História da Matemática

AULA 18

TURNING POINTS

PARTE I: ANÁLISE

Ventos de mudança

- Nesta e nas próximas duas aulas, vamos tentar identificar alguns pontos importantes na história da Matemática dos séculos XIX e XX que levaram a Matemática a adquirir a forma com que nós estamos familiarizados nos dias atuais.

Ventos de mudança

- Obviamente, esta análise está enviesada pelas minhas próprias escolhas e prioridades. Assim, não espere ter um panorama exaustivo de todo o desenvolvimento da Matemática contemporânea, mas sim espere ter highlights de momentos específicos que, ao meu ver, foram decisivos para que outros desenvolvimentos teóricos pudessem ter dado início.

Ventos de mudança

- Vamos dividir a nossa discussão em três grandes áreas, de acordo com a divisão das áreas dentro da Matemática pura:

Análise

Geometria

Álgebra

Um matemático egiptólogo

- Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21 de março de 1768 –Paris, 16 de maio de 1830).

Um matemático egiptólogo

- Jean-Baptiste Joseph Fourier

Um matemático egiptólogo

- Fourier era filho de um alfaiate e ficou órfão aos 9 anos, foi educado na Escola militar, junto à ordem dos Beneditinos, no Convento de Saint Maur.

Um matemático egiptólogo

- Fourier era filho de um alfaiate e ficou órfão aos 9 anos, foi educado na Escola militar, junto à ordem dos Beneditinos, no Convento de Saint Maur.
- Como Matemático, começou aos 16 anos sua carreira como instrutor de Matemática na escola militar.

Um matemático egiptólogo

- Fourier era filho de um alfaiate e ficou órfão aos 9 anos, foi educado na Escola militar, junto à ordem dos Beneditinos, no Convento de Saint Maur.
- Como Matemático, começou aos 16 anos sua carreira como instrutor de Matemática na escola militar.
- Como ele não era “bem nascido”, foi vetado de ingressar no corpo de engenheiros da artilharia. Restando-lhe ingressar como professor na Abadia de Saint-Benoît-Sur-Loire, onde ensinava matemática para os noviços.

Um matemático egiptólogo

- Durante a Revolução Francesa, teve papel importante junto à comunidade de Auxerre, durante o período conhecido como “La terreur” inclusive teve papel decisivo em salvar vidas de alguns perseguidos políticos pelo regime, o que resultou em sua própria prisão em 4 de julho de 1794. Fourier foi solto com a queda de Robespierre, que foi guilhotinado em 28 de julho de 1794.

Um matemático egiptólogo

- Em 1795 foi nomeado como professor para a École Normale de l’an III, escola que durou só quatro anos e contava com um corpo docente como: Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Gaspard Monge (1746-1818) e Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

Um matemático egiptólogo

- Em 1795 foi nomeado como professor para a École Normale de l'an III, escola que durou só quatro anos e contava com um corpo docente como: Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Gaspard Monge (1746-1818) e Pierre-Simon Laplace (1749-1827).
- Em primeiro de Setembro de 1795, é criada por lei a École Polytechnique. Em 1797, Fourier sucede a Lagrange na direção do curso de Análise e Mecânica da École Polytechnique.

Um matemático egiptólogo

- Em 1798, Fourier fez parte da Campanha de Napoleão no Egito, onde ficou responsável pelo Institut d’Égipt, que hoje é conhecido como Instituto do Cairo.

Um matemático egiptólogo

- Após o retorno do Egito, Napoleão o nomeou como governador do Departamento de Isère, em Grenoble.

Um matemático egiptólogo

- Após o retorno do Egito, Napoleão o nomeou como governador do Departamento de Isère, em Grenoble.
- Foi durante seu período em Grenoble que Fourier publica o seu artigo:

Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides

Um matemático egiptólogo

- Após o retorno do Egito, Napoleão o nomeou como governador do Departamento de Isère, em Grenoble.
- Foi durante seu período em Grenoble que Fourier publica o seu artigo:

Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides

- Em 1810, ele funda a Faculté Impériale de Grenoble. Lá ele motiva o jovem Jean-François Champollion (1790-1832) a decifrar os hieroglifos egípcios.

Um matemático egiptólogo

- Em 1822, ano em que também assume a presidência da Academia de Ciências de Paris, publica sua obra mais importante:

Théorie analytique de la chaleur

- Onde não só discute a dedução e a resolução da equação do calor como propõe o método inovador de soluções por meio de séries trigonométricas (hoje conhecidas como Séries de Fourier.

O calor das ideias

- A equação do calor pode ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Em que $u = u(t, x, y, z)$ é a temperatura em um determinado ponto de um material em um determinado instante.

O calor das ideias

- Vamos analisar a solução do problema unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Com $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$.

Com a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$

e a condição de contorno $u(0, t) = 0 = u(L, t)$

(Ver resolução no quadro)

O calor das ideias

- Vamos analisar a solução do problema unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Com $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$.

Com a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$

e a condição de contorno $u(0, t) = 0 = u(L, t)$

(Ver resolução no quadro)

O calor das ideias

- Série de Fourier de uma função

$$f:]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$$

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)$$

Com

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad e \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

O calor das ideias

- Uma coisa esquisita: todos sabiam que funções que eram expandidas em série de Taylor eram infinitamente diferenciáveis, por exemplo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

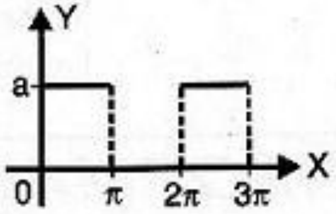
O calor das ideias

- Uma coisa esquisita: todos sabiam que funções que eram expandidas em série de Taylor eram infinitamente diferenciáveis, por exemplo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

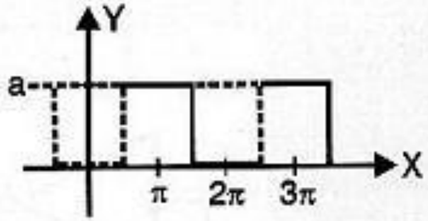
Mas as séries trigonométricas poderiam descrever funções periódicas até mesmo descontínuas!

O calor das ideias



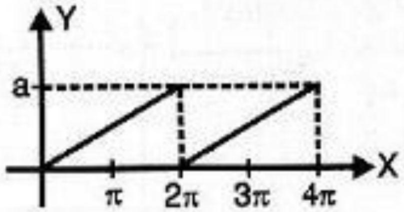
$$Y = a \text{ para } 0 < X < \pi$$
$$Y = -a \text{ para } \pi < X < 2\pi$$

$$\boxed{Y = \frac{4a}{\pi} \operatorname{sen} X + \frac{\operatorname{sen}(3X)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5X)}{5} + \ldots}$$



$$Y = a \text{ para } a < X < 2\pi - a$$
$$Y = f(2\pi + X)$$

$$\boxed{Y = \frac{2a}{\pi}\left[\frac{\pi - a}{2} + \frac{\operatorname{sen}(\pi - a)}{1}\cos X + \frac{\operatorname{sen} 2(\pi - a)}{2} \cdot \cos 2X + \frac{\operatorname{sen} 3(\pi - a)}{3} \cdot \cos 3X + \ldots\right]}$$



$$Y = \frac{aX}{2\pi} \text{ para } 0 < X < 2\pi$$
$$Y = f(2\pi + X)$$

$$\boxed{Y = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} X}{1} + \frac{\operatorname{sen}(2X)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3X)}{3} + \ldots\right]}$$

O calor das ideias

- A convergência das Séries de Fourier somente foi demonstrada rigorosamente por Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

O calor das ideias

- Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

O calor das ideias

- Dirichlet publicou em (1829) o artigo

Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données

no Crelle.

O calor das ideias

- Dirichlet publicou em (1829) o artigo

Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données

no Crelle.

- Dirichlet também demonstrou critérios de convergência de séries, mostrou que existem funções que não são integráveis, contribuiu para o estudo das condições de contorno para equações diferenciais parciais, entre outros avanços na análise.

O calor das ideias

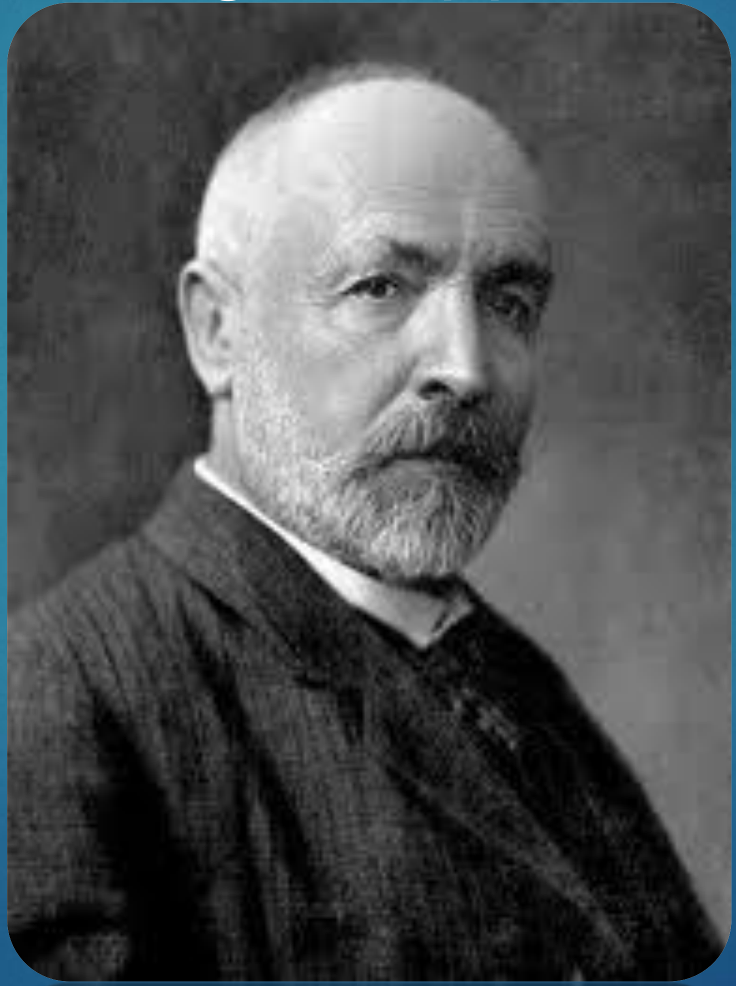
- Ainda sobre Séries de Fourier, um dos problemas que movimentaram a comunidade matemática no século XIX foi a questão da unicidade da expansão em séries de Fourier. É claro que se duas funções são expandidas em Séries de Fourier que têm os mesmos coeficientes, elas coincidem. A questão era saber se quando duas funções coincidiam (ou diferiam em um número finito de pontos) se as suas séries de Fourier coincidiam.

O calor das ideias

- Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)

O calor das ideias

- Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor



O calor das ideias

- Georg Cantor foi quem provou o Teorema de unicidade para Séries de Fourier:

Teorema Seja S_0 *o conjunto dos pontos em que uma função* $f: [0,2\pi]$ *é diferente de zero. Considere os seus conjuntos derivados:* $S_1, S_2, S_3, \cdots$ *se existir* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* S_k *é um conjunto finito, então todos os seus coeficientes de Fourier são iguais a zero.*

O calor das ideias

- Georg Cantor foi quem provou o Teorema de unicidade para Séries de Fourier:

Teorema Seja S_0 *o conjunto dos pontos em que uma função* $f:[0,2\pi]$ *é diferente de zero. Considere os seus conjuntos derivados:* $S_1, S_2, S_3, \cdots$ *se existir* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* S_k *é um conjunto finito, então todos os seus coeficientes de Fourier são iguais a zero.*

- A sequência dos conjuntos derivados de um subconjunto deu origem à ideia dos ordinais transfinitos.

Épsilons e deltas

- Desde sua origem, o Cálculo infiniresimal carecia de fundamentos mais precisos. Mesmo com esta falta de fundamentação lógica, o Século XVIII assistiu a um avanço estupendo das técnicas e aplicações do Cálculo para as ciências naturais e para a engenharia. Somente no Século XIX que um esforço mais concentrado em explicar por que o Cálculo funciona foi efetivamente realizado.

Épsilons e deltas

- Augustin-Louis Cauchy (1759-1857)

Épsilons e deltas

- Cauchy, em 1821 lançou o seu Cours d'Analyse, que era resultado das notas de aula que ele dava na École Polytechnique. Este foi o primeiro livro de análise matemática, onde o uso dos temíveis épsilons e deltas foi implementado. A definição de função contínua no Cours d'Analyse era:

A função f(x) é contínua em relação a x entre os limites dados se, entre esses limites, um incremento infinitesimal na variável sempre produzir um incremento infinitesimal na própria função.

Épsilons e deltas

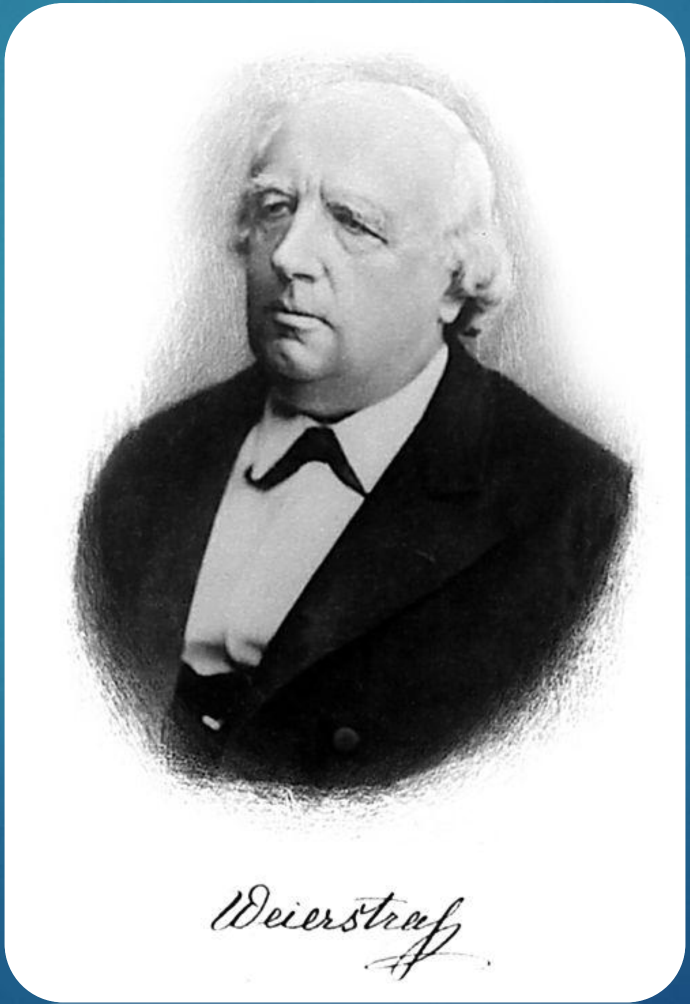
- Cauchy também deu grande impulso ao cálculo de funções de uma variável complexa, seus trabalhos nesta área se estenderam de 1826, quando ele dá a definição do resíduo de uma função, até 1831, quando demonstra o Teorema da integral de Cauchy e o teorema do Resíduo.

Épsilons e deltas

- Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Épsilons e deltas

- Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)



Épsilons e deltas

- Karl Weierstrass é reconhecido como o Matemático que mostrou, de forma definitiva, a razoabilidade do Cálculo. Por exemplo, a definição de função contínua de Weierstrass, é a que usamos até hoje:

Uma função f é contínua em um ponto $x = a$ se para qualquer $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tais que sempre que $|x - a| < \delta$, tivermos que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Épsilons e deltas

- São de Weierstrass também diversos resultados em análise que hoje usamos quotidianamente:

Épsilons e deltas

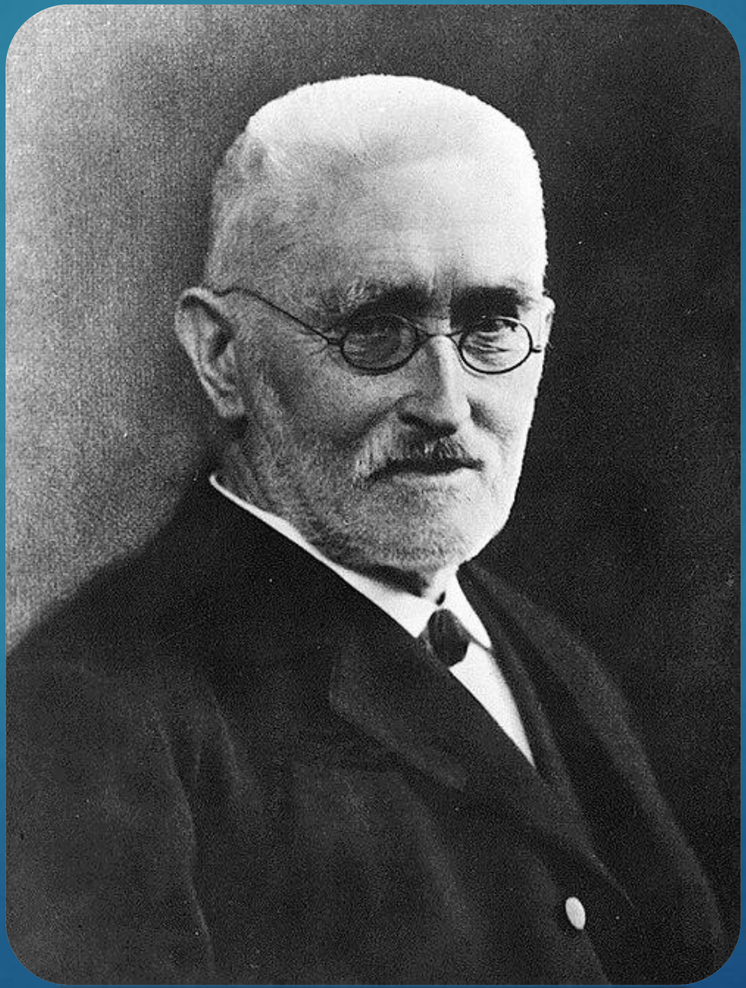
- São de Weierstrass também diversos resultados em análise que hoje usamos quotidianamente:
- *Teorema de Bolzano Weierstrass, que diz que toda sequência limitada admite uma subsequência convergente;*
- *Teorema do Valor intermediário, para funções contínuas definidas em um intervalo;*
- *Teste M de Weierstrass para convergência de séries de potências.*

Épsilons e deltas

- O programa levado a cabo por Weierstrass é conhecido como aritmetização da análise. Todos essses resultados só foram possíveis graças à estrutura do corpo ordenado completo dos números reais. Essa estrutura foi evidenciada por

Épsilons e deltas

- Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)



Épsilons e deltas

- Richard Dedekind, em seu panfleto Stetigkeit und irrationale Zahlen (Continuidade e números irracionais) formulou pela primeira vez a noção de que um número real era definido como um par de subconjuntos dos números racionais satisfazendo certas propriedades. Esses subconjuntos hoje são chamados de cortes de Dedekind.

A volta dos infinitesimais

- Devemos mencionar aqui que, com a ritmetização da análise, a noção de infinitesimal, como era concebida por Leibniz, ou mesmo por Newton em seus fluxões, foi completamente abandonada. Mas isto não impediu que outros matemáticos tentassem outras metodologias para tornar os infinitesimais rigorosamente precisos.

A volta dos infinitesimais

- Abraham Robinson (1918-1974)

A volta dos infinitesimais

- Abraham Robinson (1918-1974)

A volta dos infinitesimais

- Abraham Robinson, no ano de 1966, publicou o livro Non-Standard Analysis, em que utiliza técnicas da Teoria de Modelos, para criar um corpo ordenado (não arquimediano, portanto não completo) que contivesse números infinitos e infinitesimais. Esta reta hoje é conhecida como Reta Hiper-real.

A volta dos infinitesimais

- Abraham Robinson, no ano de 1966, publicou o livro Non-Standard Analysis, em que utiliza técnicas da Teoria de Modelos, para criar um corpo ordenado (não arquimediano, portanto não completo) que contivesse números infinitos e infinitesimais. Esta reta hoje é conhecida como Reta Hiper-real.
- Posteriormente, outras construções de reta hiper-real foram propostas por outros matemáticos, utilizando métodos mais elementares, como ultraprodutos e ultrafiltros.

Menções honrosas

- Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

Menções honrosas

- Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

Menções honrosas

- Henri Lebesgue generalizou o conceito de integral, introduzindo a noção de medida (medida de Lebesgue), que é invariante por translações. Um Teorema importante de Lebesgue no cálculo integral é o Teorema da Convergência Dominada.

Menções honrosas

- Stefan Banach (1892-1945)

Menções honrosas

- Stefan Banach (1892-1945)

Menções honrosas

- Stefan Banach é considerado o pai da análise funcional, que trata do estudo de espaços vetoriais de dimensão infinita (em geral, espaços de funções) com uma topologia dada pela norma dos vetores. Os espaços vetoriais normados e completos hoje são conhecidos como Espaços de Banach.

Menções honrosas

- Alguns resultados de Banach são:
- Teorema do ponto fixo de Banach, que trata de contrações em espaços completos;
- Teorema de Hahn-Banach, que trata da extensão de funcionais lineares contínuos definidos em subespaços fechados;
- Teorema de Banach-Alaoglu, que diz que uma bola fechada limitada em um espaço dual a um espaço de Banach é um compacto;

Menções honrosas

- John Von Neumann (1903-1957)

Menções honrosas

- John Von Neumann (1903-1957)

Menções honrosas

- Von Neumann foi um dos últimos matemáticos universalistas da história. Ele é considerado um dos pais da computação. Ele participou como metemático no Projeto Manhattan, que levou os EUA a construir a primeira bomba atômica. Mas sua contribuição que vamos citar aqui é sua contribuição à análise de operadores em espaços de Hilbert que vieram da tentativa de entender os funtamentos da Mecânica Quântica.

Menções honrosas

- Von Neumann publicou em 1932 o Livro Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik), que inaugurou o estudo de álgebras de operadores em Espaços de Hilbert, que hoje constituem as Álgebras de Von Neumann e as Álgebras C*.