.

Se a construção da raiz quadrada de qualquer número construtível exige encontrar uma única média proporcional utilizando duas razões de semelhança num plano bidimensional (como o semicírculo e o triângulo retângulo), a extração de uma raiz cúbica impõe um salto dimensional. O grande avanço conceitual dos gregos foi perceber que a duplicação do cubo não era nada mais do que a extensão dessa mesma lógica.

A impossibilidade de construir esse segmento apenas com régua e compasso reside na natureza das ferramentas: retas e círculos operam em duas dimensões e, portanto, só conseguem produzir uma média proporcional por vez. Para resolver o problema de duas médias proporcionais simultâneas, os matemáticos precisariam transcender o papel bidimensional. Assim como a interseção de linhas num plano gera uma raiz quadrada, a busca pela raiz cúbica forçou a geometria grega a explorar o espaço, apontando que a solução exigiria a intersecção de sólidos tridimensionais.

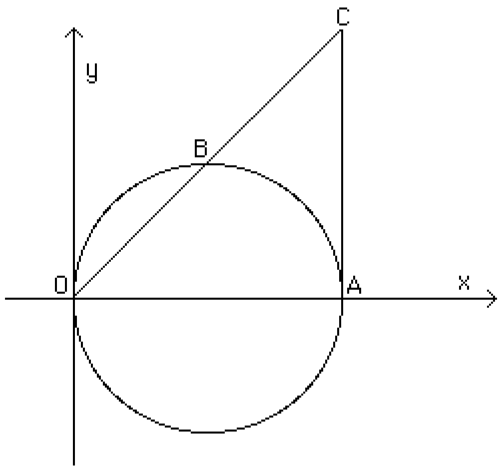
Solução de Arquitas de Tarento

A solução de Arquitas de Taranto transcende a limitação do plano euclidiano, introduzindo o movimento e a intersecção de três superfícies no espaço tridimensional:

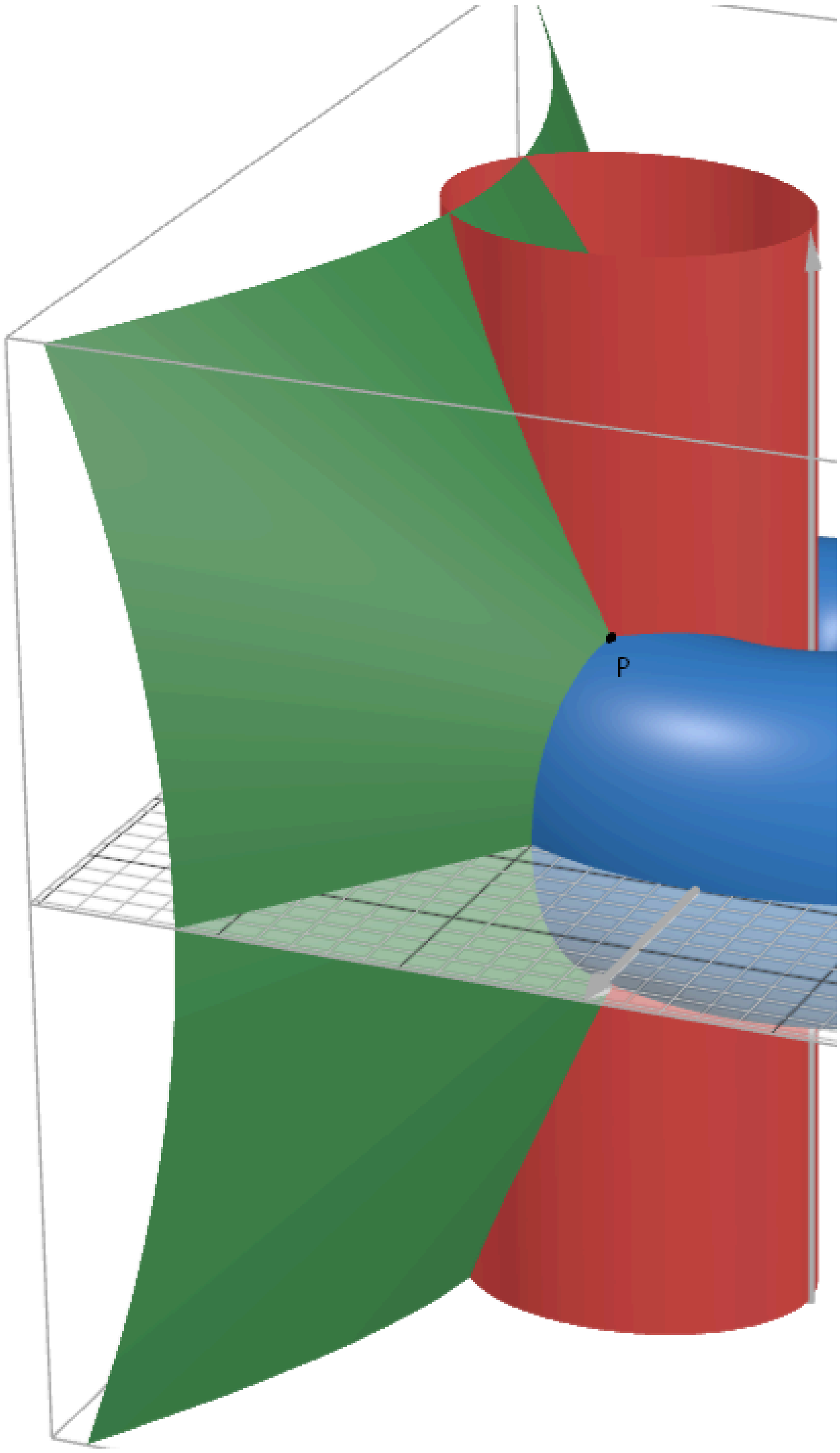
um semicilindro, um cone e um toro. O objetivo de Arquitas era materializar um ponto exato no espaço cuja projeção fornecesse os comprimentos que satisfazem a busca por duas médias proporcionais contínuas, consolidando geometricamente a exigência estipulada por Hipócrates de Quios.

Traduzindo a solução encontrada para a linguagem matemática moderna temos: Dado um cubo de aresta medindo b, tome um segmento a que mede o dobro de b, isto é, a=2b. Considere um círculo no plano xy com diâmetro OA no eixo x, onde O é a origem e A o ponto (a,0). Seja B o ponto sobre o círculo com OB=b. O objetivo é encontrar duas médias proporcionais entre a e b. Prolongue OB até encontrar a tangente ao círculo em A no ponto C.

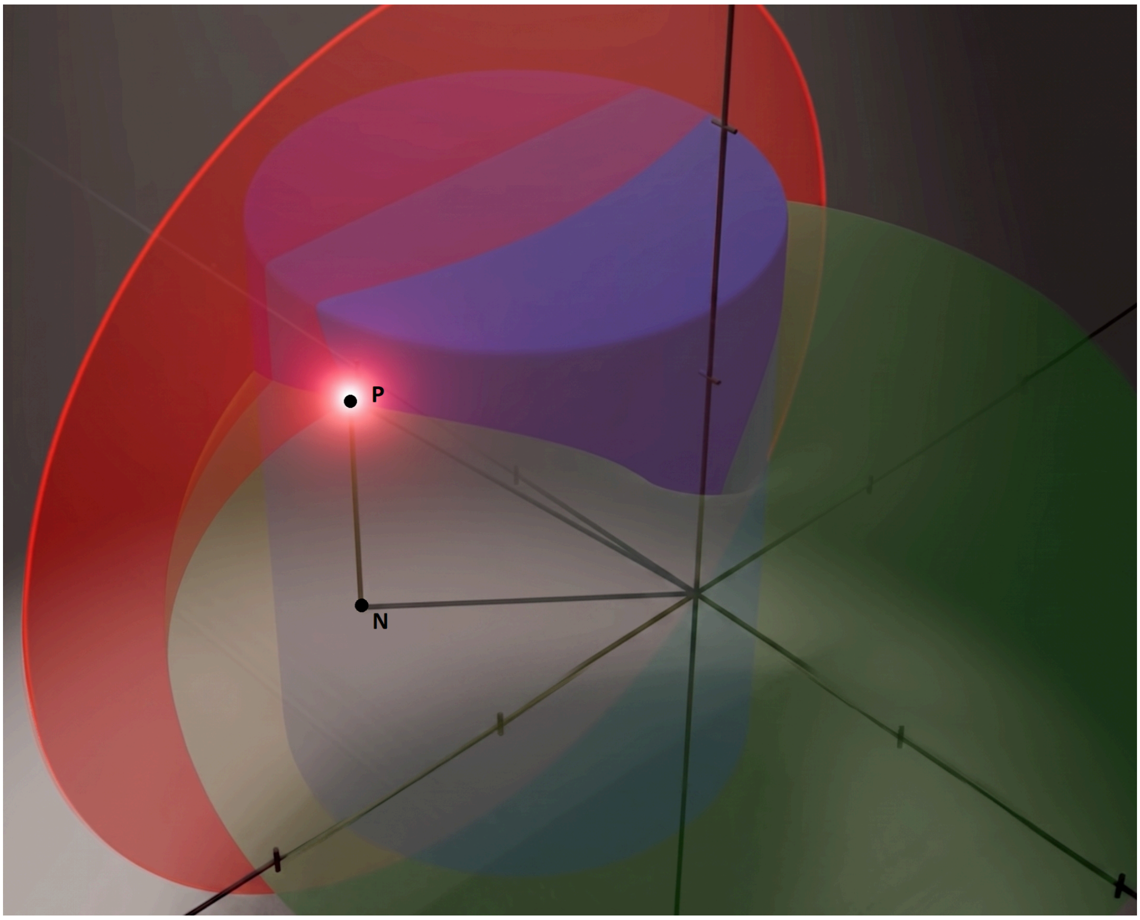
Fonte: MATTINGLY, Darrell; KIERNAN, Cateryn.r (1999)



Suponha que consideremos esta figura como estando no espaço tridimensional, onde o eixo z está em O, saindo perpendicularmente ao plano do diagrama. Agora, imaginemos as três superfícies de revolução. Uma superfície é a de um semicilindro sobre o círculo OBA como base, saindo do plano do diagrama. A segunda é a superfície do cone produzido por OC quando o triângulo OCA é rotacionado em torno da reta OA. A terceira superfície é produzida ao considerar um semicírculo no plano xz com OA como seu diâmetro, situado acima do plano xy, e então rotacionando este semicírculo sobre OA, onde OS rotaciona no plano xy em torno de O. Esta superfície é uma metade de um toro em que o buraco no centro do toro é apenas o ponto O.



Agora suponha que a intersecção das três superfícies é o ponto P. Como o ponto P pertence ao semicilindro, a sua projeção ortogonal no plano xy cai exatamente sobre um ponto N que pertence ao círculo da base OBA.



Fonte: Ben Syversen (2026)

Utilizando as ferramentas da geometria analitica podemos descrever as três superfícies de revolução idealizadas por Arquitas através do seguinte sistema de equações:

1- O cilindro: $x^2 + y^2 = ax$

2- O Toro: $x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$

3- O Cone: $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2x^2}{b^2}$

Se o ponto de intersecção P possui as coordenadas (p,q,r), ele deve satisfazer simultaneamente as três equações. A distância da origem até o ponto P no espaço é dada por OP=$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ enquanto a distância da origem até a sua projeção N no plano é dada por ON=$\sqrt{p^2 + q^2}$.

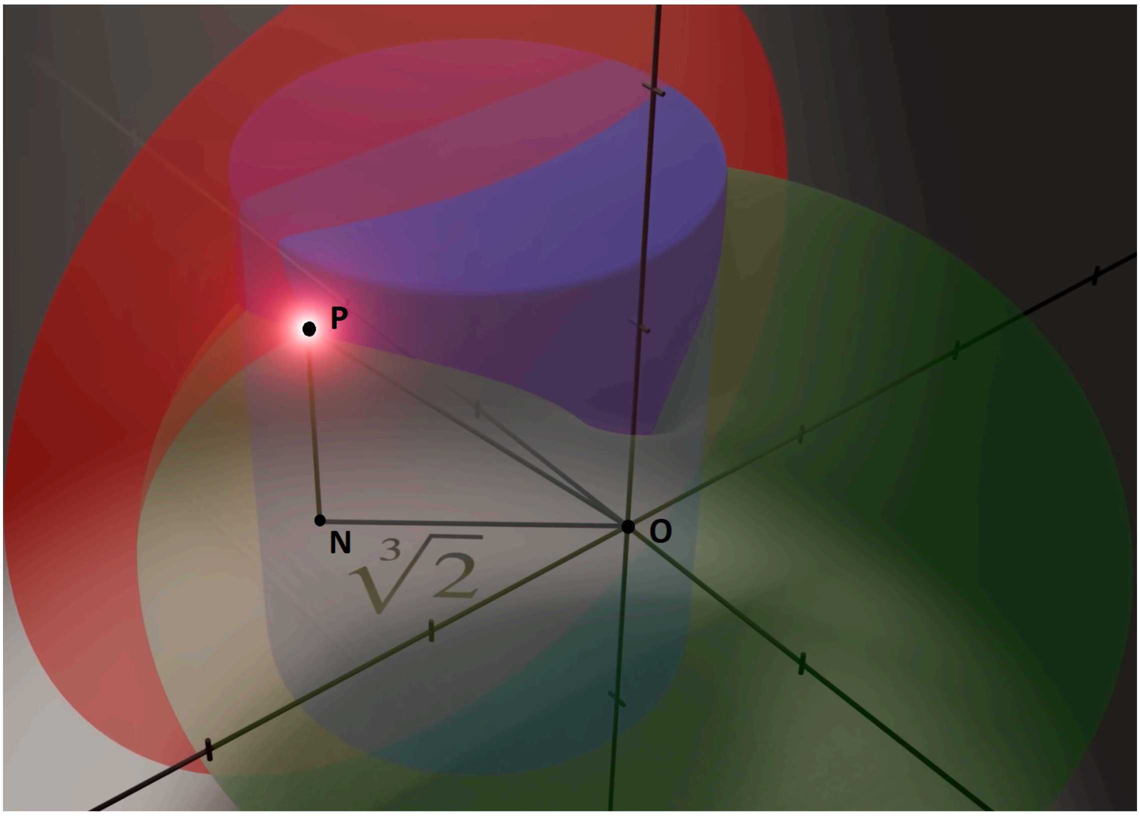
Podemos agora manipular essas equações para encontrar as proporções. Partindo da equação do cilindro(1), temos que $p^2 + q^2 = ap$. Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos $(p^2 + q^2)^2 = a^2p^2$. Substituindo este valor na equação do cone(3), teremos $p^2 + q^2 + r^2 = \frac{(p^2+q^2)^2}{b^2}$, dividindo a equação por $(p^2 + q^2)$, resulta em $\frac{p^2+q^2+r^2}{(p^2+q^2)} = \frac{(p^2+q^2)}{b^2}$. Extraindo a raiz quadrada de ambos os termos da equação, chegamos em $\frac{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{b}$.Substituindo as raízes pelos segmentos correspondentes, concluímos que $\frac{OP}{ON} = \frac{ON}{b}$.

Para encontrar a outra relação de proporção, recorremos a equação do toro(2), que estabelece que $p^2 + q^2 + r^2 = a\sqrt{p^2 + q^2}$. Dividindo ambos os lados por $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2}$, obtemos $\frac{p^2+q^2+r^2}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{a}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$. Racionalizando o lado esquerdo, chegamos em $\frac{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{a}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$. Substituindo as raízes pelos segmentos correspondentes concluímos que $\frac{OP}{ON} = \frac{a}{OP}$.

Ao unirmos todas as equivalências concluímos que $\frac{a}{OP} = \frac{OP}{ON} = \frac{ON}{b}$.

De $\frac{OP}{ON} = \frac{ON}{b} \leftrightarrow OP = \frac{ON^2}{b}$ (4). Partindo da outra igualdade e usando o fato de a=2b : $\frac{a}{OP} = \frac{2b}{OP} = \frac{OP}{ON} \leftrightarrow OP^2 = ON * 2b$ (5). Substituindo (4) em (5), chegamos em: $(\frac{ON^2}{b})^2 = ON \cdot 2b \leftrightarrow ON^4 = ON \cdot 2b^3 \leftrightarrow ON^3 = 2b^3 \leftrightarrow ON = b\sqrt[3]{2}$.

A demonstração confirma a intuição de Arquitas: os segmentos OP e ON formados pela intersecção dessas três superfícies são exatamente as duas médias proporcionais contínuas exigidas pela redução de Hipócrates de Quios. Com isso, ao ajustarmos os valores para a e b (onde a=2b), o segmento espacial ON fornece o tamanho da aresta do cubo cujo volume é o dobro do inicial.



Fonte: Ben Syversen (2026)

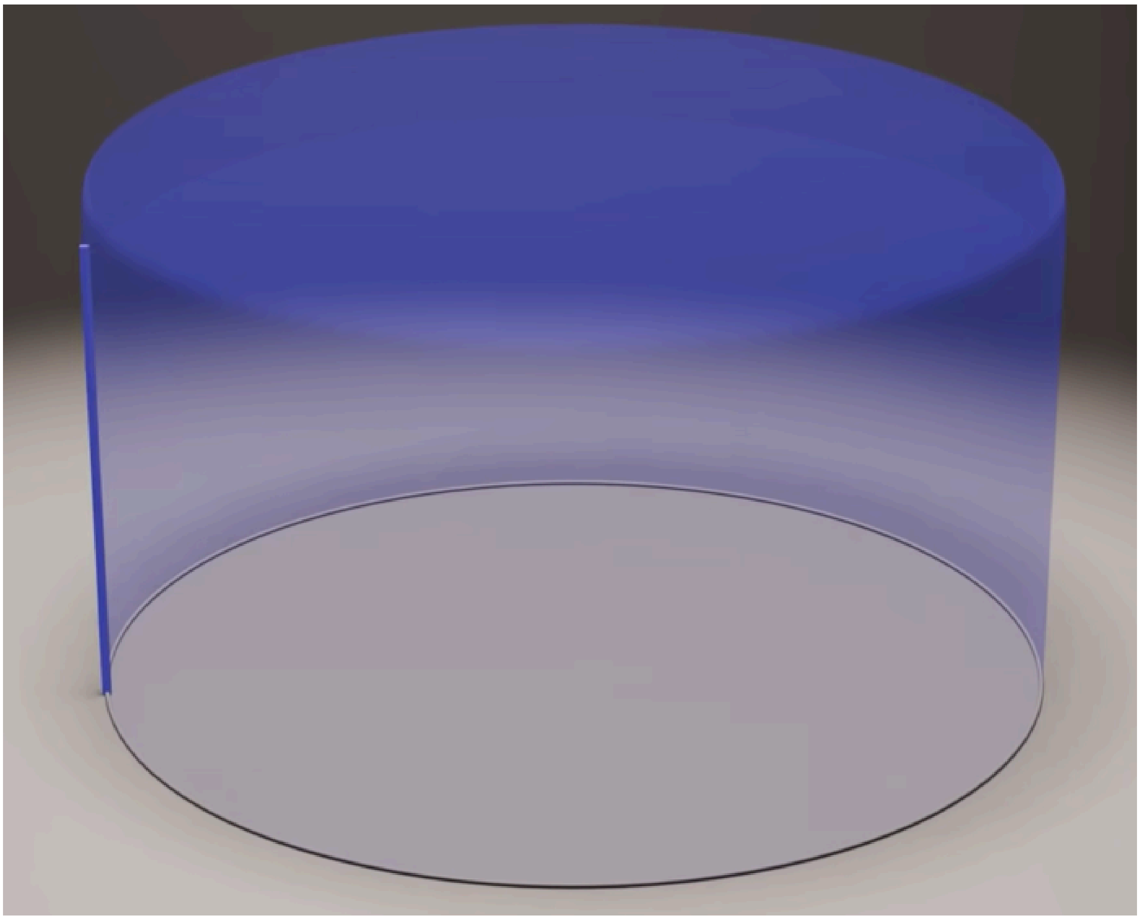
A demonstração original escrita pelas próprias mãos de Arquitas não sobreviveu diretamente até os nossos dias. O registro detalhado que possuímos dessa magistral construção chegou até nós através de Eutócio de Ascalon, um matemático do século VI d.C. (escrevendo cerca de mil anos após a época de Arquitas), em seus comentários sobre a obra Sobre a Esfera e o Cilindro de Arquimedes.

A reação dos matemáticos e filósofos contemporâneos a Arquitas revela um embate metodológico e filosófico na Grécia Antiga. A recepção de sua solução dentro da comunidade intelectual grega foi mista. Embora a sua genialidade espacial fosse indiscutível, a ousadia de Arquitas em introduzir o movimento cinemático e conceitos mecânicos na geometria causou uma profunda ruptura com Platão e os membros de sua Academia. Segundo relatos do historiador Plutarco, Platão repreendeu severamente Arquitas, Eudoxo e Menecmo por fornecerem soluções consideradas "impuras" para o Problema da Duplicação do Cubo.

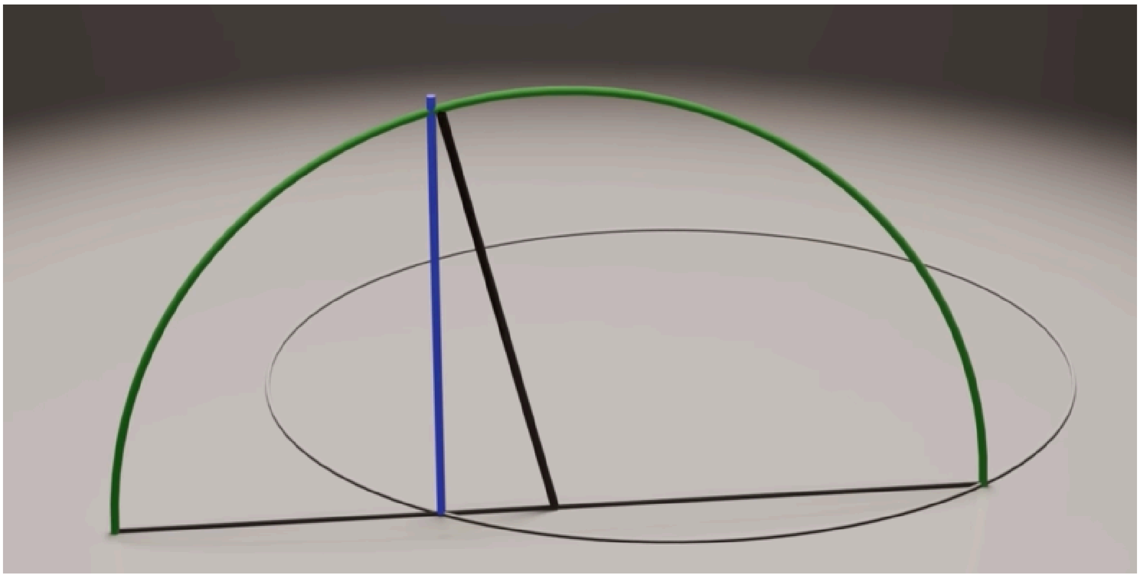
O Mecanismo de Arquitas

Acredita-se que uma das possíveis abordagens por Arquitas foi a construção do seguinte mecanismo que fazia uso de movimentos contínuos para construir as superfícies aqui mencionadas:

1- Para a construção do Semicilindro, Arquitas fez uso de uma estaca(em azul) projetada perpendicularmente em relação ao solo, que se movia ao longo de uma trajetória circular, como na figura a seguir:

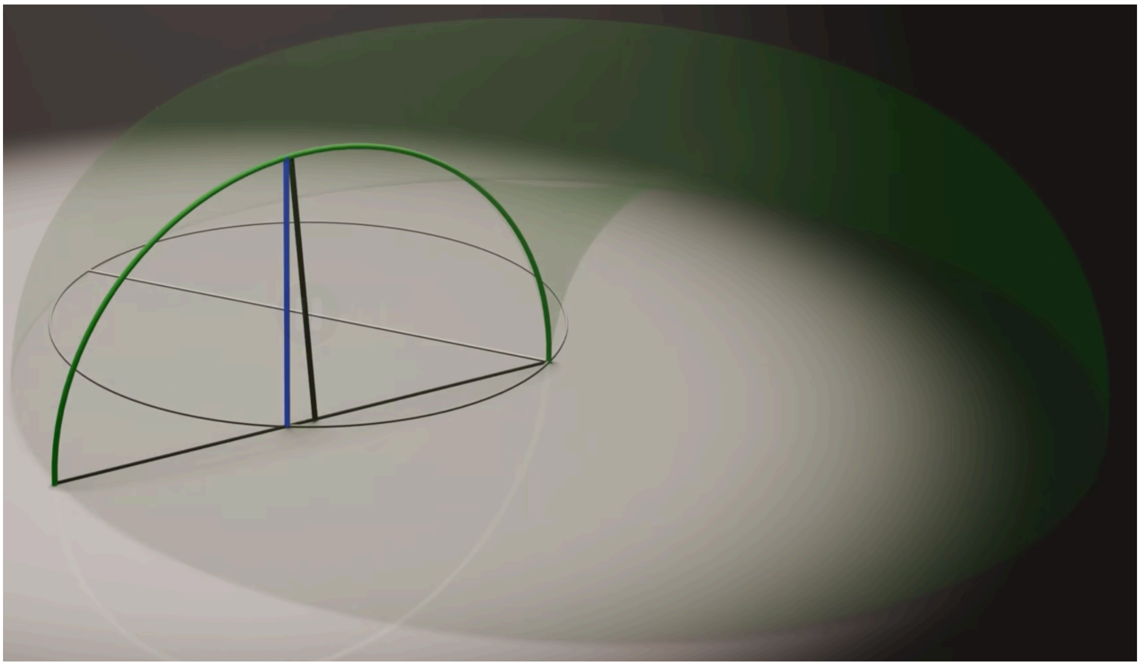


2- Para a construção da superfície do Toro, Arquitas fez a utilização de outra haste auxiliar, para formar um semicírculo:



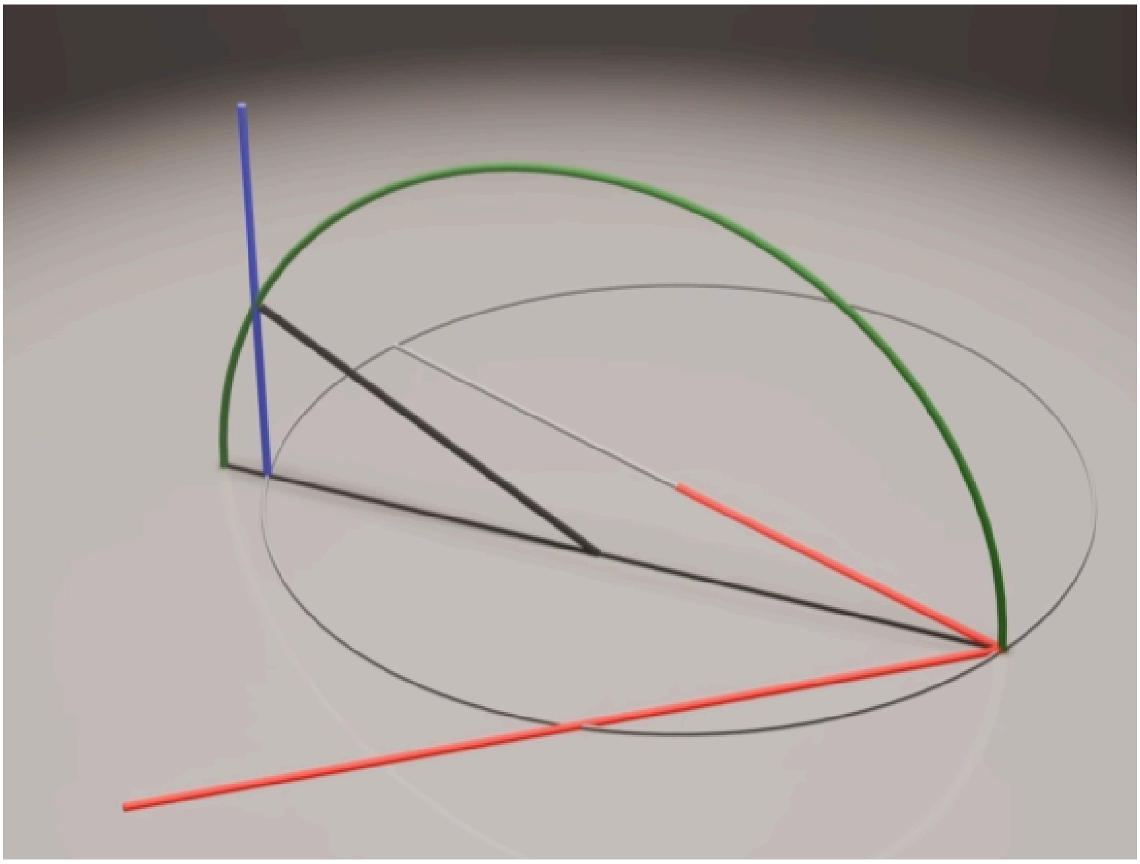
Fonte: Ben Syversen (2026)

Em seguida, girando as duas partes anteriores como se estivessem presas a uma dobradiça de porta, onde uma das pontas do semicírculo é presa ao círculo utilizado para o criação do semicilindro, formando a superfície do Toro desejada:

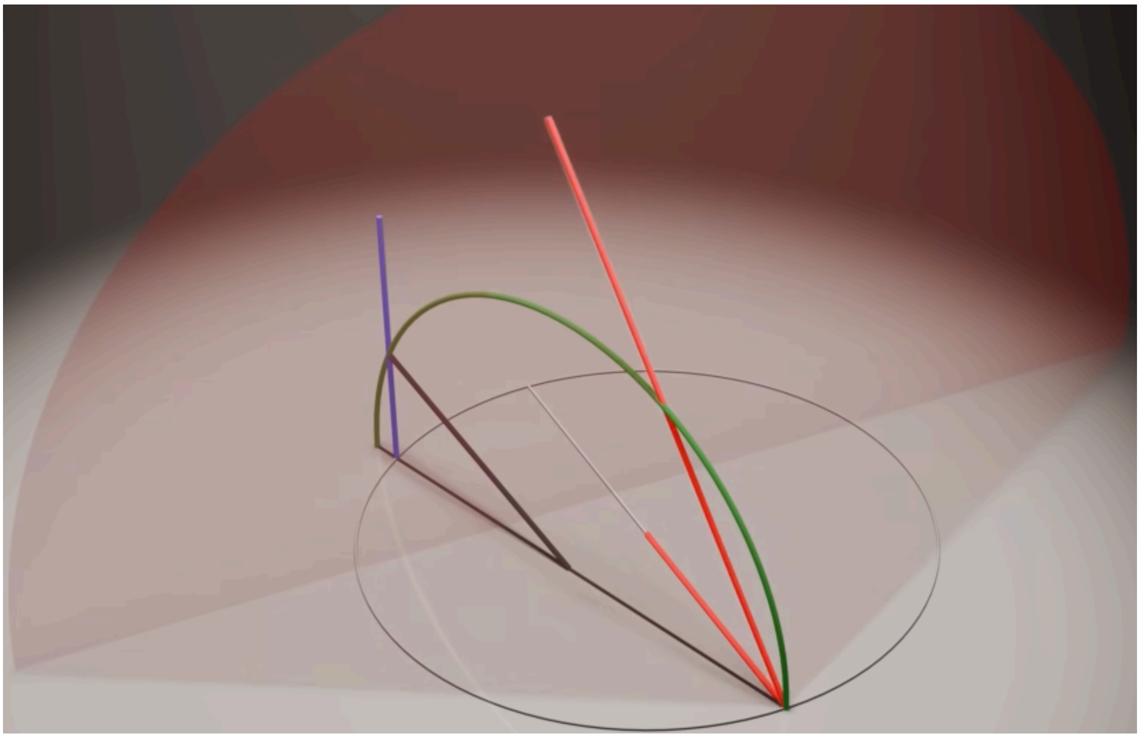


Fonte: Ben Syversen (2026)

3- Para a construção do Cone, Arquitas, posicionou duas hastes em um ângulo de 60° em relação uma a outra:



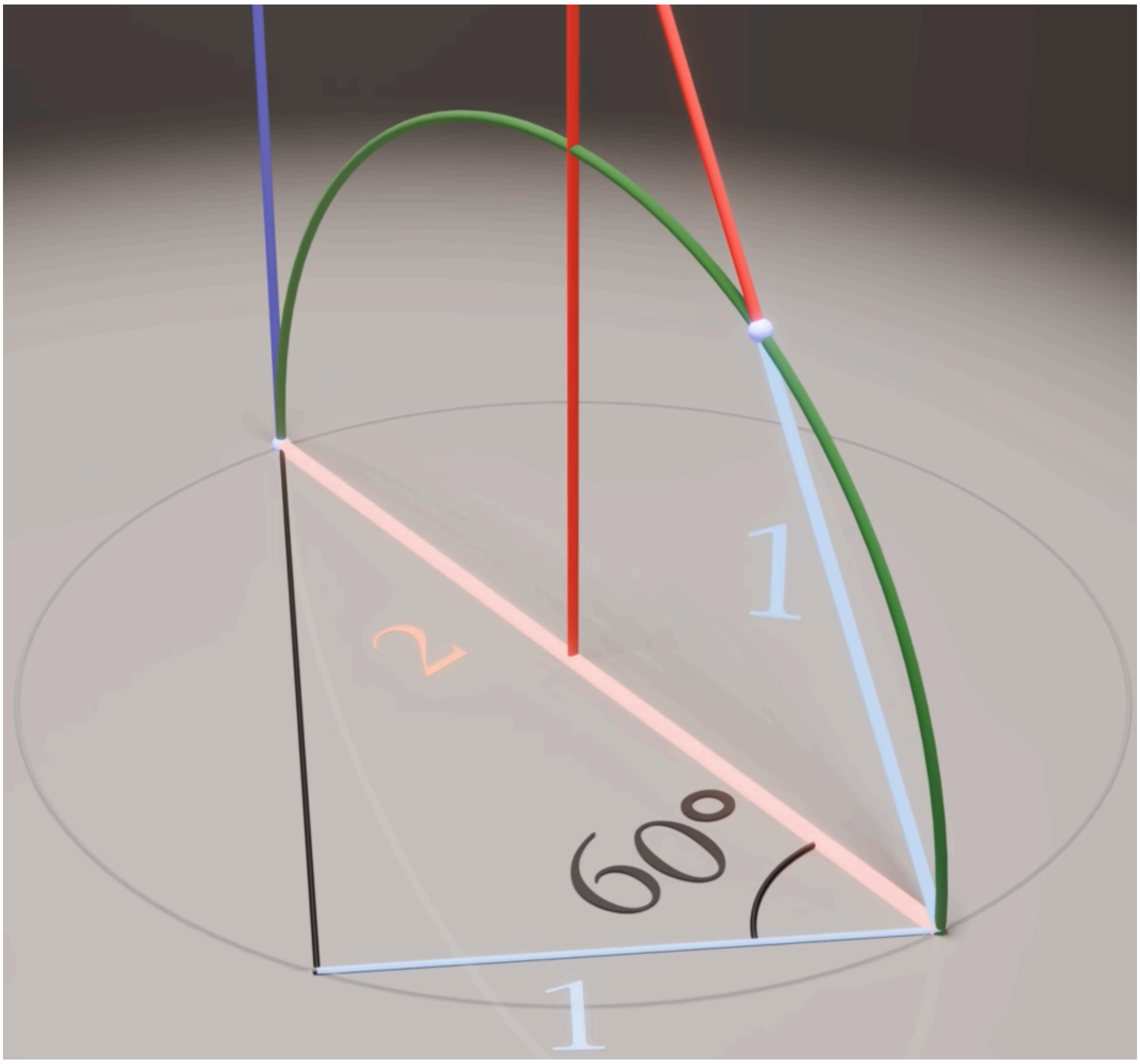
Fazendo com que uma das hastes estivesse presa ao chão enquanto a outra enquanto giramos a outra era possível obter a superfície do cone:



Fonte: Ben Syversen (2026)

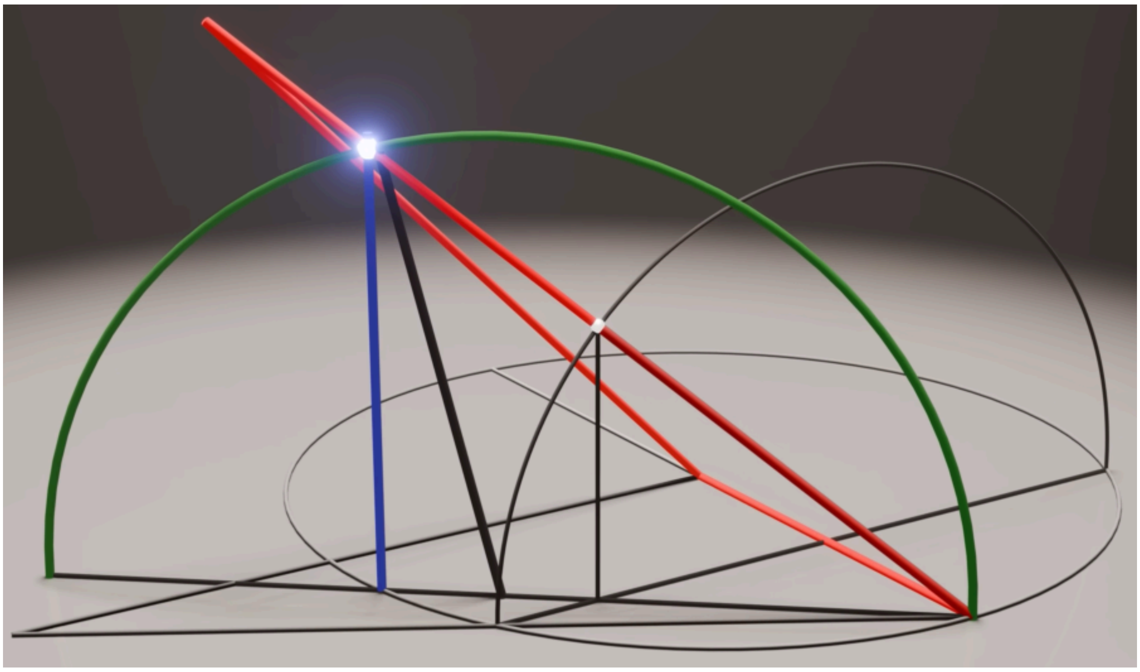
A construção do cone usando este ângulo específico garante que as linhas do cone que cortam o círculo respeitem a condição de 2:1 exigida na solução apresentada por

Hipócrates de Quios:



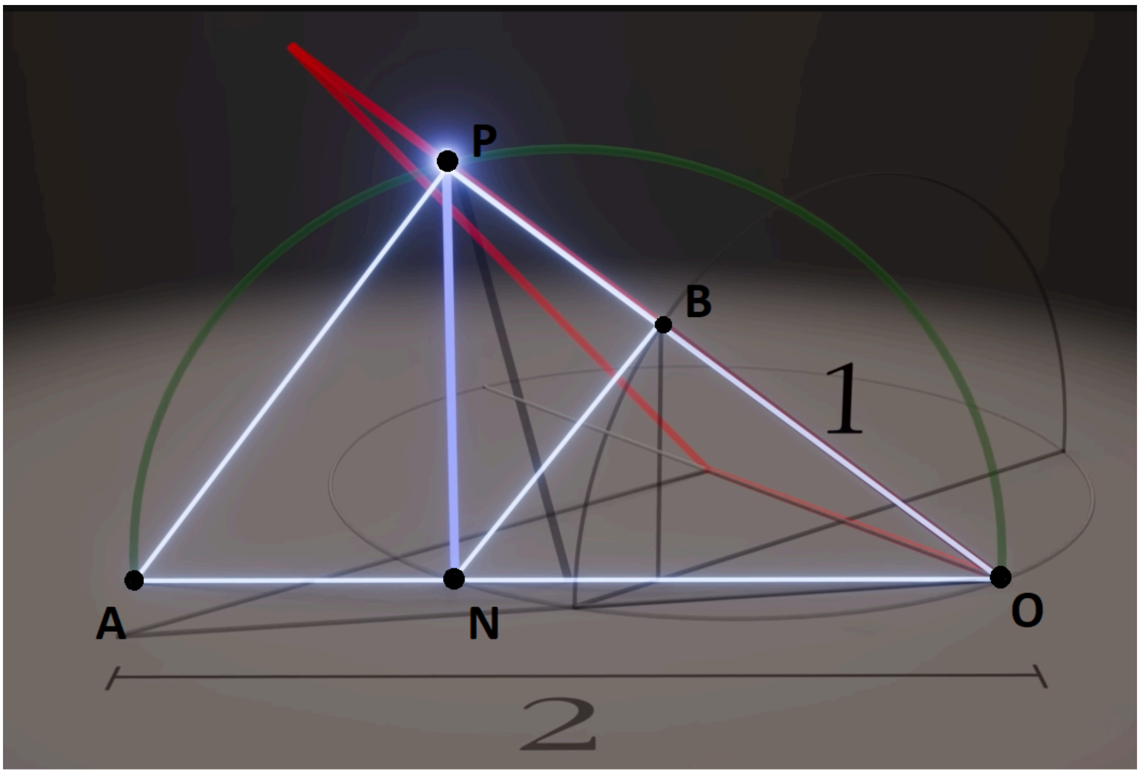
Fonte: Ben Syversen (2026)

Quando movemos os 3 mecanismos juntos, obtemos um ponto cujo às 3 haste se intersectam, consequentemente, este é o ponto onde as 3 superfícies se intersectam:



Fonte: Ben Syversen (2026)

Sabemos que o diâmetro de círculo forma um triângulo retângulo com qualquer ponto sobre sua circunferência:



Fonte: Ben Syversen (2026)

Afirma-se que $\triangle OPA \sim \triangle OPN$, visto que ambos partilham o ângulo $\angle PON = \angle POA = \alpha$. O ângulo $\angle APO$ mede noventa graus, como o ponto N representa a projeção ortogonal de P sobre o chão, o ângulo $\angle ONP$ também mede noventa graus. Portanto, pelo caso de semelhança Ângulo-Ângulo $\triangle OPA$ é semelhante a $\triangle OPN$. Deste fato segue que a hipotenusa do triângulo maior (OA) está para a hipotenusa do triângulo menor (OP) , ou seja, $\frac{OA}{OP}$. Ainda da semelhança, o cateto adjacente ao ângulo α no triângulo maior (OP) está para o cateto adjacente correspondente no triângulo menor (ON), isto é, $\frac{OP}{ON}$. Portanto concluímos que $\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{ON}$(6).

Por construção, temos que $\triangle OAP \sim \triangle OBN$, visto que ambos partilham o ângulo $\angle POA = \angle BON = \alpha$. Além disso, ambos partilham os mesmos lados em relação ao ângulo α. Portanto, temos o afirmando. Deste fato, podemos concluir que ambas as hipotenusas são proporcionais $\frac{OA}{ON}$. Além disso temos que os catetos OB e OP também são semelhantes $\frac{OP}{OB}$, então $\frac{OA}{ON} = \frac{OP}{OB}$. Multiplicando ON em ambos os lados $\frac{OA \cdot ON}{ON} = \frac{OP \cdot ON}{OB} \leftrightarrow OA = \frac{OP \cdot ON}{OB}$, dividindo OP em ambos os lados $\frac{OA}{OP} = \frac{ON}{OB}$(7).

Unindo (6) e (7), concluímos portanto que $\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{ON} = \frac{ON}{OB}$. Como OA=2 e OB=1, temos que $\frac{2}{OP} = \frac{OP}{ON} = \frac{ON}{1}$, logo de $\frac{OP}{ON} = \frac{ON}{1} \leftrightarrow OP = \frac{ON^2}{1}$(8). Além disso, do fato de $\frac{2}{OP} = \frac{OP}{ON} \leftrightarrow OP^2 = 2ON$(9). Substituindo 8 em 9, concluímos que $(\frac{ON^2}{1})^2 = ON \cdot 2 \leftrightarrow ON^4 = ON \cdot 2 \leftrightarrow ON^3 = 2 \leftrightarrow ON = \sqrt[3]{2}$.

Não pode-se afirmar com certeza se Arquitas de fato construiu este mecanismo, ou se toda a construção foi feita usando apenas sua imaginação. No entanto, as evidências contextuais sugerem fortemente que a solução envolveu, no mínimo, um modelo mecânico. Arquitas é historicamente reconhecido como o fundador da mecânica racional e matemática, sendo creditado pela invenção da polia, do parafuso, de um chocalho infantil e de um famoso pombo mecânico de madeira que voava impulsionado por um sistema de pesos e ar comprimido. Essa intensa inclinação para a experimentação física torna altamente plausível que ele tenha de fato construído um dispositivo real para visualizar a construção das superfícies usadas na solução do problema.

Conclusão

A saga da Duplicação do Cubo, ou Problema de Délio, ilustra de maneira magistral a evolução do pensamento matemático e a profunda diferença metodológica entre a geometria da Antiguidade e a álgebra contemporânea. O que nasceu de lendas sobre oráculos e pragas transformou-se no catalisador para a expansão da matemática além do plano bidimensional.

A redução feita por Hipócrates de Quios, que transformou a duplicação do volume na busca por duas médias proporcionais , exigiu um salto para a terceira dimensão que a régua e o compasso não podiam acompanhar de forma isolada. É neste ponto que brilha a genialidade de Arquitas de Taranto. Rompendo com o dogma estático, Arquitas introduziu a cinemática e a mecânica na geometria, utilizando a intersecção de um semicilindro, um cone e um toro para forçar a existência de um ponto no espaço cuja projeção fornecia exatamente os comprimentos incomensuráveis necessários . Com isso, ele não apenas concebeu a primeira curva não-planar da história, mas antecipou intuitivamente os conceitos de parametrização e intersecção de superfícies que a Matemática contemporânea só viria a formalizar milênios depois com a geometria analítica e o cálculo.

O que filósofos como Platão viam como uma "corrupção" da pureza da geometria através do uso da mecânica , hoje reconhecemos como um salto visionário que quebrou a barreira do plano. Em suma, a Duplicação do Cubo não foi apenas um quebra-cabeça clássico, mas o motor que impulsionou o nascimento da estereometria grega, provando que as limitações de uma época formam, invariavelmente, os alicerces metodológicos para as grandes revoluções analíticas do futuro.

Referências Bibliográficas

ARCHYTAS. In: WIKIPEDIA, The Free Encyclopedia. : Wikipedia, 15 abr. 2026;

MATTINGLY, Darrell; KIERNAN, Cateryn. Duplication of the Cube;

SYVERSEN, Ben. The Simplest Ancient Math Problem No One Could Solve. YouTube

THE KINEMATIC Transcendence of Archytas: A Comprehensive Analysis of the Three-Dimensional Solution to the Delian Problem;

SON, Tran Dinh. Exact Doubling the Cube with Straightedge and Compass by Euclidean Geometry. International Journal of Mathematics Trends and Technology, v. 69, n. 8, p. 45-54, ago. 2023.

MABRY, Rick. Archytas: Cylinder, Cone, Torus.