

# História da Matemática

AULA 19

TURNING POINTS

PARTE II: GEOMETRIA

# As paralelas...

- ▶ Desde a antiguidade, o Postulado 5 de Euclides trouxe uma sensação de desconforto, pois sua própria elaboração destoava da simplicidade e relativa obviedade dos quatro primeiros.

# As paralelas...

- ▶ Desde a antiguidade, o Postulado 5 de Euclides trouxe uma sensação de desconforto, pois sua própria elaboração destoava da simplicidade e relativa obviedade dos quatro primeiros.
- ▶ Muitas tentativas, fracassadas, de provar o quinto postulado foram tentadas por Ptolomeu (100-170), Proclus (410-485), Ibn-Al-Haytham (965-1040), Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777).

# As paralelas...

- ▶ Merecem destaque as tentativas de Sachieri e de Lambert. Ambos tentaram reformular a questão introduzindo quadriláteros que, por sua construção, acreditava-se que forçaria a veracidade do quinto poestulado.

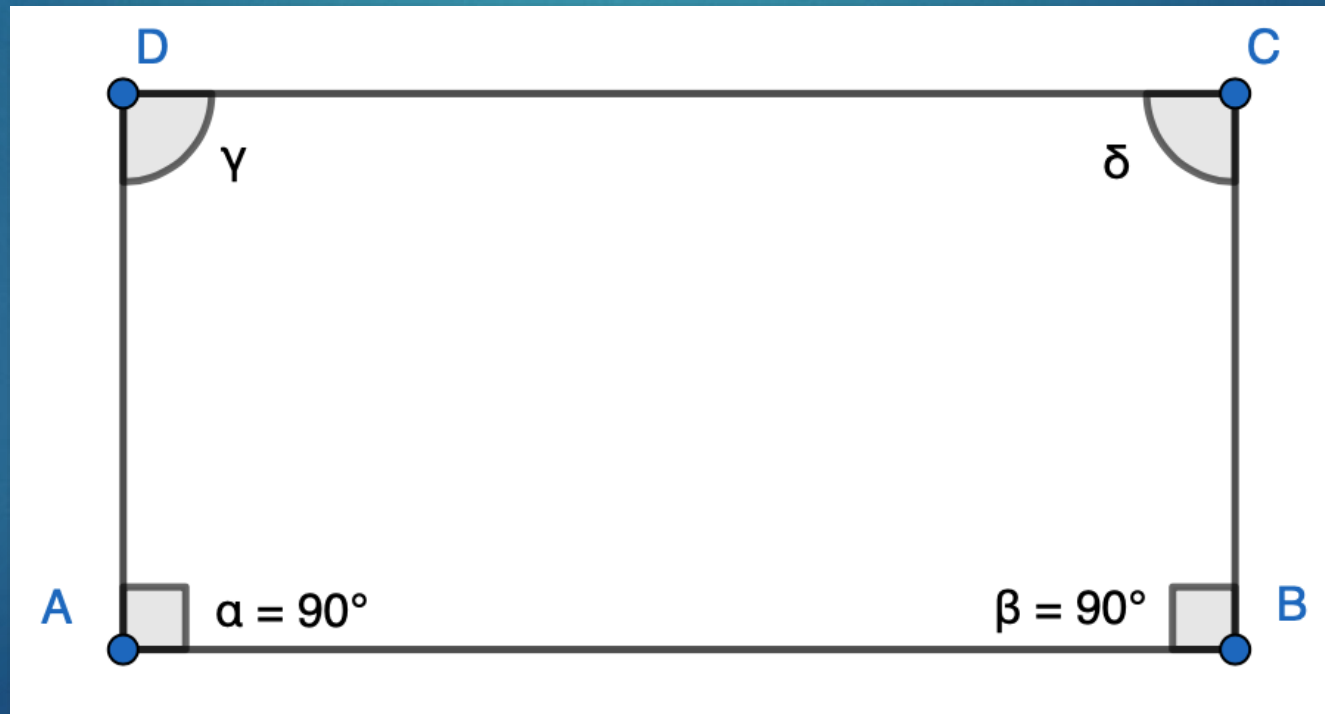
# As paralelas...

**EUCLIDES**  
**AB OMNI NÆVO VINDICATUS:**  
SIVE  
**CONATUS GEOMETRICUS**  
QUO STABILIENTUR  
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.  
AUCTORE  
**HIERONYMO SACCHERIO**  
SOCIETATIS JESU  
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.  
**OPUSCULUM**  
**EX<sup>MO</sup> SENATUI**  
**MEDIOLANENSI**  
Ab Auctore Dicitum.  
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.  
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissi.

Capa da obra:  
Euclides ab omni  
naevo vindicatus  
(Euclides livre de  
qualquer falha)  
de Girolamo Sachieri  
(1733)

# As paralelas...

- ▶ Nesta obra, Sachieri propôs um quadrilátero com dois Ângulos retos e com o lado oposto a esses ângulos retos, equidistante do lado a eles adjacentes.

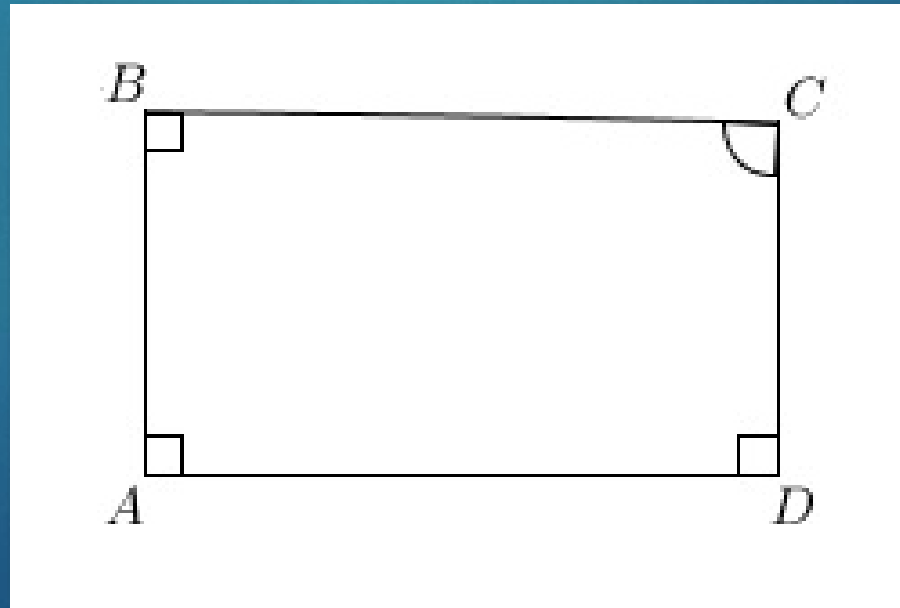


# As paralelas...

- ▶ Nesta obra, Sachieri propôs um quadrilátero com dois Ângulos retos e com o lado oposto a esses ângulos retos, equidistante do lado a eles adjacentes.
- ▶ Era possível provar que os ângulos  $\gamma$  e  $\delta$  não poderiam ser obtusos, mas não conseguia-se provar que eles não poderiam ser agudos.

# As paralelas...

- ▶ Lambert, por sua vez, tinha uma vasta obra em cartografia e conhecia diversos tipos de projeções. Para provar o postulado 5 de Euclides, ele também lançou mão de um quadrilátero com três ângulos retos.



# As paralelas...

- ▶ Lambert, por sua vez, tinha uma vasta obra em cartografia e conhecia diversos tipos de projeções. Para provar o postulado 5 de Euclides, ele também lançou mão de um quadrilátero com três ângulos retos. Ao tentar provar que o quarto ângulo também teria que ser reto, provaria-se que, necessariamente, o quinto postulado seria verdadeiro. Mas efetivamente, o quarto ângulo poderia ser reto ou agudo, sem que isso implicasse em uma contradição lógica.

# As paralelas...

- ▶ Entra em cena um dos nossos personagens principais nesta história: János Bolyai (Cluj-Napoca, 15 de dezembro de 1802 -Târgu Mureș, 27 de janeiro de 1860)

# As paralelas...

► János Bolyai (1802-1860)



# As paralelas...

- ▶ Bolyai escreveu Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei, a priori haud unquam (Apêndice mostrando a ciência absolutamente verdadeira do espaço; de a priori nunca (se afirmar) a verdade ou falsidade do axioma XI de Euclides)

# As paralelas...

- ▶ Esse apêndice foi publicado no livro do seu pai, Farkas Bolyai (1775-1856): *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiisque huic propria, introducendi* (Uma tentativa de apresentar aos jovens estudiosos os elementos da matemática pura, elementar e sublime, por meio de um método intuitivo e das evidências que lhe são próprias) de 1832.

# As paralelas...

- ▶ Farkas Bolyai era amigo de Gauss. Gauss escreveu a respeito do jovem János Bolyai: “Eu considero este jovem Geômetra, Bolyai como um gênio de primeira ordem” Para seu velho amigo, Farkas, ele escreveu: “Elogiá-lo (ao seu filho) seria, em certa medida, elogiar a mim mesmo. Pois a totalidade do conteúdo de seu trabalho coincide exatamente com minhas próprias meditações que têm ocupado minha mente pelos últimos trinta, ou trinta e cinco anos”.

# As paralelas...

- ▶ Nikolai Ivanovich Lobachevsky (Níjni Novgorod, 20 de novembro jul./ 1 de dezembro de 1792 greg. — Cazã, 12 de fevereiro jul./ 24 de fevereiro de 1856 greg.)

# As paralelas...

- ▶ Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)



# As paralelas...

- ▶ Lobachevsky foi considerado pelo matemático inglês William Kingdom Clifford (1845-1879) como o “Copérnico da Geometria”, devido à sua contribuição revolucionária.

# As paralelas...

- ▶ Lobachevsky foi considerado pelo matemático inglês William Kingdom Clifford (1845-1879) como o “Copérnico da Geometria”, devido à sua contribuição revolucionária.
- ▶ Ele publicou suas ideias primeiramente como notas de aula de um curso ministrado na Universidade de Kazan, intitulado “Sobre a origem da Geometria” (1829-1830). Publicado nas Notas de Cursos da Universidade de Kazan (em russo)

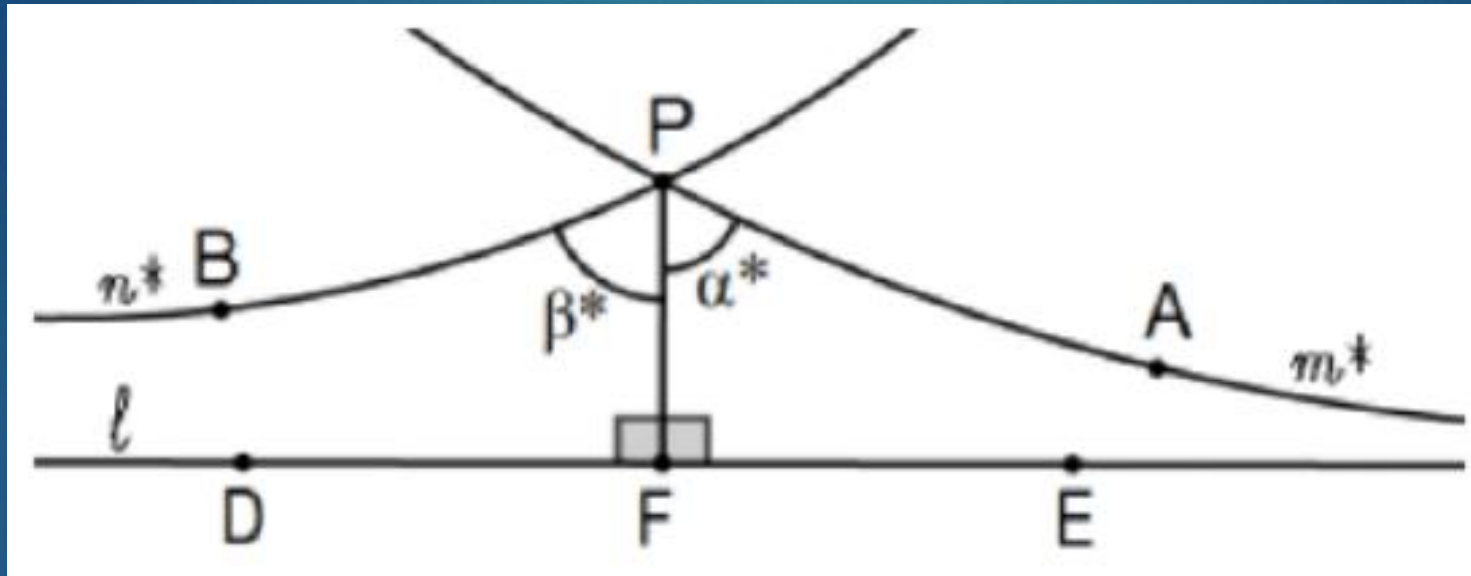
# As paralelas...

- ▶ Lobachevsky também publicou em 1829 o artigo “Um conciso esboço dos fundamentos da Geometria”, no Mensageiro de Kazan (em russo). Mas o mesmo artigo foi rejeitado quando Lobatchevsky tentou publicá-lo na Academia de Ciências de São Petesburgo.

# As paralelas...

- ▶ Lobachevsky também publicou em 1829 o artigo “Um conciso esboço dos fundamentos da Geometria”, no Mensageiro de Kazan (em russo). Mas o mesmo artigo foi rejeitado quando Lobachevsky tentou publicá-lo na Academia de Ciências de São Petesburgo.
- ▶ A Geometria de Lobachevsky é conhecida hoje em dia como Geometria hiperbólica.

# As paralelas...



Axioma das paralelas  
na Geometria Hiperbólica

# As paralelas...

- ▶ A Geometria Hiperbólica possui resultados surpreendentes e ao mesmo tempo estranhos, como por exemplo:

*Dois triângulos são congruentes se, e somente se forem semelhantes!*

# As paralelas...

- ▶ A estranheza em relação à geometria hiperbólica residia principalmente na falta, a princípio, de um modelo convincente de uma geometria em que valesse o axioma hiperbólico das paralelas. Na geometria plana, isso era flagrantemente anti intuitivo, e até antinatural!

# As paralelas...

- ▶ O primeiro modelo matemático para a geometria hiperbólica foi dado pelo matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900), com a pseudoesfera que é a superfície de revolução de uma tractriz.

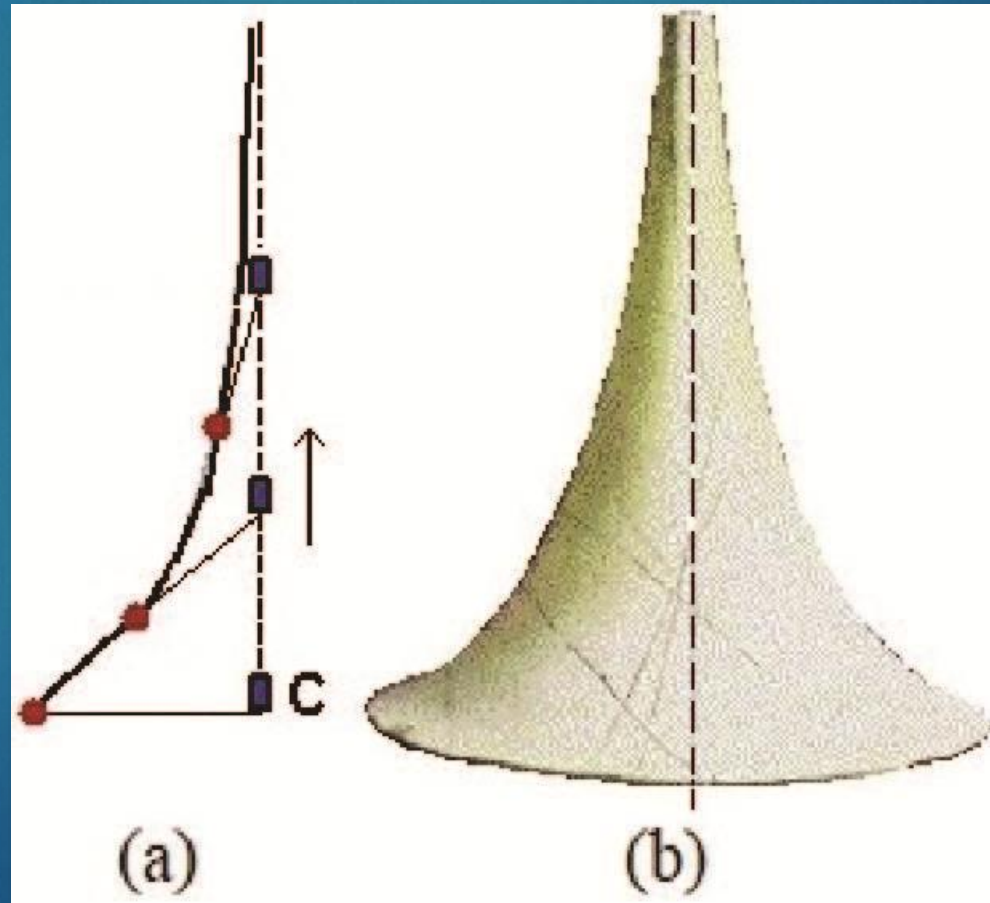
# As paralelas...

- ▶ Eugenio Beltrami (1835-1900)



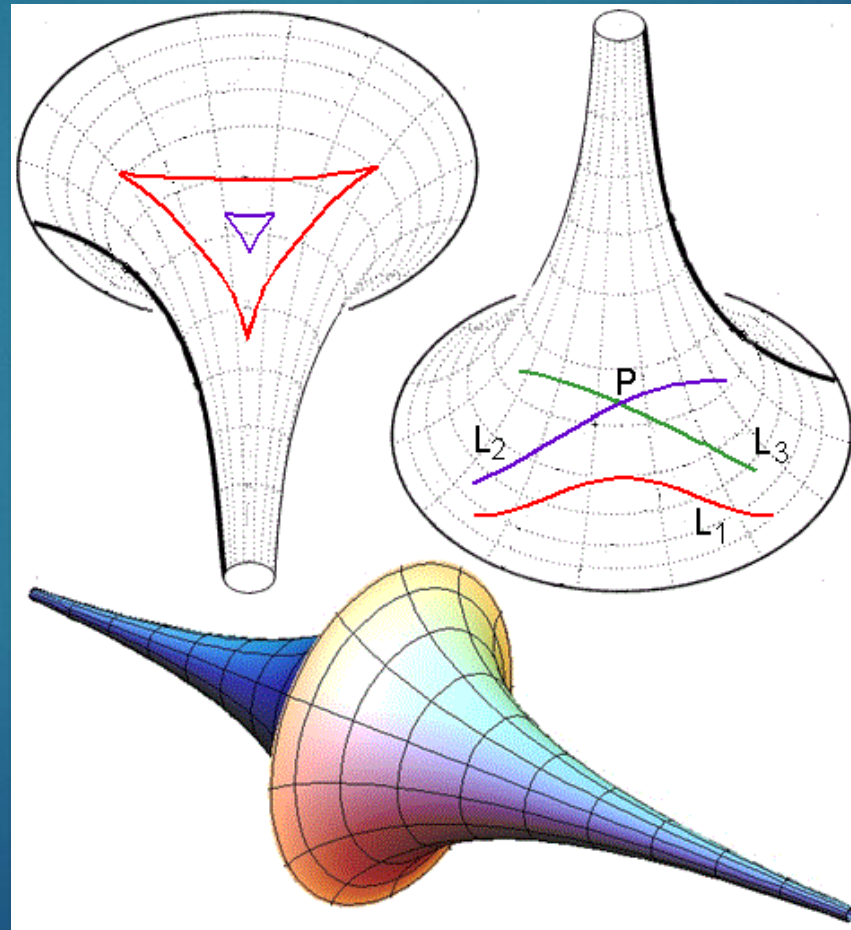
# As paralelas...

- ▶ Pseudoesfera: superfície de revolução de uma tractriz.



# As paralelas...

- ▶ Pseudoesfera como um modelo de Geometria Hiperbólica



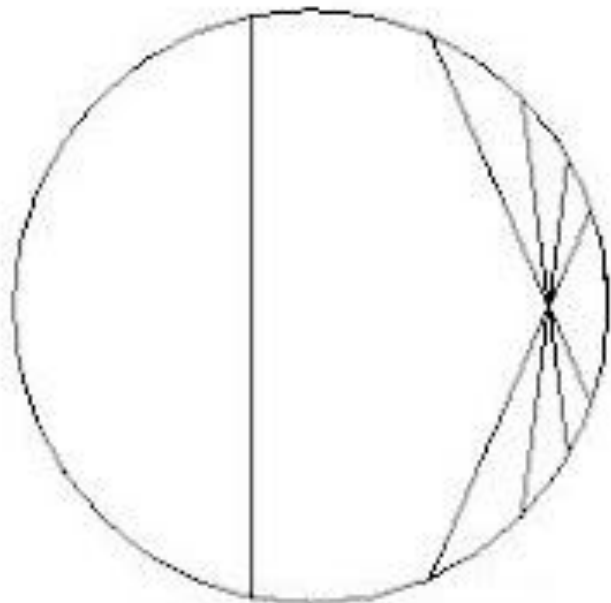
# As paralelas...

- ▶ Posteriormente, outros modelos de Geometria Hiperbólica surgiram, como:

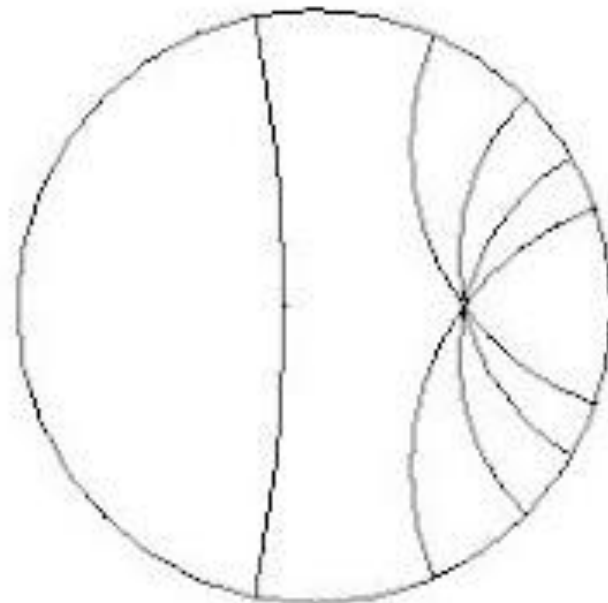
# As paralelas...

- ▶ Posteriormente, outros modelos de Geometria Hiperbólica surgiram, como:
- ▶ Disco de Klein-Beltrami.
- ▶ Disco de Poincaré.
- ▶ Semiplano de Poincaré.

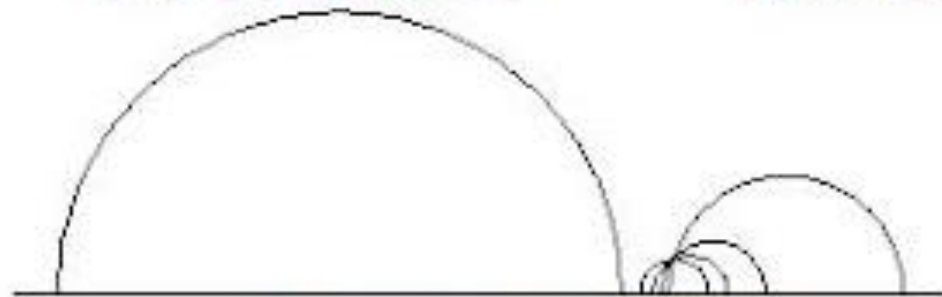
# As paralelas...



Modelo de Klein



Disco de Poincaré



Plano-medio superior

# Uma nova Geometria

- ▶ Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, Reino de Hanôver, 17 de setembro de 1826- Selasca, Verbania, 20 de julho de 1866)

# Uma nova Geometria

► Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)



# Uma nova Geometria

- ▶ Bernhard Riemann obteve sua formação na Universidade de Göttingen. Sua tese de doutorado em 1851 foi sobre a teoria de funções de uma variável complexa, sob orientação de Gauss.

# Uma nova Geometria

- ▶ Bernhard Riemann obteve sua formação na Universidade de Göttingen. Sua tese de doutorado em 1851 foi sobre a teoria de funções de uma variável complexa, sob orientação de Gauss.
- ▶ Em 1853, Gauss pediu para Riemann preparar seu Habilitationsschrift, que é o grau necessário para que alguém possa ser docente na Alemanha.

# Uma nova Geometria

- ▶ Em 10 de junho de 1854, Riemann proferiu sua palestra: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Sobre as hipóteses que servem de fundamento à Geometria). A publicação dessa tese somente foi feita em 1868, por Dedekind.

# Uma nova Geometria

- ▶ Em 10 de junho de 1854, Riemann proferiu sua palestra: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Sobre as hipóteses que servem de fundamento à Geometria). A publicação dessa tese somente foi feita em 1868, por Dedekind.
- ▶ Este trabalho foi seminal para as ideias do que, posteriormente, seria conhecido como Geometria Riemanniana.

# Uma nova Geometria

- ▶ Mesmo sem a linguagem matemática estabelecida, Riemann conseguiu lançar as bases da noção de variedades de dimensão superior, de métrica Riemanniana, de derivada covariante (conexão), de Tensor de Curvatura, entre outras ideias, que ainda demorariam décadas até serem formuladas com precisão.

# Uma nova Geometria

- ▶ A Geometria Riemanniana foi desenvolvida posteriormente. Podemos destacar três grandes nomes relacionados a esse desenvolvimento:

# Uma nova Geometria

- ▶ A Geometria Riemanniana foi desenvolvida posteriormente. Podemos destacar três grandes nomes relacionados a esse desenvolvimento:
- ▶ Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), com os símbolos de Christoffel, que ajudam a escrever a derivada covariante em coordenadas.

# Uma nova Geometria

- ▶ Elwin Bruno Christoffel (1829-1900)

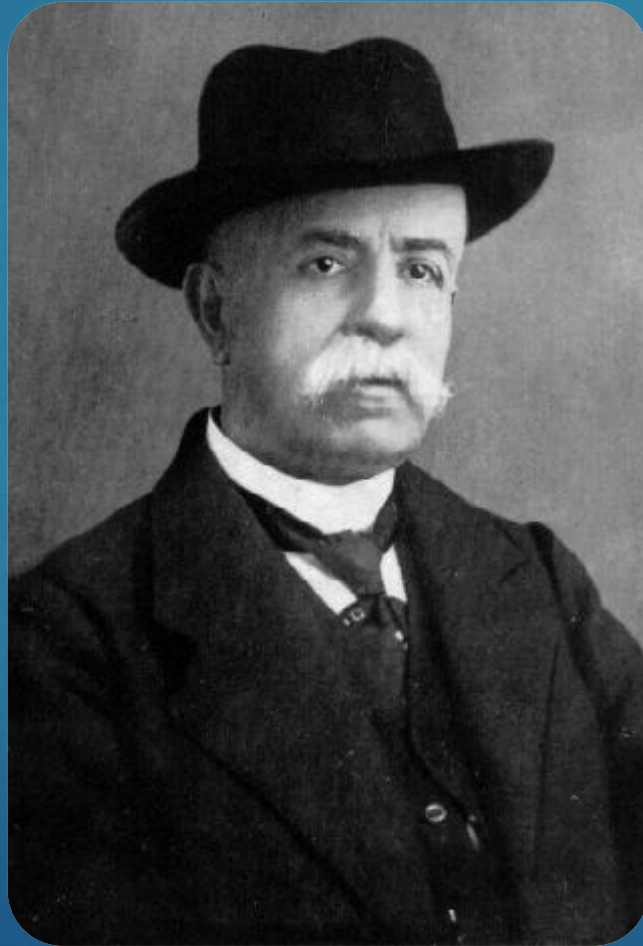


# Uma nova Geometria

- ▶ A Geometria Riemanniana foi desenvolvida posteriormente. Podemos destacar três grandes nomes relacionados a esse desenvolvimento:
- ▶ Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925). Desenvolveu o Cálculo diferencial absoluto e desenvolveu a noção de curvatura como um tensor.

# Uma nova Geometria

- ▶ Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925).

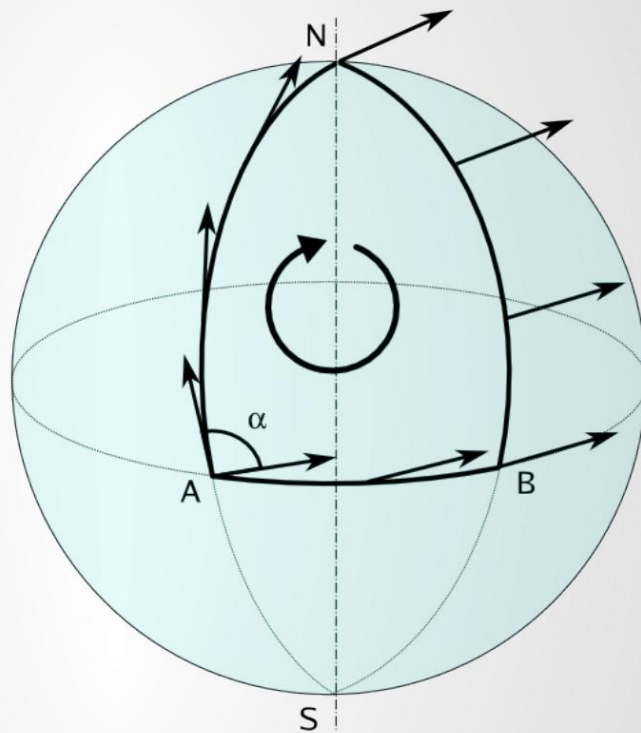


# Uma nova Geometria

- ▶ A Geometria Riemanniana foi desenvolvida posteriormente. Podemos destacar três grandes nomes relacionados a esse desenvolvimento:
- ▶ Tullio Levi-Civita (1873-1941). Junto a Ricci, desenvolveu o Cálculo diferencial absoluto. Desenvolveu a noção de transporte paralelo, como ferramenta para simplificar o cálculo da curvatura. A notação tensorial, como objetos multi-índices foi utilizada posteriormente na Formulação da Teoria da Relatividade Geral.

# Uma nova Geometria

## ► Transporte paralelo



# Uma nova Geometria

- ▶ Tullio Levi-Civita (1873-1941).



# Uma nova Geometria

- ▶ Ricci e Levi-Civita publicaram em 1900 o artigo:

*Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*

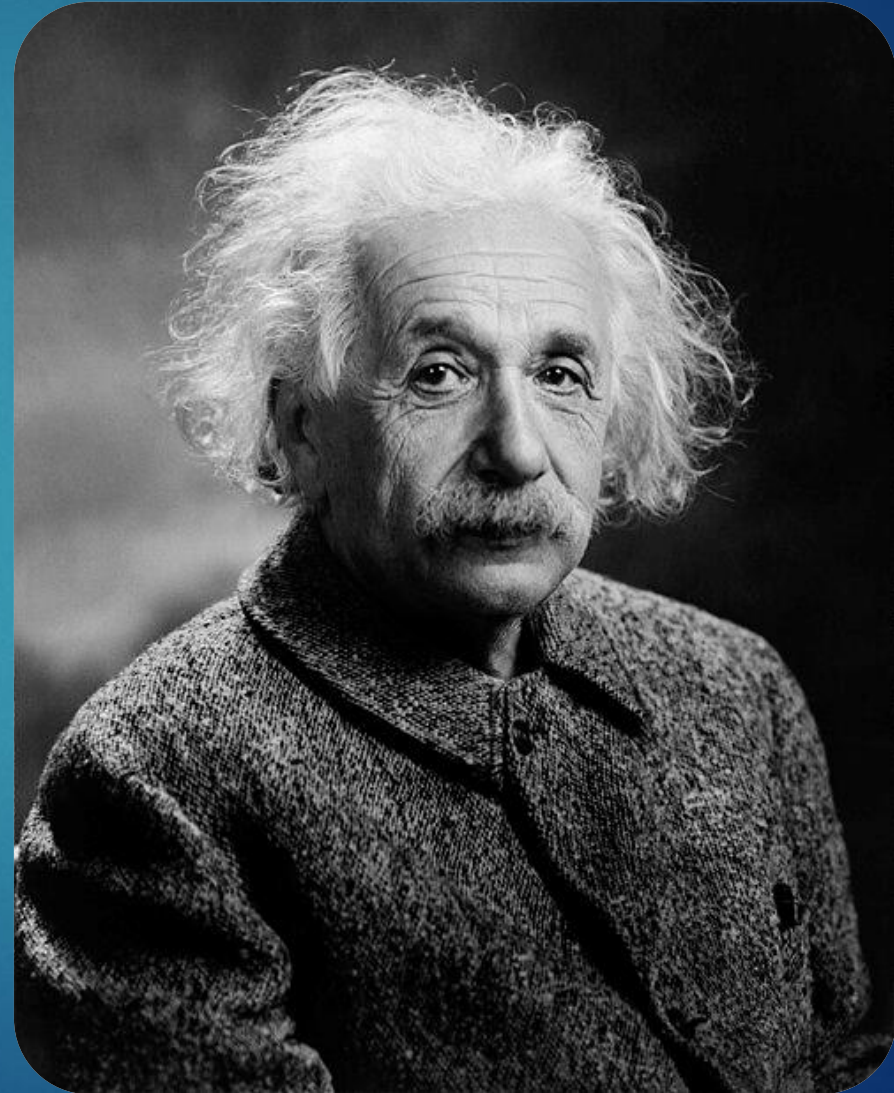
Este artigo teve grande influência sobre o modo como Einstein formulou a Teoria da Relatividade Geral em 1915.

# Uma nova Geometria

- ▶ Albert Einstein (Ulm, 14 de março de 1879 – Princeton, 18 de abril de 1955)

# Uma nova Geometria

▶ Albert Einstein (1879-1955)



# Menções honrosas

- ▶ Marius Sophus Lie (Nordfjordeid, 17 de dezembro de 1842 — Oslo, 18 de fevereiro de 1899)

# Menções honrosas

- ▶ Marius Sophus Lie (1842-1899)



# Menções honrosas

- ▶ Sophus Lie tinha como objetivo desenvolver uma espécie de “teoria de Galois” para equações diferenciais. Uma simetria de uma equação diferencial é um difeomorfismo do espaço (variedade) ambiente que deixa invariante o conjunto de soluções da equação diferencial (as curvas integrais).

# Menções honrosas

- ▶ Ao desenvolver essa teoria, Lie descobriu que, grande parte das propriedades das simetrias podiam ser descritas pelos geradores infinitesimais das simetrias, que é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie das simetrias. Essa associação entre grupos de Lie e álgebras de Lie é que torna essa teoria tão rica e poderosa, com consequências em Geometria, Equações Diferenciais e Teoria de Representações.

# Menções honrosas

- ▶ Felix Christian Klein (Düsseldorf, 25 de abril de 1849 – Göttingen, 22 de junho de 1925)

# Menções honrosas

- ▶ Felix Christian Klein (1849-1925)

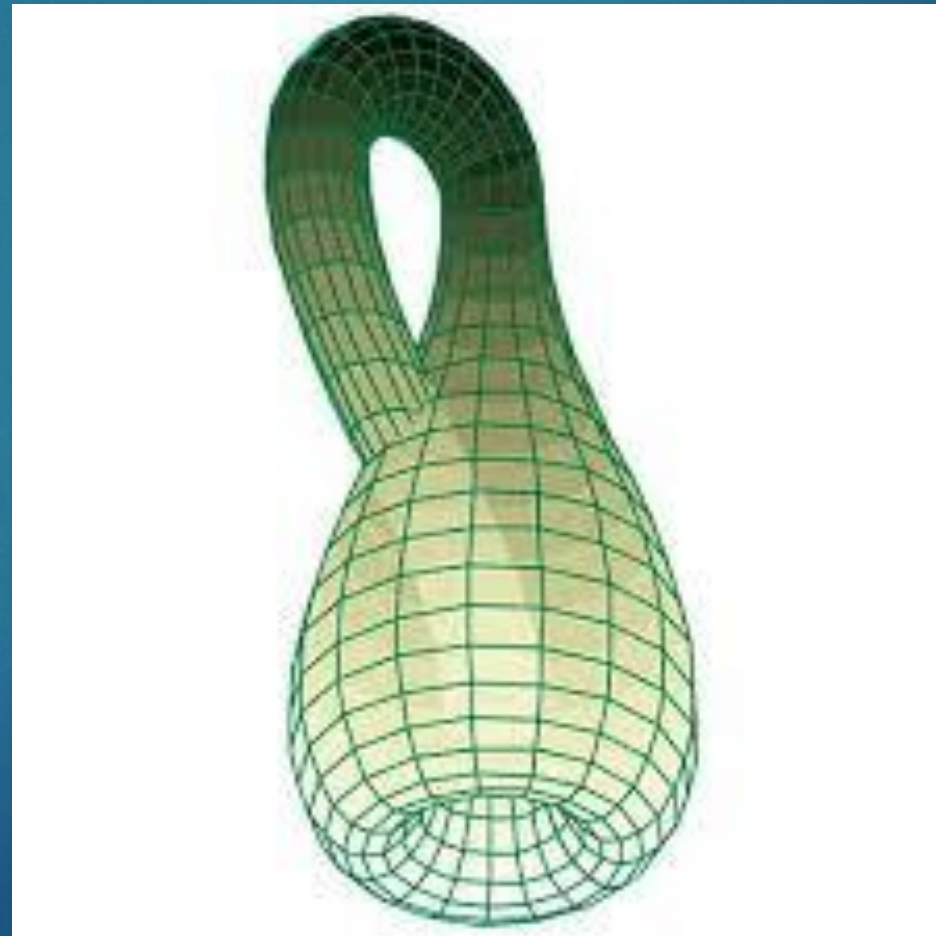


# Menções honrosas

- ▶ Felix Klein talvez seja mais lembrado pela “garrafa de Klein”

# Menções honrosas

- ▶ Felix Klein talvez seja mais lembrado pela “garrafa de Klein”



# Menções honrosas

- ▶ Felix Klein talvez seja mais lembrado pela “garrafa de Klein”, mas suas contribuições se espelham pela Teoria de grupos, Topologia, Geometria Diferencial e até pela Física Matemática (escreveu um tratado sobre o giroscópio, com o físico Arnold Sommerfeld (1868-1951)).

# Menções honrosas

- ▶ Mas vamos citar aqui sua contribuição teórica mais importante para os fundamentos da Geometria, que foi o Programa de Erlangen (Universidade onde Klein trabalhou, antes de ir para Göttingen).

# Menções honrosas

- ▶ Mas vamos citar aqui sua contribuição teórica mais importante para os fundamentos da Geometria, que foi o Programa de Erlangen (Universidade onde Klein trabalhou, antes de ir para Göttingen).
- ▶ O Programa de Erlangen é uma tentativa de colocar todas as formas de Geometria sob o mesmo guarda-chuva conceitual: a Geometria seria o estudo das propriedades e objetos que são invariantes por alguma ação de grupo.

# Menções honrosas

- ▶ Por exemplo, a Geometria Euclidiana espacial seria dada pela ação do grupo de isometrias no espaço

$$\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$$

Enquanto na geometria hiperbólica plana, o grupo de isometrias seria o grupo projetivo

$$PSL(2, \mathbb{R})$$

# Menções honrosas

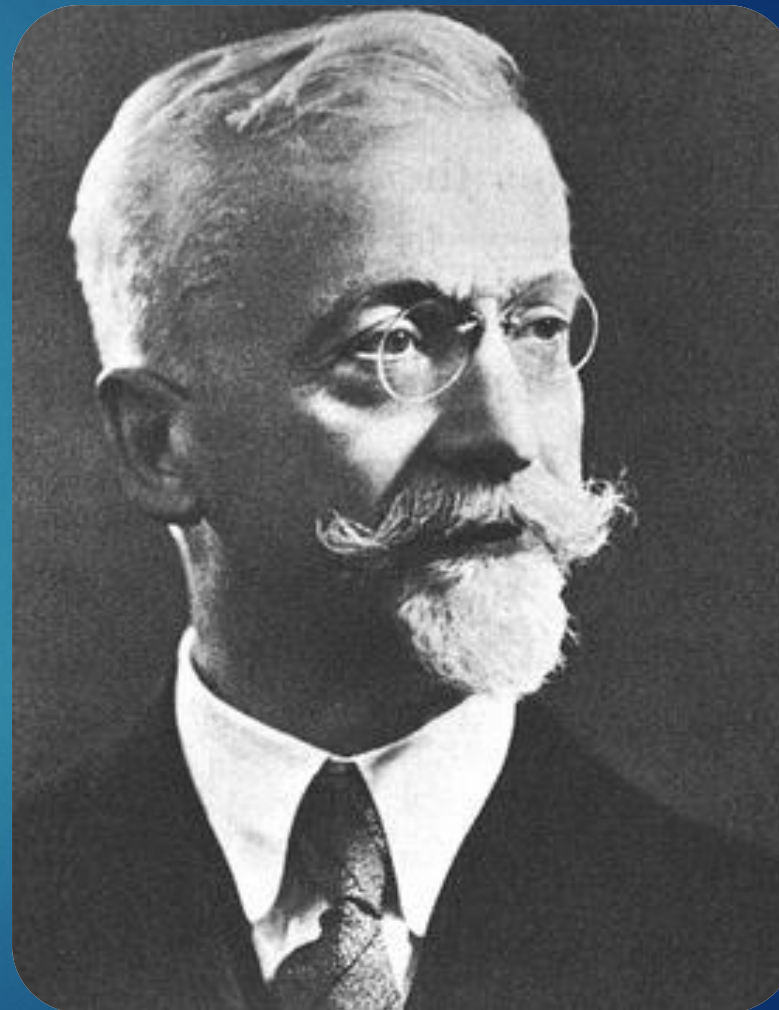
- ▶ Em certo sentido, novas geometrias podem surgir ao considerar-se novas ações de determinados grupos sobre determinados conjuntos, abrindo um leque infinito de possibilidades.

# Menções honrosas

- ▶ Élie Joseph Cartan (Dolomieu, 9 de abril de 1869 — Paris, 6 de maio de 1951)

# Menções honrosas

- ▶ Élie Joseph Cartan (1869-1951)



# Menções honrosas

- ▶ Élie Cartan trouxe o uso dos grupos de Lie para a Geometria diferencial. Sua tese de 1894 era intitulada: Sur la structure des groupes de transformations finis et continus.

# Menções honrosas

- ▶ Élie Cartan trouxe o uso dos grupos de Lie para a Geometria diferencial. Sua tese de 1894 era intitulada: *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*.
- ▶ Cartan também inventou o método do referencial móvel, que deu uma nova roupagem e simplificação para os cálculos da geometria riemanniana, de Ricci e Levi-Civita. Sua teoria levou ao desenvolvimento da teoria de conexões em fibrados principais.

# Menções honrosas

- ▶ A teoria das conexões e do transporte paralelo teve grande influência, não só na Geometria pura como na Física teórica.

# Menções honrosas

- ▶ A teoria das conexões e do transporte paralelo teve grande influência, não só na Geometria pura como na Física teórica.
- ▶ Existem quatro interações fundamentais na natureza: a gravitação, o eletromagnetismo, a interação nuclear fraca e a interação nuclear forte. Dessas, as três últimas são tratadas sob o mesmo arcabouço teórico como teorias de calibre (gauge), que nada mais são, que teorias de conexões em fibrados principais.