



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona

**José Ribamar Alves de Sousa Júnior**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em  
Matemática Universitária do Departamento  
de Matemática como requisito parcial para a  
obtenção do grau de Mestre

Orientadora  
Prof. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

**2010**

# TERMO DE APROVAÇÃO

José Ribamar Alves de Sousa Júnior

O CÁLCULO VARIACIONAL E O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato  
Orientadora

Prof. Dr. Renata Zotin Gomes de Oliveira  
ICGE/ UNESP - Rio Claro - SP

Prof. Dr. Sueli Mieko Tanaki Aki  
ICMC/USP - São Carlos - SP

**Rio Claro, 16 de Dezembro de 2010**

*A meus familiares  
e amigos*

# Agradecimentos

- A todos os meus familiares pelo carinho a mim concedido em todos os momentos desta jornada. Em particular à minha mãe Francisca pelas orações ao meu favor.
- A todos os professores do curso Mestrado Profissional da UNESP- Rio Claro, em particular ao professor Wladimir Seixas pela ajuda com o Maple e o Latex.
- Aos meus amigos de curso, meu agradecimento pela amizade e pelo reconhecimento de que a construção do conhecimento se dá num espaço coletivo.
- A todos os amigos da república **Caverna do Dragão**, Nilton, Gustavo, Juracélio e Henrique pela amizade e companheirismo.
- À minha orientadora, professora Suzi, pelo cuidado com o rigor científico, pela dedicação, atenção e paciência com que me orientou.
- À Deus por ter possibilitado tudo isso.

# Resumo

Neste trabalho estudamos o problema da Braquistócrona de duas formas distintas: através da teoria do Cálculo Variacional para problemas com fronteiras fixas e também através das considerações feitas por Johann Bernoulli, utilizando conceitos de Óptica e Geometria. Apresentamos também uma simulação computacional dos resultados obtidos.

**Palavras-chave:** Cálculo Variacional, Equação de Euler, Problema da Braquistócrona.

# Abstract

In this work we study the Brachistochrone Problem of two different ways; by theory of Variational Calculus for problems with fixed boundary and by considerations of Johann Bernoulli, with concepts of Optics and Geometry. A computational simulation of the obtained results, is presented too.

**Keywords:** Variational Calculus, Euler's Equation, The Brachistochrone Problem.

# Lista de Figuras

2.1	Partição de $[a, b]$ (ELSGOLTZ,1696). . . . .	19
2.2	Retas $y = x + c$ (ELSGOLTZ,1696). . . . .	23
2.3	Parábolas $y = (x - a)^2 - 1$ (ELSGOLTZ,1696). . . . .	23
2.4	Campo central (ELSGOLTZ,1696). . . . .	24
2.5	Senóides $y = Csenx$ (ELSGOLTZ,1696). . . . .	24
2.6	Campo de extremal 1 (ELSGOLTZ,1696). . . . .	25
2.7	Campo de extremal 2 (ELSGOLTZ,1696). . . . .	25
2.8	Campo central com inclinação $p(x, y)$ (ELSGOLTZ,1696). . . . .	28
3.1	Esquema do Problema da Braquistócrona no plano. . . . .	30
3.2	Feixe de Ciclóides (ELSGOLTZ,1696). . . . .	33
3.3	Esquema para o fenômeno da refração da luz (LIMA,2004). . . . .	34
3.4	Meio óptico e a trajetória descrita por um raio de luz partindo de A chegando em B (LIMA,2004). . . . .	35
3.5	Ângulo entre o caminho descrito pelo raio de luz e a vertical (LIMA,2004). . . . .	36
3.6	Trajetoórias da partícula através das curvas dadas por: $f_1(x) = -\frac{2}{\pi}x$ (azul), $f_2(x) = -2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ (verde), $f_3(x) = -2\sqrt[3]{\frac{x}{\pi}}$ (amarelo) e $f_4(t) = (t - \sin(t), -1 + \cos(t))$ (vermelho) entre $t=0$ ; $t=0.92026$ ; $t=2.1896$ e $t=3.0781$ . . . . .	39

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Alguns Conceitos de Cálculo Variacional para Problemas com Fronteiras Fixas</b>	<b>11</b>
2.1	Introdução . . . . .	11
2.2	Preliminares . . . . .	11
2.3	Equação de Euler . . . . .	13
2.4	Alguns casos particulares de $F$ . . . . .	17
2.5	Condições suficientes para extremos . . . . .	22
<b>3</b>	<b>O Problema da Braquistócrona</b>	<b>30</b>
3.1	Modelagem do problema usando Cálculo Variacional . . . . .	30
3.2	Resolução de Johann Bernoulli . . . . .	34
3.3	Análise de dados obtidos através de simulações computacionais . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>40</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>41</b>
	<b>Apêndice: Linha de comando do Maple</b>	<b>42</b>

# 1 Introdução

Um dos primeiros indícios de problemas relacionados ao Cálculo Variacional aparece com os gregos, que tinham o conhecimento que o círculo é a curva com perímetro fixo que engloba a maior área. Este problema é conhecido como problema de Dido e é descrito no livro *Eneida* de Publio Virgílio Maronis (70 a.C. - 19 a.C.). Dido, filha de um rei fenício, refugiou-se no norte da África depois que seu marido foi assassinado. Foi-lhe prometida a extensão de terra que ela pudesse cercar com o couro de um boi. Diz a lenda que ela preparou com o couro uma longa e fina correia e cercou um terreno semi-circular beirando o mar Mediterrâneo. Essa é a lendária história da fundação de Cartago. O problema de Dido consiste em encontrar dentre todas as curvas planas de um dado comprimento, a que engloba a maior área. Podemos perceber com isso que máximos e mínimos têm despertado o interesse da humanidade já há muito tempo, uma vez que o problema de Dido data de 850 a.C..

Por volta de 1630, Galileu Galilei (1564-1643) comparou o tempo de descida por um segmento circular com os tempos correspondentes à descida por polígonos inscritos e por outros arcos unindo os pontos dados.

Já em 1686, Newton (1643-1727) propôs o problema de superfície de revolução com resistência mínima que se destina a calcular a forma de uma superfície de revolução que atravessa uma massa de líquido oferecendo resistência mínima, que se refere a um problema típico de Cálculo Variacional.

No entanto, podemos dizer que o desenvolvimento do Cálculo Variacional começou de fato em junho de 1696, quando Johann Bernoulli (1667-1748) publicou no jornal científico *Acta Eruditorum* uma nota com o seguinte título: “ *Um novo problema que convido os matemáticos a resolver*”. Este problema é o que hoje conhecemos como o **problema da Braquistócrona**: Sejam A e B dois pontos dados em um plano vertical. Encontre a curva que uma partícula precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade. Johann Bernoulli propôs, em 1697, um método para resolvê-lo que dependia de uma analogia com o problema de determinar o caminho percorrido por um raio de luz em um meio

---

com índice de refração variável.

No mesmo ano seu irmão James Bernoulli (1654-1705) resolveu o problema de outra maneira, que lhe permitiu também resolver, em 1701, um problema isoperimétrico, que é aquele que trata da determinação de uma figura geométrica de área máxima com perímetro dado.

Como o método desenvolvido por James Bernoulli era bastante eficiente na resolução de diversos problemas de máximos e mínimos, foi então que Leonhard Euler (1707-1783), aluno de Johann e que estava envolvido com o trabalho dos irmãos, passou a estudar e a aperfeiçoar o método de James, até que em 1744 publicou “ *A method for discovering curved lines having a maximum or minimum property of the solution of the isoperimetric problem taken in its widest sense*”. Uma das descobertas que merece destaque neste trabalho é a equação diferencial chamada **Equação de Euler**.

Com o passar do tempo, outros matemáticos começaram a sugerir problemas de grande dificuldade e o método de Euler tornava-os mais complicados. Então, em 1762 e 1770, Lagrange publicou um método analítico que permitia deduzir, de fato, a equação diferencial das curvas que minimizavam problemas mais gerais. Esse método de Lagrange trocava a função  $y(x)$ , presente nas integrais a serem minimizadas, pela função  $y(x) + \delta y(x)$ . Euler adota o método e as notações de Lagrange e chama  $\delta y(x)$  de **variação** da função  $y(x)$ .

É por isso que esta nova teoria recebe o nome de **Cálculo das Variações** ou **Cálculo Variacional**.

Além desses matemáticos citados outros também tiveram destaque no desenvolvimento do Cálculo Variacional, tais como: Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), David Hilbert (1862-1943) e William Rowan Hamilton (1805-1865).

Nos problemas tratados através da teoria do Cálculo Variacional, as condições finais (iniciais) ou tempo final (inicial) podem ser fixas ou não. Sendo assim, temos problemas com fronteiras móveis e problemas com fronteiras fixas. Neste trabalho desenvolvemos apenas os problemas com fronteiras fixas e para maiores detalhes sobre os casos com fronteiras móveis sugerimos Elsgolts [4], capítulo 7.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 2 apresentamos a estruturação teórica dos conceitos de Cálculo Variacional para problemas com fronteiras fixas, alguns exemplos com o objetivo de facilitar o entendimento da teoria e também deduzimos a principal ferramenta de estudo, que é a Equação de Euler. Também neste capítulo citamos as condições suficientes que uma curva deve satisfazer para ser classificada como máximo ou mínimo de um funcional, sem desenvolver toda a teoria, a qual pode ser encontrada em [4], páginas 358-369.

No capítulo 3 enunciamos o problema da Braquistócrona, resolvendo-o de duas formas distintas; a primeira, aplicando a teoria do Cálculo Variacional desenvolvida no capítulo 2, e a segunda seguindo os passos da resolução dada por Johann Bernoulli, que utiliza Óptica e Geometria. Por fim utilizamos o programa Maple como auxílio na simulação computacional do problema proposto.

# 2 Alguns Conceitos de Cálculo Variacional para Problemas com Fronteiras Fixas

## 2.1 Introdução

Os problemas que se referem a valores máximos e mínimos são bem mais atrativos que os outros problemas matemáticos de dificuldades comparáveis. Isso ocorre devido a uma razão muito simples: idealizam nossos problemas do cotidiano.

Em várias situações do nosso dia-a-dia queremos comprar um objeto com o menor preço possível, realizar o máximo de trabalho no menor tempo, alcançar um objeto realizando o menor esforço, dentre outras situações. Da mesma maneira a natureza também é guiada por princípios de máximos e mínimos. Podemos citar vários exemplos neste sentido: caminho percorrido pela luz, movimento dos planetas, entre outros. Estas são as principais razões para o estudo desse tópico e do desenvolvimento de várias teorias que auxiliam no entendimento desses fenômenos.

O Cálculo Variacional visa fundamentalmente investigar os máximos e mínimos dos funcionais e se assemelha bastante à investigação de máximos e mínimos de funções. Portanto, neste capítulo, procuramos introduzir os conceitos fundamentais e as principais propriedades do método variacional.

## 2.2 Preliminares

**Definição 2.1.** *Um funcional  $v$  é uma regra que associa a cada função  $y$  em um espaço de funções  $\Omega$ , um único número real.*

**Definição 2.2.** Um funcional  $L$  definido em  $\Omega$  é dito linear se satisfaz as seguintes condições:

1.  $L[cy] = cL[y]$ , para todo  $y \in \Omega$  e para todo  $c \in \mathbb{R}$  tais que  $cy \in \Omega$ .
2.  $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ , para todo  $y_1, y_2$  e  $y_1 + y_2 \in \Omega$ .

**Definição 2.3.** Se  $y$  e  $y + \delta y$  são funções para os quais o funcional  $v$  esteja definido, o incremento do funcional, denotado por  $\Delta v$ , é dado por

$$\Delta v = v[y + \delta y] - v[y].$$

O incremento também pode ser escrito como:

$$\Delta v[y, \delta y] = L[y, \delta y] + \beta(y, \delta y) \cdot \|\delta y\|$$

onde  $L$  é linear em  $\delta y$ .

Se  $\lim_{\|\delta y\| \rightarrow 0} \beta(y, \delta y) = 0$ , então  $v$  é diferenciável em  $y$  e  $L$  é a variação do funcional  $v$  em  $y$ , denotada por  $\delta v$ .

**Definição 2.4.** Um funcional  $v[y]$  assume um máximo na função  $y_0$  se seu valor em qualquer função próxima a  $y_0$ , não seja maior que  $v[y_0]$ , ou seja,  $\Delta v = v[y] - v[y_0] \leq 0$ . Se  $\Delta v \leq 0$  e também,  $\Delta v = 0$  somente quando  $y = y_0$ , então dizemos que  $v$  assume um máximo estrito em  $y_0$ .

Analogamente dizemos que  $v[y]$  assume um mínimo em  $y_1$ , quando  $\Delta v \geq 0$  e um mínimo estrito se  $\Delta v = 0$  somente quando  $y = y_1$ .

**Teorema 2.1.** Considere uma função  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  e suponha que a derivada parcial  $f_p(x, p)$  exista e seja contínua em  $[a, b] \times [c, d]$ . Se a integral

$$F(p) = \int_a^b f(x, p) dx$$

existe para todo  $p \in [c, d]$ , então  $F(p)$  é diferenciável e

$$F'(p) = \int_a^b f_p(x, p) dx. \quad (2.1)$$

**Demonstração:**

Vamos considerar

$$\frac{F(p) - F(p_0)}{p - p_0} = \int_a^b \left( \frac{f(x, p) - f(x, p_0)}{p - p_0} \right) dx \quad (2.2)$$

Para o termo da direita aplicamos o Teorema do Valor Médio que nos dá  $f_p(x, \xi)$  com  $\xi$  dependendo de  $x$ . Subtraímos então  $\int_a^b f_p(x, p_0) dx$  de ambos os lados e usando o fato de que para funções integráveis  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ , temos

$$\left| \frac{F(p) - F(p_0)}{p - p_0} - \int_a^b f_p(x, p_0) dx \right| \leq \int_a^b |f_p(x, \xi) - f_p(x, p_0)| dx. \quad (2.3)$$

Como  $f_p$  é contínua no compacto  $[a, b] \times [c, d]$ , ela é uniformemente contínua, isto é, para  $p - p_0$  suficientemente pequeno a diferença do lado direito de (2.3) pode ser majorada para todo  $x$  por  $\delta$  arbitrariamente pequeno. Isso mostra que o primeiro termo de (2.3) está próximo de zero e que  $F$  é diferenciável, valendo a equação (2.1).

O próximo resultado não será demonstrado e pode ser encontrado em [4].

**Teorema 2.2. Teorema Fundamental do Cálculo Variacional**

*Se o funcional  $v[y]$  alcança seu extremo em  $y = y_0$ , sendo  $y_0$  definido em  $\Omega$ , então a variação do funcional  $v$  deve se anular em  $y_0$ , isto é,  $\delta v[y_0] = 0$ .*

Assim, os candidatos a extremos de  $v[y]$  são as funções  $y_0$  tal que  $\delta v[y_0] = 0$ .

No próximo item, apresentamos uma condição necessária para que um funcional alcance um extremo.

**2.3 Equação de Euler**

Suponhamos que exista uma função escalar  $y(x)$  de classe  $C^1$ , satisfazendo as condições de fronteira  $y(x_0) = y_0$  e  $y(x_1) = y_1$  e que seja um extremo para o funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

onde  $F$  é uma função de classe  $C^2$ .

Nosso objetivo é procurar as condições necessárias que a função  $y$  deve satisfazer para representar um extremo do funcional.

Seja uma função  $\bar{y}$  próxima à  $y$ , extremo do funcional, satisfazendo as condições de fronteira e consideremos a família de funções

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x)) \quad (2.4)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro real não negativo.

Observemos que se  $\alpha = 0$ ,  $y(x, 0) = y(x)$  e se  $\alpha = 1$ ,  $y(x, 1) = \bar{y}(x)$ .

Deste modo, esta família representa, para  $\alpha = 0$ , a função na qual o funcional alcança um extremo, e para  $\alpha = 1$ , a função  $\bar{y}(x)$ , chamada de *função comparação*.

Consideremos também a função  $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$ , chamada de variação de  $y$  com  $(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$ .

Ao considerarmos os valores do funcional  $v[y]$  apenas nas funções da família  $y = y(x, \alpha)$ , o funcional transforma-se em uma função de  $\alpha$ , isto é,

$$v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha). \quad (2.5)$$

Como  $y(x, 0) = y(x)$  e  $y(x)$  é um extremo para o funcional  $v$ , então a função  $\varphi$  apresenta um extremo em  $\alpha = 0$  e portanto  $\varphi'(0) = 0$ .

Como

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) dx$$

então, aplicando o Teorema 2.1, temos que:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[ F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx$$

onde

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)).$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x))] = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y'$$

obtém-se

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))\delta y + F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))\delta y'] dx$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x))\delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta y'] dx.$$

O valor  $\varphi'(0)$  representa a variação do funcional  $v$  em  $y$ , ou seja,  $\delta v$ .

Concluimos que uma condição necessária para que o funcional  $v[y]$  apresente um extremo em  $y$ , consiste na anulação da sua variação pelo Teorema 2.2, ou seja,

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y\delta y + F_{y'}\delta y'] dx = \delta v = 0.$$

Considerando que  $F_y\delta y$  e  $F_{y'}\delta y'$  são funções contínuas, temos que

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y\delta y] dx + \int_{x_0}^{x_1} [F_{y'}\delta y'] dx = \delta v = 0$$

isto é,

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y\delta y] dx = - \int_{x_0}^{x_1} [F_{y'}\delta y'] dx.$$

Resolvendo a segunda integral por partes, temos

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_{y'}\delta y'] dx = F_{y'}\delta y|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} [(F_{y'})'\delta y] dx.$$

Como  $\bar{y}(x_0) = y_0$  e  $\bar{y}(x_1) = y_1$ , então  $\delta y|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0$  e  $\delta y|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0$ . Assim,

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y) dx = - \left[ - \int_{x_0}^{x_1} ((F_{y'})'\delta y) dx \right],$$

e portanto

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0 \quad (2.6)$$

onde o primeiro fator  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$  é uma função contínua e o segundo fator  $\delta y$ , devido a arbitrariedade da eleição da função comparação  $\bar{y}$ , é uma função arbitrária e diferenciável e se anula nos pontos  $x = x_0$  e  $x = x_1$ .

O próximo passo é provar que

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \quad (2.7)$$

E para tanto, usaremos o seguinte Lema:

**Lema 2.1. Lema Básico do Cálculo Variacional**

Seja  $G(x)$  uma função definida e contínua em  $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$  com

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = 0 \quad (2.8)$$

para toda função  $\eta(x)$  contínua em  $[x_1, x_2]$ . Então,

$$G(x) = 0, \quad \forall x \in [x_1, x_2]. \quad (2.9)$$

**Demonstração:**

Suponhamos que exista  $x'$ ,  $x_1 \leq x' \leq x_2$  tal que  $G(x') \neq 0$ .

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $G(x') > 0$ . Como  $G$  é contínua, existe uma vizinhança de  $x'$ , digamos  $(x'_1, x'_2) \subset [x_1, x_2]$  tal que  $G(x) > 0$  para  $x \in (x'_1, x'_2)$ .

Consideremos a função:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 \leq x \leq x'_1 \\ (x - x'_1)^2 (x - x'_2)^2 & \text{se } x'_1 < x < x'_2 \\ 0 & \text{se } x'_2 \leq x \leq x_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Para esta função  $\eta$  particular, que é contínua em seu domínio de definição, temos que  $\eta(x) > 0$  para  $x \in (x'_1, x'_2)$  e como  $G(x) > 0$  para  $x \in (x'_1, x'_2)$ , então:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = \int_{x'_1}^{x'_2} (x - x'_1)^2 (x - x'_2)^2 G(x)dx > 0, \quad (2.11)$$

o que contradiz a hipótese.

Se  $G(x') < 0$ , basta considerarmos a função  $-G(x')$ .

Portanto,  $G(x) = 0$  para todo  $x \in [x_1, x_2]$ .

Retornando à teoria, sendo a função  $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}$  contínua em  $[x_0, x_1]$  e a variação  $\delta y$  uma função arbitrária, temos, pelo lema anterior e por (2.6) que

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \quad (2.12)$$

para todo  $x \in [x_0, x_1]$ .

Portanto, a função extremal  $y$  do funcional  $v[y]$  deve satisfazer a equação diferencial de segunda ordem, dada por (2.12), denominada de **Equação de Euler**.

Agora vejamos um exemplo da utilização da Equação de Euler para determinar extremos de um funcional.

**Exemplo 2.1.** Em que curva o funcional a seguir pode alcançar seu extremo?

$$v[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

A Equação de Euler tem a forma  $y'' - 6x = 0$ , que tem como solução geral  $y = x^3 + C_1x + C_2$ . Utilizando as condições de fronteira, obtemos:  $C_1 = 0, C_2 = 0$ . Portanto  $y = x^3$  é candidata a extremo do funcional.

## 2.4 Alguns casos particulares de $F$

No exemplo dado anteriormente a Equação de Euler foi resolvida facilmente, mas isso nem sempre ocorre.

Vejamos agora alguns casos particulares da Equação de Euler.

1. Se  $F$  depender somente de  $x$  e  $y'$ .

Considerando a função  $F = F(x, y')$ , a Equação de Euler assume a forma  $\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ , ou seja :

$$F_{y'}(x, y') = C. \tag{2.13}$$

Desta forma, a busca por uma função extremal foi reduzida à solução de uma equação diferencial de primeira ordem envolvendo  $y'$  e  $x$ .

**Exemplo 2.2.** Determine as funções que, ligando  $A(1, 3)$  e  $B(2, 5)$  são extremas do funcional

$$v[y(x)] = \int_1^2 y'(x)(1 + x^2 y'(x)) dx.$$

Como  $F$  só depende de  $y'$  e  $x$  a Equação de Euler é da forma (2.13), portanto

$$1 + 2x^2 y'(x) = C$$

que tem como solução,

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2, \quad x \neq 0$$

com  $C_1 = \frac{1-C}{2}$ . A fim de se escolher qual hipérbole desta família passa pelos pontos dados, obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ \frac{C_1}{2} + C_2 = 5 \end{cases}$$

que nos fornece  $C_1 = -4$  e  $C_2 = 7$ . Com isso o candidato a extremal procurado é

$$y(x) = 7 - \frac{4}{x}, \quad x \neq 0.$$

**2.** Se  $F$  depender apenas de  $y'$ .

Desta forma  $F_y = 0$ , e mais, a derivada parcial  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  pode ser representada como uma função  $\phi$  de  $y'$  e a Equação de Euler é dada por:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} (\phi(y')) = \phi'(y')y'' = 0.$$

Para que esta equação tenha validade para toda função  $\phi$  é necessário que,

$$y'' = 0$$

que tem como solução

$$y(x) = C_1x + C_2. \tag{2.14}$$

Neste caso, quando  $F$  depender apenas de  $y'$ , as funções extremais são necessariamente funções lineares.

### Exemplo 2.3. Comprimento de Arco

Seja  $y = f(x)$  uma função contínua em  $[a, b]$  com derivadas contínuas em  $]a, b[$ . Queremos definir o comprimento de seu gráfico, que é a curva  $C$ , entre os pontos  $P_0(a, f(a))$  e  $P_n(b, f(b))$ .

Para tanto, em primeiro lugar, vamos considerar uma partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$ :

$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , tal que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

Consideremos a linha poligonal determinada pelos pontos  $P_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , dados por  $(x_i, f(x_i))$ .

Assim, o comprimento de  $C$  é dado por:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

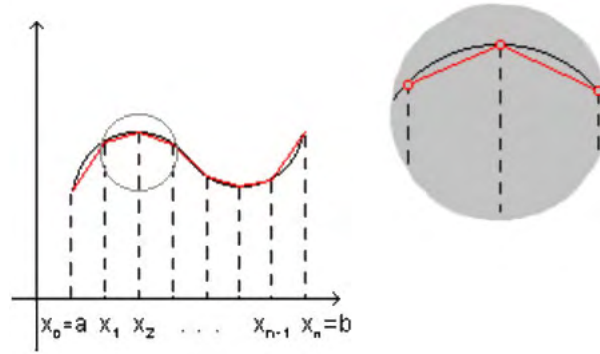


Figura 2.1: Partição de  $[a, b]$  (ELSGOLTZ,1696).

onde

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left[ 1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2} \right]} \end{aligned}$$

Como  $f$  é de classe  $C^1$ , por hipótese, a expressão  $L$  pode ser melhorada. Pelo Teorema do Valor Médio, podemos escrever:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

para algum  $\bar{x}_i$  tal que  $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i$ , ou seja,

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left[ 1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2} \right]} = \sqrt{1 + [f'(\bar{x}_i)]^2} \Delta x_i$$

onde  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  para  $1 \leq i \leq n$ .

Desta maneira,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\bar{x}_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

uma vez que  $\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\bar{x}_i)]^2} \Delta x_i$  é uma soma de Riemann para a função  $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  relativo à partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$ .

Assim, o comprimento da curva  $C$  é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Agora encontremos o candidato a extremal do funcional  $L$  obtido anteriormente. Percebemos que este funcional pode ser escrito na forma:

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx; \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1.$$

Como o funcional dado só depende de  $y'$  a Equação de Euler tem a forma (2.14) e assim, temos que  $y(x) = C_1x + C_2$  é o extremal para o funcional. Aplicando as condições de fronteira, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1x_0 + C_2 = y_0 \\ C_1x_1 + C_2 = y_1 \end{cases}$$

que apresenta como solução do problema

$$y(x) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} (x - x_0) + y_0.$$

**3.** Se  $F$  não depender de  $y'$ .

Neste caso, a Equação de Euler reduz-se a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0. \tag{2.15}$$

Observe que esta equação não depende de constantes indeterminadas, por isso, em geral não satisfaz as condições de fronteira  $y(x_0) = y_0$  e  $y(x_1) = y_1$ .

Portanto, a solução do problema variacional considerado em geral não existe. Só existirá uma função na qual o funcional alcança um extremo no caso excepcional, quando a solução  $y(x)$  passar pelos pontos de fronteira,  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ .

**Exemplo 2.4.** Determine a função extremal para

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y) dx \quad y(0) = 0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Como  $F$  não depende de  $y'$ , a equação de Euler terá a forma (2.15), assim teremos

$$2x - 2y = 0$$

isto é,

$$y = x$$

que satisfaz as condições de fronteira. Com isso, o funcional pode, eventualmente, assumir um extremo.

Por outro lado, se mudarmos as condições de fronteira, por exemplo  $y(0) = 0$  e  $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ , o problema torna-se insolúvel.

4. Se  $F$  é linear em relação a  $y'$ .

Neste caso, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'.$$

Desta forma o funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{x_1} [M(x, y) + N(x, y)y'] dx, \quad (2.16)$$

tem a Equação de Euler dada por

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \quad (2.17)$$

Assim como no caso anterior, só teremos solução se a função satisfizer as condições de fronteira.

**Exemplo 2.5.** Considere o funcional

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = a.$$

Temos neste caso um funcional linear em relação a  $y'$ , assim

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0.$$

Então

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

é equivalente a

$$y = x.$$

Notemos que a primeira condição de fronteira está satisfeita pois  $y(0) = 0$ , mas a segunda condição só está satisfeita se  $a = 1$ .

Para  $a \neq 1$ , não existe extremal que satisfaça as condições de fronteira.

5. Se  $F$  depender apenas de  $y$  e  $y'$ .

Uma outra forma de escrevermos a Equação de Euler é dada por

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = F_y - F_{xy'} - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0. \quad (2.18)$$

Como  $F$  não depende de  $x$  explicitamente, temos

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y''}y'' = 0.$$

Multiplicando por  $y'$  obtemos

$$F_y y' - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y''} y'' y' = 0$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0$$

visto que,

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = F_y y' + [F_{y'y''} y'' - y'' F_{y'}] - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y''} y'' y'.$$

Então,

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0$$

e integrando em relação a  $x$ , resulta

$$F - y' F_{y'} = C_1. \quad (2.19)$$

Terminamos assim, a análise dos possíveis casos para o funcional  $F$  e no próximo item citaremos alguns resultados relacionados com as condições suficientes que o funcional  $F$  deve satisfazer para admitir um extremo. Esta teoria só será citada e não será desenvolvida por completa e os resultados podem ser encontrados em [4], páginas 358-369.

## 2.5 Condições suficientes para extremos

Para apresentar as condições suficientes para que um funcional  $v$  apresente extremal em uma curva  $C$ , são necessárias, preliminarmente, algumas definições e considerações.

Se num dado plano  $xy$ , por cada ponto de uma certa região  $D$  passar apenas uma curva da família  $y = y(x, c)$ , dizemos que esta família de curvas forma um campo na região  $D$ , ou mais exatamente, um campo próprio.

Por exemplo, as retas paralelas  $y = x + c$  formam um campo no interior do círculo centrado na origem, de raio 1, e o coeficiente angular de cada reta tangente às curvas da família de retas, no ponto  $(x, y)$  é  $p(x, y) = 1$ .

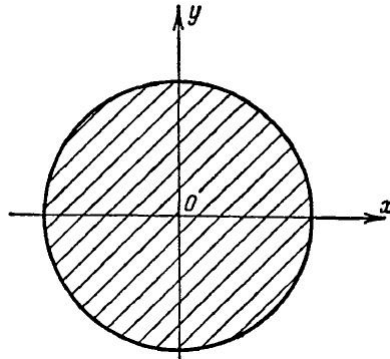


Figura 2.2: Retas  $y = x + c$  (ELSGOLTZ,1696).

Por outro lado, a família de parábolas  $y = (x - a)^2 - 1$  não forma um campo no interior do mesmo círculo, pois as parábolas se cruzam.

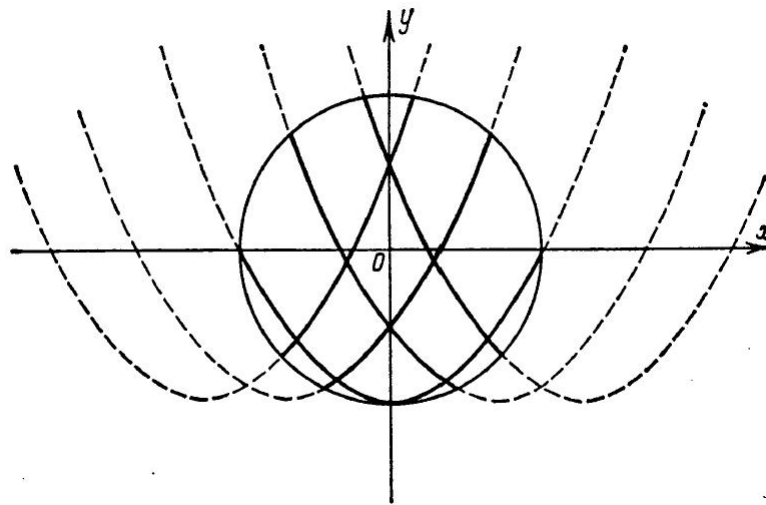


Figura 2.3: Parábolas  $y = (x - a)^2 - 1$  (ELSGOLTZ,1696).

Quando as curvas de uma família cobrem toda a região  $D$  e se cortam em seu interior, somente no seu centro, dizemos que a família forma um campo, chamado de **campo central**.

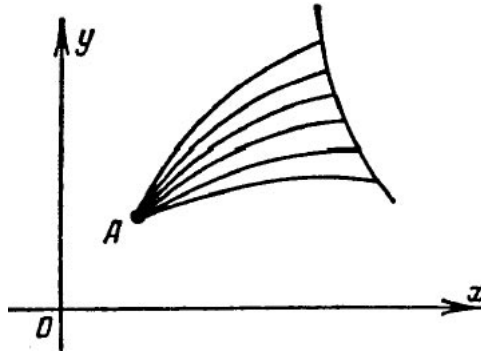


Figura 2.4: Campo central (ELSGOLTZ,1696).

**Exemplo 2.6.** As senóides  $y = C \operatorname{sen} x$ , que formam um campo central, para  $0 \leq x \leq a$ ,  $a < \pi$  (Figura 2.5). Esta mesma família forma um campo próprio em uma região do  $\mathbb{R}^2$  que contém o segmento  $\delta \leq x \leq a$  no eixo das abscissas, em que  $\delta > 0$  e  $a < \pi$ .

Porém, se a região contiver o segmento  $0 \leq x \leq a_1$ ,  $a_1 > \pi$ , esta família não forma um campo.

Se um campo central ou próprio for formado por uma família de extremais de um certo problema variacional, então o campo será chamado de campo de extremais.

Suponhamos agora que a curva  $y = y(x)$  seja extremal para o problema variacional dado pelo funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

com pontos de fronteira  $A(x_0, y_0)$  e  $B(x_1, y_1)$ , fixos.

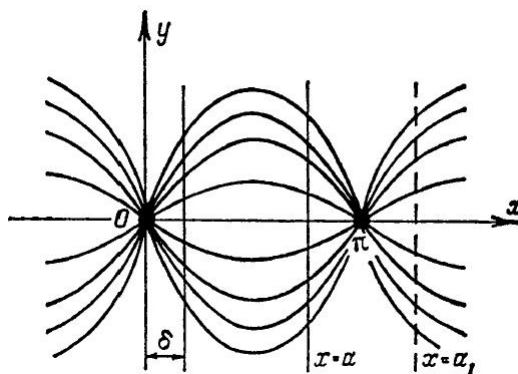


Figura 2.5: Senóides  $y = C \operatorname{sen} x$  (ELSGOLTZ,1696).

Dizer que o extremal  $y = y(x)$  está incluso em um campo de extremais, significa que uma família de extremais  $y = y(x, c)$  forma um campo em uma região  $D$  que contém

o extremal  $y = y(x)$  dado para um certo valor  $c_0$ , de forma que este extremal não pertença à fronteira da região  $D$ .

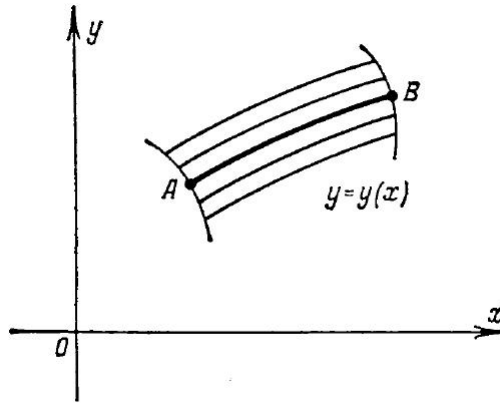


Figura 2.6: Campo de extremal 1 (ELSGOLTZ,1696).

Se os extremais apresentarem como centro o ponto  $A(x_0, y_0)$ , também teremos um campo em torno de extremal dado que passa por este ponto, ou seja, um campo central. Como parâmetro da família, pode-se tomar a inclinação da tangente às curvas no ponto  $A(x_0, y_0)$ .

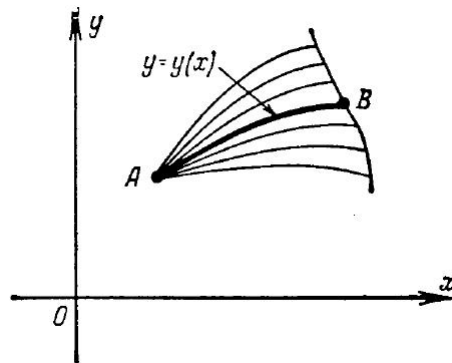


Figura 2.7: Campo de extremal 2 (ELSGOLTZ,1696).

Como exemplo considere o funcional  $v[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2)dx$  e um extremal  $y = 0$  que une os pontos  $(0, 0)$  e  $(a, 0)$ , onde  $0 < a < \pi$ . A solução geral da equação de Euler  $y'' + y = 0$  é  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ .

Usando as condições de fronteira, obtemos  $c_1 = 0$  e assim as curvas  $y = c_2 \sin x$  formam um campo central no segmento  $0 \leq x \leq a$ ,  $a < \pi$ , que inclui o extremal  $y = 0$  para  $c_2 = 0$ .

Agora vamos analisar as condições que garantem a construção de um campo central de extremais com centro em um ponto  $A$  e que contenha o arco  $AB$  do extremal.

Esta condição da possibilidade da construção de um campo de extremais que inclua o extremal dado, chama-se condição de Jacobi.

Seja  $y = y(x, c)$  a família de extremais com centro em  $A$ , que contém o extremal dado.

Como o extremal dado satisfaz a Equação de Euler, então temos que  $\frac{\partial y(x_0, c)}{\partial c} = 0$  e  $\frac{\partial y}{\partial c}$  é uma função que só depende da variável  $x$ , pois a constante  $c$  é uma constante de integração.

Por exemplo, considere o extremal do funcional  $v[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'(2x - \frac{1}{2}y')dx$  com  $y(x_0) = y_0$  e  $y(x_1) = y_1$ .

A Equação de Euler é dada por:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = -\frac{d}{dx}[2x - y'] = -2 + y'' = 0.$$

Assim,  $y'' = 2$ ,  $y' = 2x + c$ , então  $y = x^2 + cx + d$ .

Como  $y(x_0) = y_0$ , então  $y = x^2 + cx + [y_0 - x_0^2 - cx_0]$  e se  $f(x, c) = x^2 + cx$ , temos que  $y(x, c) = f(x, c) + [y_0 - f(x_0, c)]$ .

Logo,  $\frac{\partial y(x, c)}{\partial c} = \frac{\partial f(x, c)}{\partial c} - \frac{\partial f(x_0, c)}{\partial c}$  e portanto  $\frac{\partial y(x_0, c)}{\partial c} = 0$  e  $\frac{\partial y(x, c)}{\partial c} = x - x_0$ , isto é,  $\frac{\partial y}{\partial c}$  é uma função que só depende da variável  $x$ .

Voltando ao problema, devemos encontrar uma função de extremais  $y(x, c)$  com  $\frac{\partial y}{\partial c} = u(x)$ ,  $u(x_0) = 0$  e que  $u(x)$  não se anula em outro ponto do intervalo  $(x_0, x_1)$ , para que não tenha outros pontos em comum com o extremal  $y$  dado, além do ponto  $A(x_0, y_0)$ .

Logo, se  $u(x) = \frac{\partial y(x, c)}{\partial c}$ , então  $u' = u_x = \frac{\partial^2 y(x, c)}{\partial c \partial x}$ .

As funções  $y = y(x, c)$  são soluções da equação de Euler; portanto

$$F_y(x, y(x, c), y'(x, c)) - \frac{d}{dx}[F_{y'}(x, y(x, c), y'(x, c))] = 0.$$

Derivando esta identidade em relação à  $c$  temos:

$$F_{yy}u + F_{yy'}u' - \frac{d}{dx}[F_{yy'}u + F_{y'y'}u'] = 0$$

ou,

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}[F_{y'y'}u] = 0.$$

Esta equação diferencial de 2ª ordem, linear e homogênea, é chamada de Equação de Jacobi.

Concluimos que a condição suficiente para que o arco  $AB$  do extremal possa ser incluído em um campo central de extremais centrados no ponto  $A(x_0, y_0)$  é que a solução  $u = u(x)$  da Equação de Jacobi, que satisfaz a condição  $u(x_0) = 0$ , não se anule em outro ponto do intervalo  $(x_0, x_1)$ .

**Exemplo 2.7.** Verifiquemos se a condição de Jacobi está satisfeita para o extremal do funcional  $v = \int_0^a (y'^2 - y^2)dx$ , que passa pelos pontos  $A(0, 0)$  e  $B(a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . A equação de Jacobi é dada por

$$-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \quad \text{ou} \quad u'' + u = 0$$

onde

$$u = C_1 \operatorname{sen}(x - C_2).$$

Como  $u(0) = 0$ , então  $C_2 = 0$  e  $u = C_1 \operatorname{sen}x$ .

A função  $u$  anula-se nos pontos  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , portanto, se  $0 < a < \pi$ , a função  $u$  se anula no segmento  $0 \leq x \leq a$  somente no ponto  $x = 0$  e a condição de Jacobi se cumpre.

Mas, se  $a \geq \pi$ , a função  $u$  se anula no segmento  $0 \leq x \leq a$ , pelo menos, no ponto  $x = \pi$ ; a condição de Jacobi não se cumpre.

Agora vamos analisar o comportamento do incremento  $\Delta v$ .

Suponhamos que para o problema

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx, \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1$$

a condição de Jacobi se cumpre e portanto, o extremal  $C$  que passa pelos pontos  $A(x_0, y_0)$  e  $B(x_1, y_1)$  pode ser incluído em um campo central com inclinação  $p(x, y)$ .

É possível transformar o incremento  $\Delta v = \int_{\tilde{C}} F(x, y, y')dx - \int_C F(x, y, y')dx$  em uma forma mais apropriada, para se analisar o sinal de  $\Delta v$  ao passar do extremal  $C$  à uma certa curva próxima admissível  $\tilde{C}$ . Porém, não apresentamos neste trabalho as considerações necessárias para esta transformação.

O incremento pode ser dado por

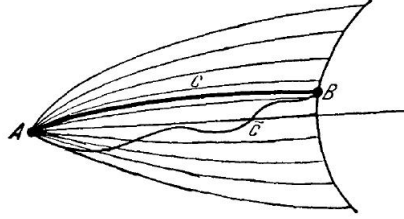


Figura 2.8: Campo central com inclinação  $p(x, y)$  (ELSGOLTZ,1696).

$$\begin{aligned}\Delta v &= \int_{\tilde{C}} [F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)] dx \\ &= \int_{\tilde{C}} E(x, y, p, y') dx,\end{aligned}$$

onde a função  $E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$  é chamada de Função de Weierstrass.

Assim, concluímos que uma condição suficiente para que o funcional  $v$  assuma um mínimo na curva  $C$  é que a função  $E$  não seja negativa, pois se  $E \geq 0$ , então também  $\Delta v \geq 0$ .

E uma condição suficiente para que  $v$  assuma um máximo em  $C$  será  $E \leq 0$ , ou seja,  $\Delta v \leq 0$ .

Observemos que o estudo do sinal da função  $E$  pode trazer certas dificuldades e por isto, é conveniente substituir a condição de que a função  $E$  tenha sinal constante por outra condição de comprovação mais fácil.

Suponhamos que a função  $F(x, y, y')$  seja derivável até a ordem 3 em relação ao argumento  $y'$ . Pela Fórmula de Taylor,

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!}F_{y'y'}(x, y, q)$$

onde  $q$  está entre  $p$  e  $y'$ .

Sendo

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$$

temos que

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y' - p)^2}{2!}F_{y'y'}(x, y, q).$$

Assim, analisar o sinal de  $E$  é equivalente a analisar o sinal de  $F_{y'y'}$ , ou seja, ao estudar a possibilidade de um extremal mínimo, basta avaliar se  $F_{y'y'}(x, y, q) \geq 0$  nos pontos  $(x, y)$  próximos dos pontos da curva  $C$ , para valores arbitrários de  $q$ . E para

avaliar um extremal máximo, devemos ter  $F_{y'y'}(x, y, q) \leq 0$ .

A partir das considerações já feitas, vamos agora citar as condições suficientes para que um funcional  $v$  apresente um extremal em uma curva  $C$ , que são:

**1:** A curva  $C$  é um extremal que satisfaz as condições de fronteira.

**2.** O extremal  $C$  pode ser incluído em um campo de extremais. Esta condição pode ser obtida através da condição de Jacobi, representada pela equação que tem o seu nome, dada por

$$\left( F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) u - \frac{d}{dx} [F_{y'y'} u'] = 0$$

em que  $u(x) = \frac{\partial y(x, c)}{\partial c}$ .

**3.** A função de Weierstrass  $E(x, y, p, y')$  não altera seu sinal em todos os pontos  $(x, y)$  próximos à curva  $C$  e para valores arbitrários de  $y'$  no caso de extremal mínimo,  $E \geq 0$  ( $F_{y'y'} \geq 0$ ) e no caso de extremal máximo  $E \leq 0$  ( $F_{y'y'} \leq 0$ ).

Neste capítulo estruturamos a teoria do Cálculo Variacional que será utilizada no capítulo seguinte com o objetivo de determinar a solução do problema da Braquistócrona.

## 3 O Problema da Braquistócrona

O problema da Braquistócrona foi proposto por Johann Bernoulli em 1696 e consiste em encontrar uma curva que uma partícula deve descrever ao se deslocar de um ponto  $A$  até um ponto  $B$  situados em um mesmo plano vertical, no menor tempo possível, apenas sob a ação da gravidade. Neste caso o ponto  $A$  é suposto estar acima do ponto  $B$ , mas não na mesma vertical. Se  $A$  e  $B$  estiverem na mesma vertical, a solução é uma reta.

Neste capítulo vamos deduzir, de duas formas distintas, que a curva procurada é a cicloide; a primeira aplicando a teoria de Cálculo Variacional obtido no capítulo anterior e a segunda, tratando a questão como um problema que envolve Óptica e Geometria .

Apresentamos também, algumas simulações computacionais com a utilização do programa Maple, evidenciando os resultados apresentados neste trabalho.

### 3.1 Modelagem do problema usando Cálculo Variacional

Esquematisando o problema no plano.

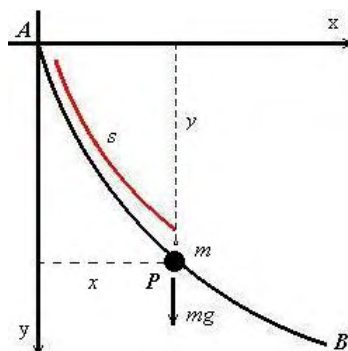


Figura 3.1: Esquema do Problema da Braquistócrona no plano.

Note que o eixo  $y$  está orientado no sentido oposto ao usual. Isto é conveniente pois, neste caso, a força exercida pela gravidade fica orientada no sentido positivo.

Consideremos um sistema de coordenadas onde  $A$  seja a origem, ou seja, os pontos relacionados ao problema são  $A(0,0)$  e  $B(x_1, y_1)$ .

Em Física, quando uma partícula atua sob a ação da gravidade, o trabalho realizado ao se deslocar de  $A$  até um ponto  $P$  é igual à variação da energia cinética.

Se  $v$  é o módulo da velocidade da partícula no ponto  $P$ ,  $y$  o seu deslocamento vertical e  $m$  sua massa, temos:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

Mas, a velocidade escalar é a variação do espaço percorrido  $s$ , pelo tempo, ou seja,

$$\frac{ds}{dt} = v \quad e \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Sabemos que o comprimento do arco entre  $A(0,0)$  e  $P(x,y)$ , representado pelo gráfico da função  $y = y(x)$ , é dado por

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)} d\xi$$

que derivando, resulta

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2(x)}.$$

Assim, denotando por  $t$  o tempo gasto neste trajeto, temos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (3.1)$$

Para determinarmos o tempo total para se deslocar de  $A(0,0)$  a  $P(x,y)$  basta integrar (3.1)

$$t(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2(s)}{2gy(s)}} ds. \quad (3.2)$$

Observemos que este funcional não depende explicitamente de  $x$  e assim, a Equação de Euler tem a forma (2.19).

Consideremos então

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2(s)}{y(s)}} ds, \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(x_1) = y_1.$$

Nosso problema é agora, encontrar a função  $y(x)$  que minimiza (3.2), com as condições de fronteira dadas.

Neste caso a função considerada é  $F(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ . Assim,

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

Sendo a Equação de Euler  $F - y'F_{y'} = C_1$  dada por (2.19), temos

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C_1$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C_1$$

ou seja,

$$y(1+y'^2) = C_2.$$

Para resolver esta equação diferencial, vamos introduzir um parâmetro  $t$  considerando  $y'(x(t)) = \cot(t)$  e assim, utilizando a equação diferencial anterior, obtemos

$$y = \frac{C_2}{1 + \cot^2(t)}.$$

Fazendo algumas substituições trigonométricas temos

$$y = \frac{C_2}{2} (1 - \cos(2t)).$$

Derivando  $y$  em relação à  $t$ , temos

$$dy = C_2 \operatorname{sen}(2t) dt = 2C_2 \operatorname{sen}(t) \cos(t) dt.$$

Como  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ , então  $dx = \frac{dy}{y'(x)}$ , assim

$$dx = \frac{2C_2 \operatorname{sen}(t) \cos(t) dt}{\cot(t)} = 2C_2 \operatorname{sen}^2(t) dt.$$

Fazendo substituição trigonométrica, temos

$$dx = C_2 (1 - \cos(2t)) dt$$

ou seja,

$$x(t) = C_2 t - \frac{C_2 \operatorname{sen}(2t)}{2} + C_3 = \frac{C_2}{2} (2t - \operatorname{sen}(2t)) + C_3.$$

Assim, a solução paramétrica é dada por

$$y(t) = \frac{C_2}{2} (1 - \cos(2t)) \quad e \quad x(t) - C_3 = \frac{C_2}{2} (2t - \operatorname{sen}(2t))$$

Fazendo  $2t = t_1$  e sendo  $C_3 = 0$  pois  $x(0) = 0$ , obtemos

$$y = \frac{C_2}{2} (1 - \cos(t_1)) \quad e \quad x = \frac{C_2}{2} (t_1 - \operatorname{sen}(t_1)),$$

que é a equação paramétrica da curva chamada cicloide, que definimos a seguir.

**Definição 3.1.** *Seja  $C$  uma circunferência de raio  $r$ ,  $s$  uma reta e  $P$  um ponto de  $C$ . Denominamos cicloide à curva descrita pelo ponto  $P$  quando  $C$  rola sobre a reta  $s$ , sem deslizar, dada pela equação paramétrica:*

$$\begin{cases} x = r(\alpha - \operatorname{sen}\alpha) \\ y = r(1 - \operatorname{cos}\alpha) \end{cases}$$

Concluimos que a curva candidata para o problema da Braquistócrona é a cicloide. Agora vamos aplicar as condições suficientes para mostrar que a cicloide seja realmente a curva que minimiza o tempo de descida da partícula entre os dois pontos.

O feixe de cicloides  $x = C_1(t - \operatorname{sen}(t))$  e  $y = C_1(1 - \operatorname{cos}(t))$  com centro em  $(0, 0)$  forma um campo central que inclui o extremal

$$x = a(t - \operatorname{sen}(t)) \quad e \quad y = a(1 - \operatorname{cos}(t)),$$

onde  $a$  é determinado pela condição de que a cicloide passa pelo segundo ponto de fronteira  $B(x_1, y_1)$ , então  $x_1 < 2\pi a$  (Figura 3.2).

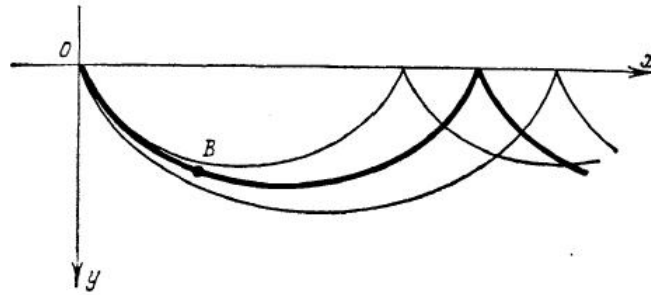


Figura 3.2: Feixe de Cicloides (ELSGOLTZ,1696).

Temos também

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \quad e$$

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

para qualquer  $y'$ . Assim, pelas condições suficientes, para  $x_1 < 2\pi a$ , o funcional assume um mínimo na cicloide.

$$x = a(t - \text{sen}(t)) \quad e \quad y = a(1 - \text{cos}(t)).$$

Desta forma temos a comprovação de que a solução do problema da Braquistócrona é realmente a cicloide.

No próximo item, desenvolvemos o problema proposto através da Óptica e Geometria.

## 3.2 Resolução de Johann Bernoulli

Nesta segunda resolução do problema da Braquistócrona, vamos seguir os passos da solução dada por Johann Bernoulli. Consideremos, inicialmente, os seguintes fatos:

1. Pelo **Princípio de Fermat**, sabemos que a luz viaja de um ponto para outro no menor tempo possível.

2. Pelo **fenômeno da refração**, a luz tem uma velocidade diferente conforme o meio em que se propaga ( veja Figura 3.3). Se tivermos dois meios distintos nos quais a luz se propaga com velocidades  $v_1$ ,  $v_2$ , a lei de refração afirma que

$$\frac{\text{sen}\mu_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\mu_2}{v_2} = \text{cte} = K \quad (3.3)$$

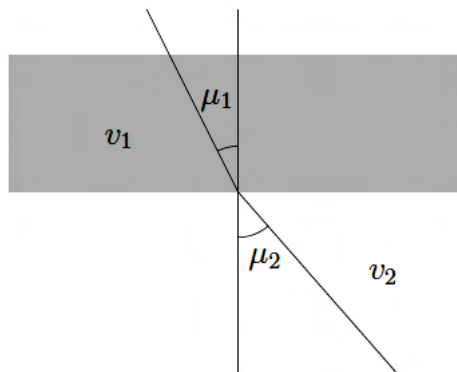


Figura 3.3: Esquema para o fenômeno da refração da luz (LIMA,2004).

3. Imaginemos um meio óptico formado por lâminas  $l_1, l_2, \dots, l_n$  horizontais e finas tais que a velocidade da luz em cada lâmina seja  $v_i, i = 1 \dots n$  conforme mostra a Figura 3.4. Então, um raio de luz que parte de A e chega em B, seguirá uma trajetória como indicada na Figura 3.4, de modo que, para todo  $j, j = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\text{sen}\mu_j}{v_j} = K. \quad (3.4)$$

Esse caminho percorrido pelo raio de luz é o que fornece tempo mínimo para ir de A até B com as velocidades indicadas.

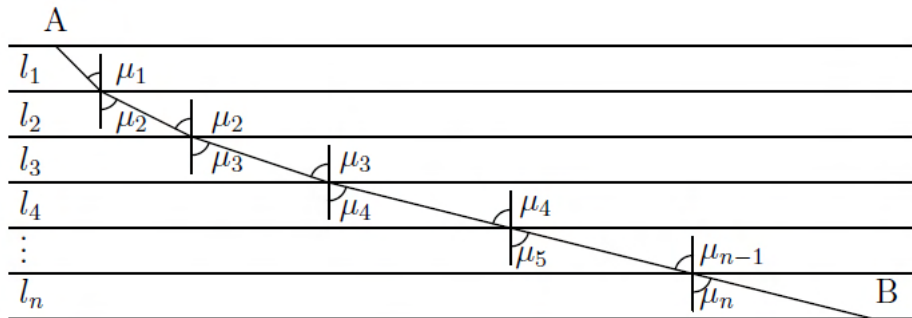


Figura 3.4: Meio óptico e a trajetória descrita por um raio de luz partindo de A chegando em B (LIMA,2004).

Embora o princípio de tempo mínimo usado anteriormente venha ao encontro do problema da Braquistócrona, ainda não está claro como podemos utilizar o fenômeno da refração para resolvê-lo.

A dificuldade é que no problema da Braquistócrona a velocidade com que a partícula se desloca sobre a curva varia de acordo com a posição em que ela se encontra. Já no caso da refração do raio de luz, a velocidade é constante em cada meio.

Para transpor esta dificuldade faremos o uso da noção de limite.

4. Sabemos que a velocidade, depois da partícula descer uma altura  $y$  é  $\sqrt{2gy}$ . Então, o caminho que dá o tempo mínimo será o caminho seguido por um raio de luz num meio tal que a velocidade da luz aumente continuamente com a descida  $y$  e seja precisamente  $\sqrt{2gy}$ .

No limite deste processo, é de se esperar que a trajetória da luz através de um meio cuja densidade aumente continuamente à medida que o raio de luz desce, satisfaça

$$\frac{\text{sen}\mu}{v} = K \quad (3.5)$$

onde  $\mu$  é o ângulo que a reta tangente à trajetória faz com a perpendicular e  $v$  é a velocidade instantânea.

Para finalizar o problema da Braquistócrona consideremos a figura a seguir.

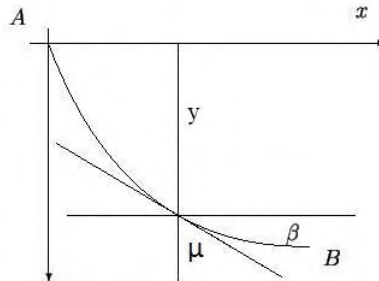


Figura 3.5: Ângulo entre o caminho descrito pelo raio de luz e a vertical (LIMA,2004).

Como a partícula deve descrever a trajetória mais rápida e sua velocidade escalar é variável, tudo passa como no caso do raio de luz que atravessa um meio não-homogêneo. Como vimos anteriormente, devemos ter:

$$\frac{\text{sen}\mu}{v} = K. \quad (3.6)$$

Como  $v = \sqrt{2gy}$  e  $y' = \tan\beta$ , combinando a identidade trigonométrica, temos

$$\text{sen}\mu = \cos\beta = \frac{1}{\text{sec}\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}}.$$

Com (3.6), obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(1 + (y')^2)}} = K.$$

Simplificando esta última equação, chegamos a

$$y[1 + (y')^2] = c.$$

Como vimos anteriormente na **seção 3.1**, a solução desta equação diferencial é a função que representa a cicloide.

Vamos agora, a título de ilustração, verificar que a cicloide satisfaz a igualdade (3.6).

Temos que

$$\frac{dx}{d\alpha} = r - r\cos\alpha, \quad \frac{dy}{d\alpha} = r\text{sen}\alpha. \quad (3.7)$$

Por outro lado,

$$\tan\mu = \frac{dx}{dy} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2} \quad (3.8)$$

e, portanto,

$$\tan\mu = \tan\frac{\alpha}{2}. \quad (3.9)$$

Assim,

$$\mu = \frac{\alpha}{2} \quad (3.10)$$

e também,

$$v = \sqrt{2gr(1 - \cos\alpha)} = 2\sqrt{gr}\sin\frac{\alpha}{2}. \quad (3.11)$$

Assim, de fato,

$$\frac{\sin\mu}{v} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gr}} = \frac{1}{2\sqrt{gr}} = \text{cte} = K \quad (3.12)$$

onde  $K$  não depende de  $\alpha$ . Portanto, a cicloide tem a propriedade dada por (3.6).

### 3.3 Análise de dados obtidos através de simulações computacionais

Nesta seção vamos usar alguns recursos do software matemático Maple 12, para obtermos uma comparação do tempo gasto pela partícula para percorrer a trajetória do ponto  $A(0, 0)$  ao ponto  $B(\pi, -2)$ , ao longo das curvas dadas por:

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = -\frac{2}{\pi}x.$$

$$f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = -2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = -2\sqrt[3]{\frac{x}{\pi}}.$$

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f_4(t) = (t - \sin(t), -1 + \cos(t)).$$

Para calcular o tempo gasto no percurso, devemos avaliar a integral

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 + y'^2(s)}{y(s)}} ds$$

utilizando as funções definidas anteriormente, usando que a força da gravidade é igual a  $9.8 \text{ m/s}^2$ .

E para calcular o comprimento das trajetórias, usamos a função comprimento de arco. Através do programa Maple, obtivemos os seguintes resultados:

Curva	Tempo Gasto	Comprimento
$f_1$	1.19	3.73
$f_2$	1.01	3.88
$f_3$	1.02	4.03
$f_4$	1.00	4.00

Tabela 3.1: Comparação entre as funções.

Observemos que a cicloide, que é representada por  $f_4$ , é a curva que possui a trajetória mais rápida. De forma surpreendente, a reta, representada por  $f_1$ , que possui a trajetória mais curta, é também a que apresenta maior tempo gasto para completar o trajeto. A seguir, apresentamos as trajetórias da partícula através das curvas dadas pelas funções  $f_i$ ,  $i=1, \dots, 4$ , em quatro instantes diferentes, evidenciando os resultados citados. E para um melhor entendimento destes fatos, apresentamos também, no apêndice, os comandos necessários para obter uma animação gráfica, evidenciando o tempo gasto pela partícula ao deslizar por cada curva.

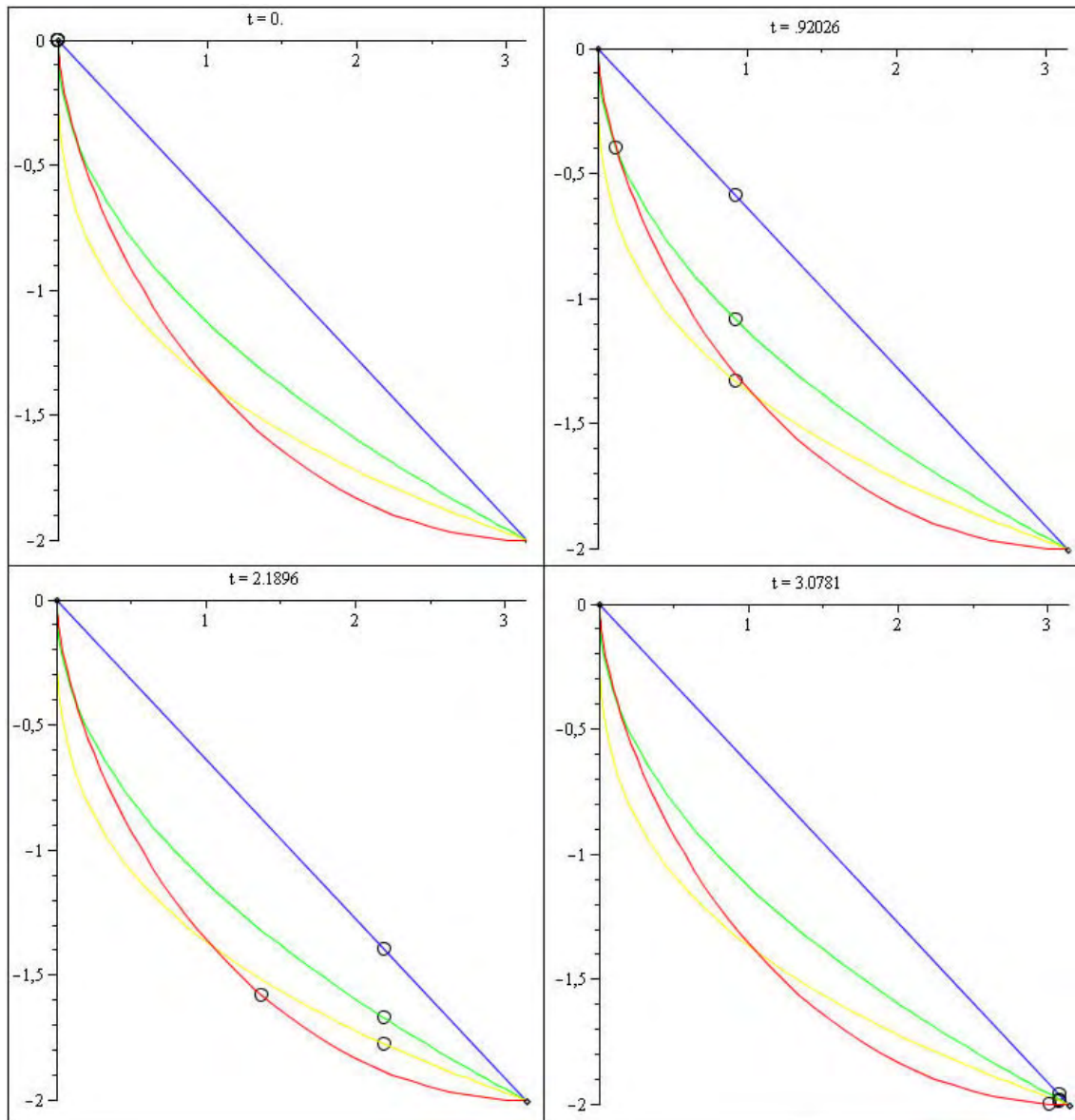


Figura 3.6: Trajetórias da partícula através das curvas dadas por:  $f_1(x) = -\frac{2}{\pi}x$  (azul),  $f_2(x) = -2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$  (verde),  $f_3(x) = -2\sqrt[3]{\frac{x}{\pi}}$  (amarelo) e  $f_4(t) = (t - \sin(t), -1 + \cos(t))$  (vermelho) entre  $t=0$ ;  $t=0.92026$ ;  $t=2.1896$  e  $t=3.0781$ .

## 4 Conclusão

Com este trabalho tivemos a oportunidade de perceber como se deu o desenvolvimento de uma nova teoria matemática. Vimos que a partir de um problema proposto como desafio aos matemáticos da época, iniciou-se uma busca por métodos de solução o que culminou no que hoje conhecemos como Cálculo Variacional.

Desenvolvemos a teoria de Cálculo Variacional associada aos problemas onde as fronteiras são fixas, com o objetivo de solucionarmos um dos problemas clássicos mais famosos: O problema da Braquistócrona.

Sugerimos a leitura da Ref. [4], capítulos 7 e 8, onde o autor trata de problemas com fronteiras móveis e aborda de forma ampla as condições suficientes para extremos; nesta leitura será possível perceber a grandiosidade da teoria do Cálculo Variacional e suas ramificações com outras áreas do conhecimento.

Desenvolvemos a solução do problema da Braquistócrona de duas formas distintas em que obtivemos como resposta a cicloide. Em seguida, fizemos a utilização do software Maple com o objetivo de comparar o tempo gasto pela partícula através de diversas curvas; a conclusão obtida já era esperada devido ao desenvolvimento teórico anterior; mais uma vez constatamos que a cicloide é a curva que resulta o menor tempo.

Gostaríamos que a proposta de estudar um problema clássico do cálculo variacional desenvolvida neste trabalho, inspirasse outras iniciativas nesta mesma linha ou até mesmo na aplicação destes problemas. Para tal sugerimos a leitura do livro *Calculus of Variations: With Application to Physics and Engineering* do autor Robert Weinstock, onde o autor aborda algumas aplicações do cálculo variacional na física e na engenharia.

# Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C. *História da Matemática*, Edgard Blucher, São Paulo, 1996.
- [2] CORREÂ, W. *Resolução do Problema da Braquistócrona Usando Maple*, UTFPR, Paraná, 2009.
- [3] LIMA, E.L. *Curso de Análise - Volumes 1 e 2*, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- [4] ELSGOLTZ, L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Mir, Moscou, 1969.
- [5] KIRK, D. *Optimal Control Theory and Introduction*, Dover Publications, New York, 2004.
- [6] LIMA, G. *Cálculo Variacional: Problemas Clássicos, Aspectos Teóricos e Desdobramentos*, Unicamp, Campinas, 2004.
- [7] LOURO, A. *Computação Simbólica em Maple no Cálculo de Variações*, Universidade de Aveiro, Portugal, 2006.

# Apêndice: Linha de comando do Maple

Definição do funcional  $T$  e cálculo do tempo gasto no percurso da partícula através de cada curva.

```
> T := y -> (1/sqrt(2*9.8)) * int(sqrt((1+diff(y,x)^2)/(-y)), x=0..pi);
```

$$T = y \rightarrow \frac{\int_0^\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} y\right)^2} dx}{\sqrt{2 \cdot 9.8}}$$

```
> TempoReta := T(-2*x/pi);
```

$$\text{TempoReta} = 0.2258769757 \sqrt{2} \sqrt{\pi^2 + 4}$$

```
> TempoRaizQuadrada := T(-sqrt(4*x/pi));
```

$$\text{TempoRaizQuadrada} = -\frac{0.05646924393 \sqrt{2} \left( -\frac{8}{3} \pi^{7/2} \text{hypergeom}\left(\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{4}\right], -\frac{1}{\pi^2}\right) - \frac{8}{3} \frac{\pi^{7/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \right)}{\pi^{5/2}}$$

```
> TempoRaizCúbica := T(-(8*x/pi)^(1/3));
```

$$\text{TempoRaizCúbica} = -\frac{1}{\pi} \left( 0.001045726740 \left( -\frac{648}{5} \pi^5 \sqrt{2} \text{hypergeom}\left(\left[-\frac{5}{24}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{24}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \right. \right.$$

$$\left. - \frac{18}{5} \frac{24^{1/4} \pi^{21/4} \sec\left(\frac{3}{8} \pi\right) \csc\left(\frac{3}{8} \pi\right) \sec\left(\frac{1}{24} \pi\right) \csc\left(\frac{1}{24} \pi\right) \Gamma\left(\frac{17}{24}\right) \Gamma\left(\frac{19}{24}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{23}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right)} + 48 \pi^3 \sqrt{2} \text{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{9}{8}, \frac{4}{3}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{16}{11} \sqrt{2} \pi \text{hypergeom}\left(\left[\frac{11}{24}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right], \left[\frac{4}{3}, \frac{35}{24}, \frac{5}{3}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \right)$$

```
> X := t-sin(t);
Y := -1+cos(t);
dYdt := diff(Y, t)/diff(X, t);
EQ := simplify(sqrt((1+dYdt^2)/(-Y))*diff(X, t));
```

$$X = t - \sin(t)$$

$$Y = -1 + \cos(t)$$

$$dYdt = -\frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}$$

$$EQ = -\text{csgn}\left(\frac{1}{-1 + \cos(t)}\right) \sqrt{2}$$

```
> TempoBraquistócrona := (1/sqrt(2*9.8))*int(EQ, t=0..pi);
```

$$\text{TempoBraquistócrona} = 0.2258769757 \pi \sqrt{2}$$

```

> evalf(TempoReta, 3);
evalf(TempoRaizQuadrada, 3);
evalf(TempoRaizCúbica, 3);
evalf(TempoBraquistócrona, 3);

```

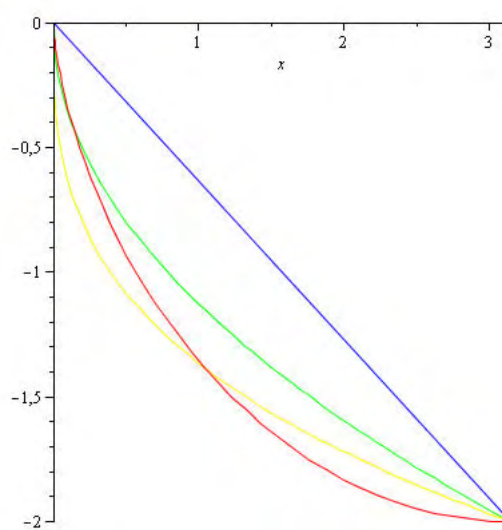
1.19  
1.01  
1.02  
1.00

Construção dos gráficos das curvas.

```

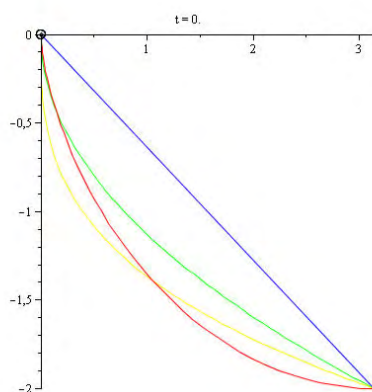
> gr1 := plot([-2 * x / pi, -sqrt(4 * x / pi), -(8 * x / pi)^(1/3)], x = 0 .. pi, color = [blue, green, yellow]) :
gr2 := plot([t - sin(t), -1 + cos(t), t = 0 .. pi], color = red) :
plots[display](gr1, gr2);

```



Utilizamos o comando **animate** para a construção da animação do trajeto da partícula, determinando o tempo gasto para completar o percurso através de cada curva no intervalo  $[0, \pi]$ .

```
> restart;with(plots):
> reta:=plot(-2*x/Pi, x=0..Pi, color=blue):
> t1:=animate(pointplot, [[t,eval(-2*x/Pi,x=t)],symbol=circle,symbolsize=20],t=0..Pi, frames=100, background=reta):
> raiz:=plot(-sqrt(4*x/Pi), x=0..Pi, color=green):
> t2:=animate(pointplot, [[t,eval(-sqrt(4*x/Pi),x=t)],symbol=circle,symbolsize=20],t=0..Pi, frames=100, background=raiz):
> cubica:=plot(-(8*x/Pi)^(1/3), x=0..Pi,color=yellow):
> t3:=animate(pointplot, [[t,eval(-(8*x/Pi)^(1/3),x=t)],symbol=circle,symbolsize=20],t=0..Pi, frames=100, background=
cubica):
> baquistocrona:=plot([t-sin(t),-1+cos(t), t= 0 .. Pi], color=red):
> t4:=animate(pointplot, [[eval(t-sin(t),t=t),eval(-1+cos(t),t=t)],symbol=circle,symbolsize=20],t=0..Pi, frames=100,
background=baquistocrona, color=red):
> t5:=pointplot([ [0,0], [Pi,-2]]):
> display(t1,t2,t3,t4,t5):
```



Cálculo do comprimento das trajetórias, utilizando a função comprimento de arco.

```
> with(Student[Calculus1]):
> comprimentoreta := ArcLength(-2*x/Pi, x=0..pi);
comprimentoRaizQuadrada := ArcLength(-sqrt(4*x/Pi), x=0..pi);
comprimentoRaizCubica := ArcLength(-(8*x/Pi)^(1/3), x=0..pi);
comprimentodaBraquistocrona := ArcLength([theta-sin(theta),-1+cos(theta)], theta=0..pi);
evalf(comprimentoRaizQuadrada, 3);
evalf(comprimentoRaizCubica, 3);
evalf(comprimentodaBraquistocrona, 3);
```

$$\text{comprimentoRaizQuadrada} = \frac{1}{2} \frac{2\pi^3 + 2\pi + \sqrt{1+\pi^2} \ln(1+2\pi^2 + 2\sqrt{1+\pi^2}\pi)}{\pi\sqrt{1+\pi^2}}$$

$$\text{comprimentoRaizCubica} = \frac{1}{270} \frac{1}{\pi^3 \Gamma(\frac{3}{4})^2} \left( \sqrt{2} \left( 135\pi^4 \sqrt{2} \text{hypergeom}\left(\left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right], -\frac{64}{729\pi^6}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 60\pi^4 \sqrt{3} \right. \right. \\ \left. \left. - 90\pi^2 \sqrt{2} \text{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{13}{12}, \frac{4}{3}\right], -\frac{64}{729\pi^6}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2\sqrt{2} \text{hypergeom}\left(\left[\frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right], \left[\frac{4}{3}, \frac{17}{12}, \frac{5}{3}\right], -\frac{64}{729\pi^6}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2 \right) \right)$$

$$\text{comprimentodaBraquistocrona} = 4$$

3.73  
3.88  
4.03  
4