História da Matemática

AULA 20

TURNING POINTS

PARTE III: ÁLGEBRA

Simetrias e Equações

- Desde Lagrange, o foco no estudo das equações algébricas passou da resolução explícita através de uma fórmula para a questão: Quando uma equação algébrica (polinomial) pode ser resolvida por radicais (isto é por fórmulas envolvendo apenas raízes n-ésimas de expressões aritméticas envolvendo apenas os coeficientes)?

Simetrias e Equações

- Abel havia demonstrado que equações quínticas, em geral (e portanto equações de grau mais alto), não poderiam ser resolvidas por quadraturas. Isto não significa que nenhuma equação de quinto grau possa ser resolvida, por exemplo:

$$x^5 - 1 = 0$$

Pode ser facilmente resolvida, tendo como soluções:

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right),\ \text{para}\ 0 \leq k \leq 4.$$

Simetrias e Equações

- A contribuição de Galois foi dar um critério geral para a solubilidade por radicais:

Simetrias e Equações

- A contribuição de Galois foi dar um critério geral para a solubilidade por radicais:

Teorema (Galois) Um equação polinomial é solúvel por radicais se, e somente se o grupo de simetria de suas raízes for um grupo solúvel.

Simetrias e Equações

- Um grupo G é solúvel se existe uma série de subgrupos normais:

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

Tais que os quocientes

$$H_i = {}^{G_i}/_{G_{i-1}}$$

Sejam grupos abelianos.

Simetrias e Equações

- Do lado das equações, isto significa que, dada uma equação polinomial $p(x) = 0$, com $p \in k[x]$, em que k é um corpo, existe uma torre de extensões de corpos

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_n$$

em que $k_i = k_{i-1}(\alpha_i)$ (este é o menor corpo que contém k_{i-1} e α_i) e $\alpha_i^m - a = 0$ para $a \in k_{i-1}$.

Simetrias e Equações

- Vimos que os trabalhos de Galois permaneceram desconhecidos após a sua morte. Dez anos depois que Joseph Liouville (1809-1882) publicou uma coletânea dos trabalhos de Galois, em uma tentativa de despertar o interesse da comunidade Matemática para a profundidade de seus resultados, mesmo que de difícil compreensão.

Simetrias e Equações

- O primeiro livro em que a Teoria de Galois foi incluída como um conteúdo foi:

Cours d'algèbre supérieure,

livro de Joseph-Alfred Serret (1819-1885), publicado em 1866.

Simetrias e Equações

- O primeiro livro em que a Teoria de Galois foi incluída como um conteúdo foi:

Cours d'algèbre supérieure,

livro de Joseph-Alfred Serret (1819-1885), publicado em 1866.

- Também, Camille Jordan (1838-1922), aluno de Serret, publicou em 1870 a obra:

Traité des substitutions et des équations algébriques,

dando maior destaque à nascente Teoria de Galois.

Simetrias e Equações

- Emil Artin (Viena, 3 de março de 1898 — Hamburgo, 20 de dezembro de 1962)

Simetrias e Equações

- Emil Artin (1898-1962)

Simetrias e Equações

- Artin, em seu livro *Galois Theory,* de 1944, apresentou a Teoria de Galois na forma moderna, como a conhecemos hoje: como uma teoria da relação entre extensões de corpos e grupos de automorfismos dessas extensões.

Simetrias e Equações

- Existem outras variantes da Teoria de Galois que merecem ser mencionadas:

Simetrias e Equações

- Existem outras variantes da Teoria de Galois que merecem ser mencionadas:
- Teoria de Picard-Vessiot, que é uma teoria de extensões diferenciais de corpos associadas a soluções de equações diferenciais lineares.

Simetrias e Equações

- Existem outras variantes da Teoria de Galois que merecem ser mencionadas:
- Teoria de Picard-Vessiot, que é uma teoria de extensões diferenciais de corpos associadas a soluções de equações diferenciais lineares.
- Teoria de Galois para extensões de anéis comutativos, de Chase-Harrison-Rosenberg.

Simetrias e Equações

- Existem outras variantes da Teoria de Galois que merecem ser mencionadas:
- Teoria de Hopf-Galois, de Chase e Sweedler, onde ao invés de se considerar um grupo de automorfismos, se considera uma coação por uma álgebra de Hopf.

Simetrias e Equações

- Existem outras variantes da Teoria de Galois que merecem ser mencionadas:
- Teoria de Hopf-Galois, de Chase e Sweedler, onde ao invés de se considerar um grupo de automorfismos, se considera uma coação por uma álgebra de Hopf.
- Teoria de Galois-Gruthendieck, que basicamente é uma teoria que estuda as propriedades de dois funtores contravariantes entre duas categorias que são POSETS.

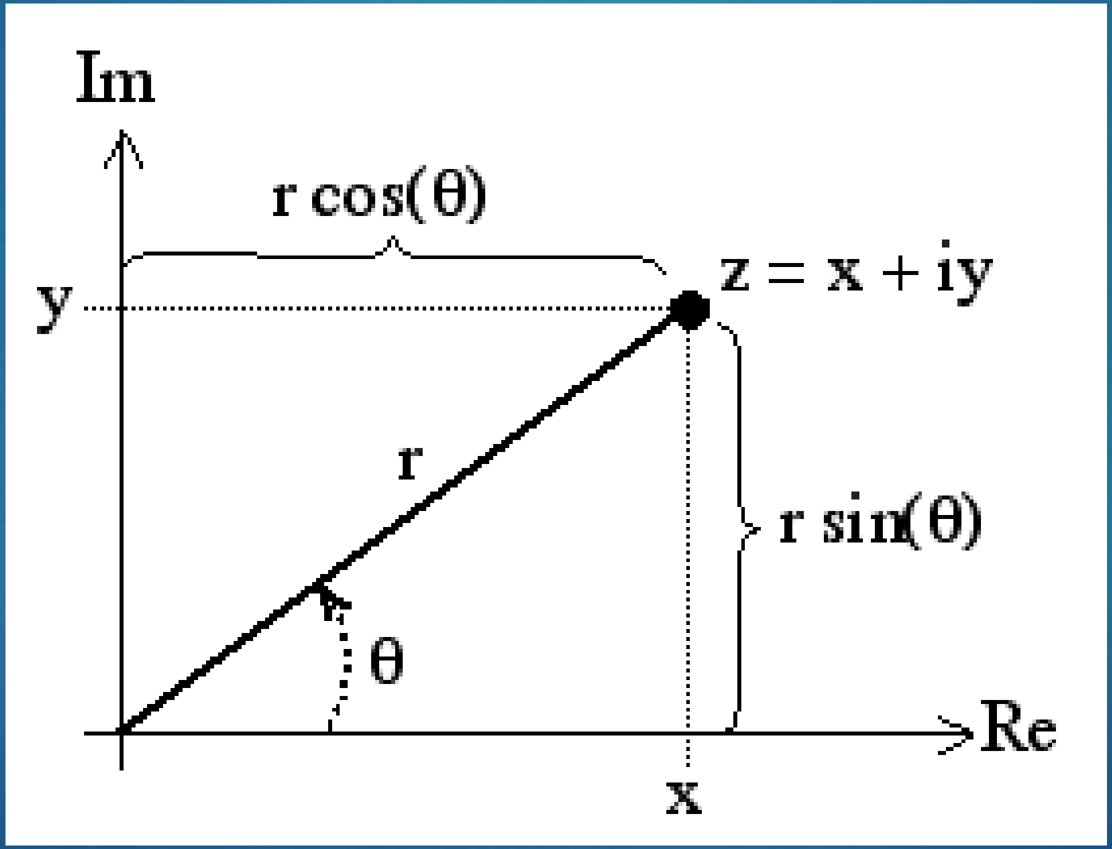
Não-Comutatividade

- Como vimos, após os trabalhos de Argand e Gauss, ficou claro que a estrutura dos números complexos está intimamente relacionada com a Geometria Analítica do plano euclidiano.

Não-Comutatividade

- Como vimos, após os trabalhos de Argand e Gauss, ficou claro que a estrutura dos números complexos está intimamente relacionada com a Geometria Analítica do plano euclidiano.
- Vamos ver que isto desencadeou um processo que levou à criação de estruturas não comutativas em Álgebra.

Números complexos e geometria no plano



Números complexos e geometria no plano

- Vamos usar a imersão dos números complexos no espaço das matrizes 2x2 reais

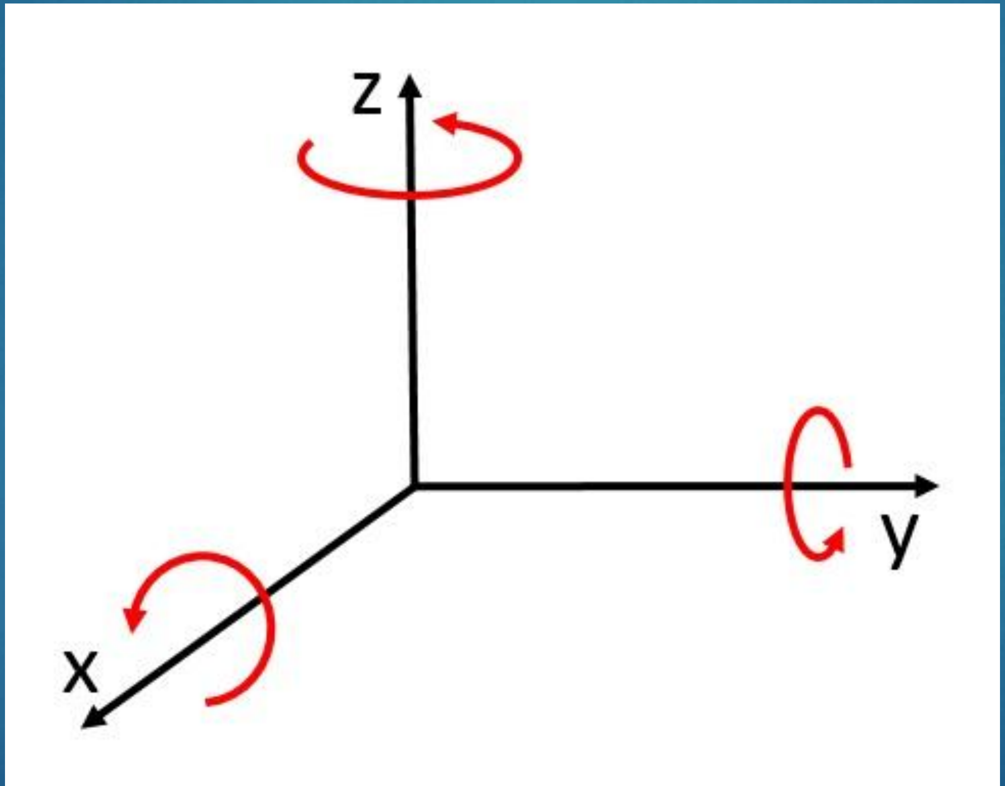
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C} & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & x+iy & \mapsto & \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \end{array}$$

Números complexos e geometria no plano

- E especializar para o subgrupo das rotações no plano

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & SO(2) \\ & & \cos\theta + i\sin\theta & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

Em três dimensões é mais difícil!



Eixos principais de rotação no espaço.

Em três dimensões é mais difícil!

- Matrizes de rotação em $\mathbb{R}^3$:
- $$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

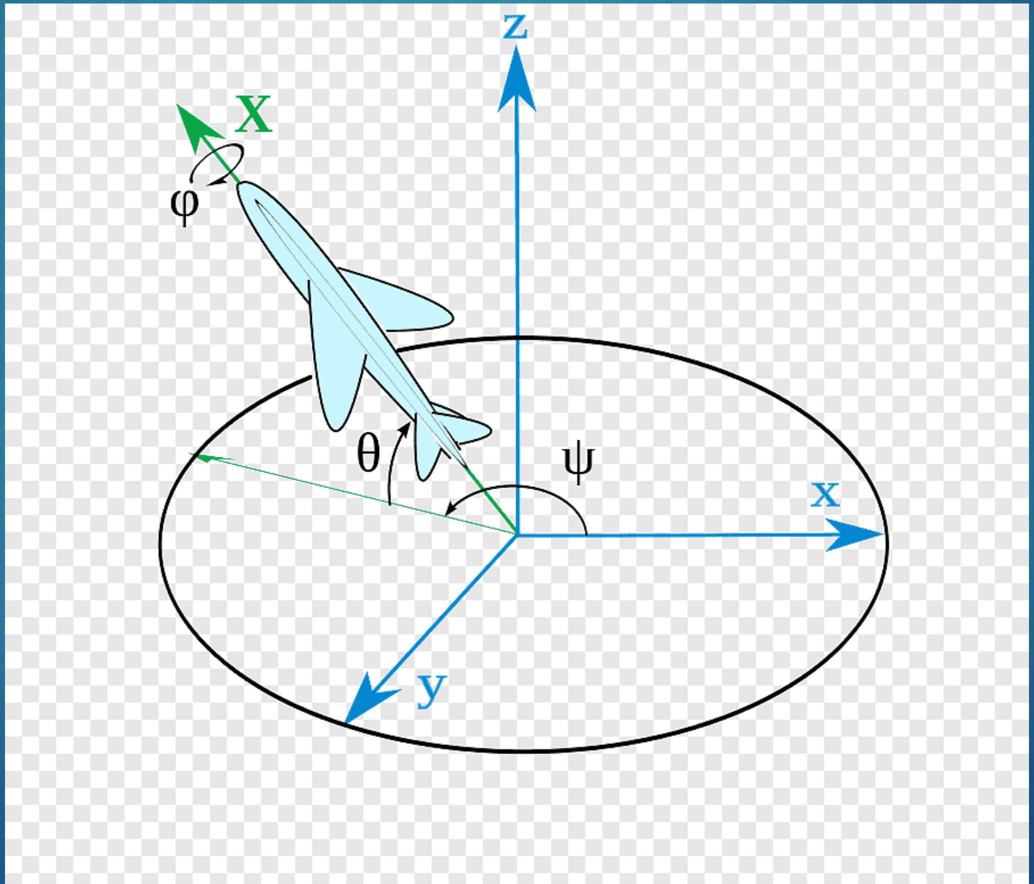
Em três dimensões é mais difícil!

- Matrizes de rotação em $\mathbb{R}^3$:
- $$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Em três dimensões é mais difícil!

- Matrizes de rotação em $\mathbb{R}^3$:
- $$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em três dimensões é mais difícil!

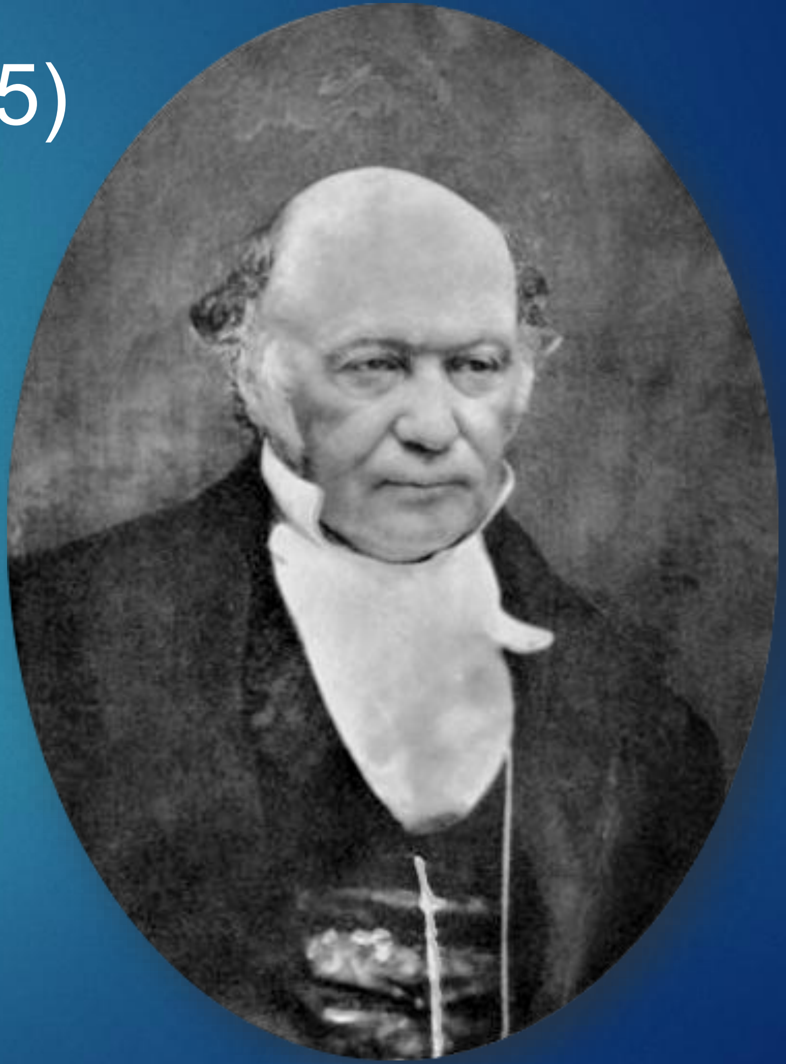


Os quatérnions

- William Rowan Hamilton (Dublin, 4 de agosto de 1805 - Dublin, 2 de setembro de 1865)

Os quatérnions

- William Rowan Hamilton (1805-1865)



Os quatérnions

16 de outubro de 1843,
Royal Canal, Dublin

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Os quatérnions

- Rotações espaciais usando quatérnions:

Os quatérnions

- Rotações espaciais usando quatérnions:
- Eixo de rotação: $n = xi + yj + zk$, com $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$.

Os quatérnions

- Rotações espaciais usando quatérnions:
- Eixo de rotação: $n = xi + yj + zk$, com $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$.
- Ângulo de Rotação: ψ.

Os quatérnions

- Rotações espaciais usando quatérnions:
- Eixo de rotação: $n = xi + yj + zk$, com $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$.
- Ângulo de Rotação: ψ.
- $R_n(\psi)(v) = qvq^{-1}$, em que

$q = \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2} n$, e $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$.

Os quatérnions

- O “problema” era que se havia introduzido um “espaço” de quatro dimensões para se estudar a geometria analítica do espaço com três dimensões.

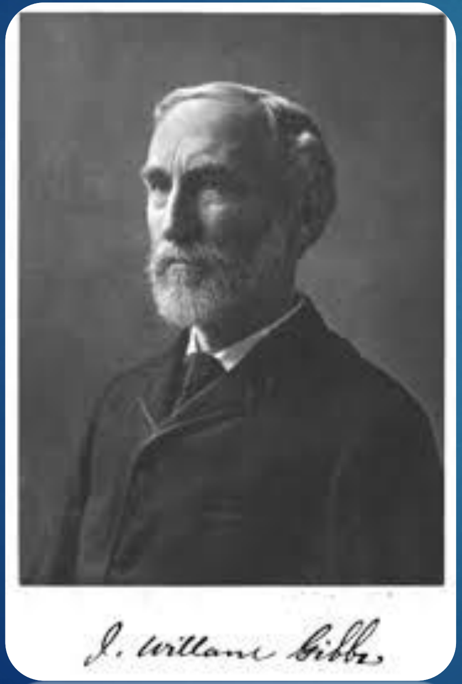
Os quatérnions

- O “problema” era que se havia introduzido um “espaço” de quatro dimensões para se estudar a geometria analítica do espaço com três dimensões.

- Após a introdução dos quatérnions por Hamilton, dois caminhos complementares foram trilhados:

Os quatérnions saem de cena?

- Ou reduzir a álgebra dos quatérnions, para se ter o cálculo vetorial em $\mathbb{R}^3$:

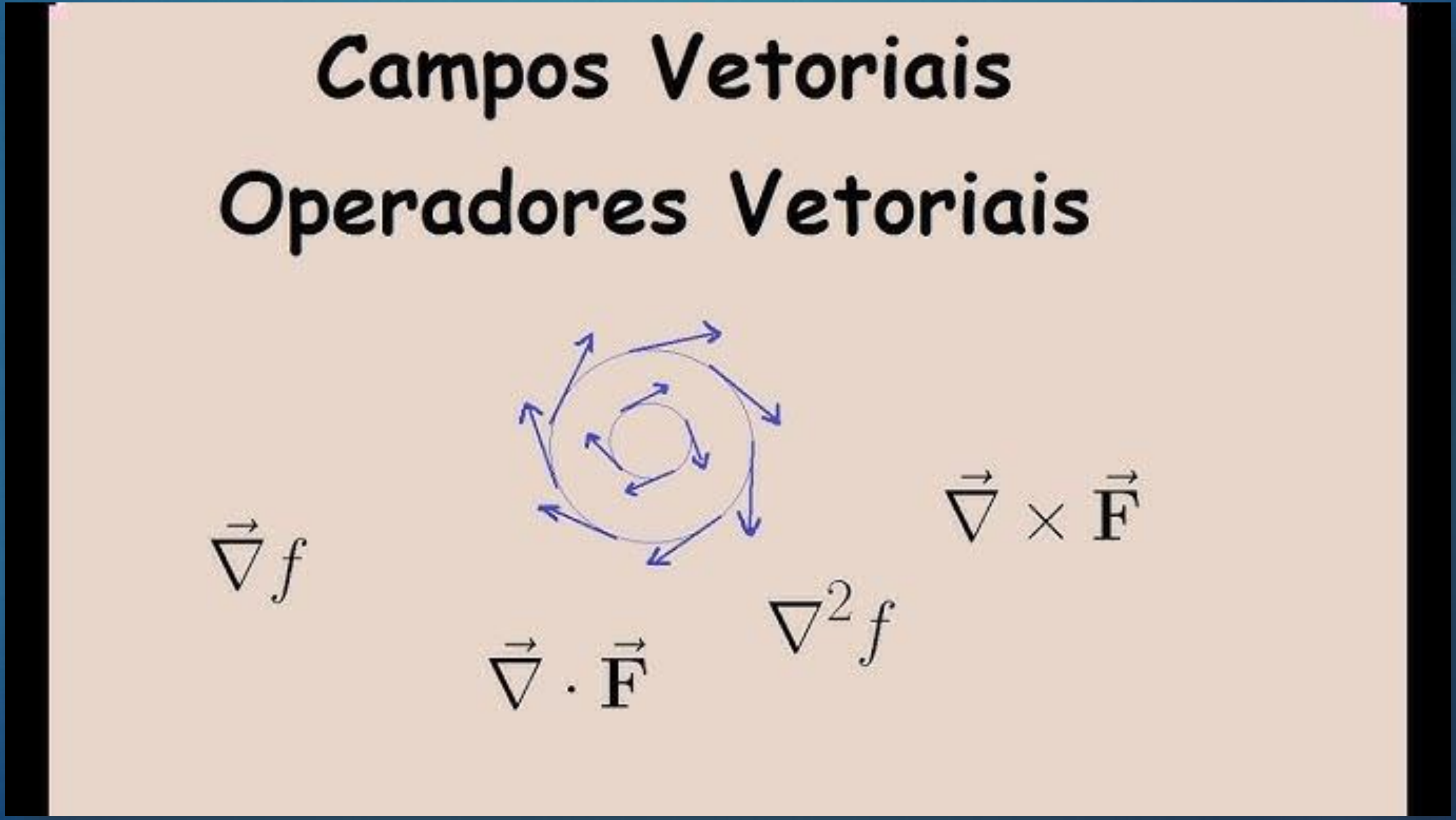


Josiah Willard Gibbs (1839-1903)

Oliver Heaviside (1850-1925)

Os quatérnions saem de cena?

- Ou reduzir a álgebra dos quatérnions, para se ter o cálculo vetorial em $\mathbb{R}^3$:



Os quatérnions saem de cena?

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dG}{dz}-\frac{dH}{dy}&=\mu\alpha,\\
\frac{dH}{dx}-\frac{dF}{dz}&=\mu\beta,\\
\frac{dF}{dy}-\frac{dG}{dx}&=\mu\gamma.
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
P&=\mu\gamma\frac{dy}{dt}-\mu\beta\frac{dz}{dt}+\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx},\\
Q&=\mu\alpha\frac{dz}{dt}-\mu\gamma\frac{dx}{dt}+\frac{dG}{dt}-\frac{d\Psi}{dy},\\
R&=\mu\beta\frac{dx}{dt}-\mu\alpha\frac{dy}{dt}+\frac{dH}{dt}-\frac{d\Psi}{dz}.
\end{aligned}\right\}$$

$$R=-4\pi E^2 h,$$

$$\left.\begin{aligned}
p&=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}-\frac{1}{E^2}\frac{dP}{dt}\right),\\
q&=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}-\frac{1}{E^2}\frac{dQ}{dt}\right),\\
r&=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}-\frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt}\right).
\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}+\frac{de}{dt}=0$$

$$e=\frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}\right)$$

Equações de Maxwell
sem a notação do
Cálculo Vetorial.

Os quatérnions saem de cena?

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

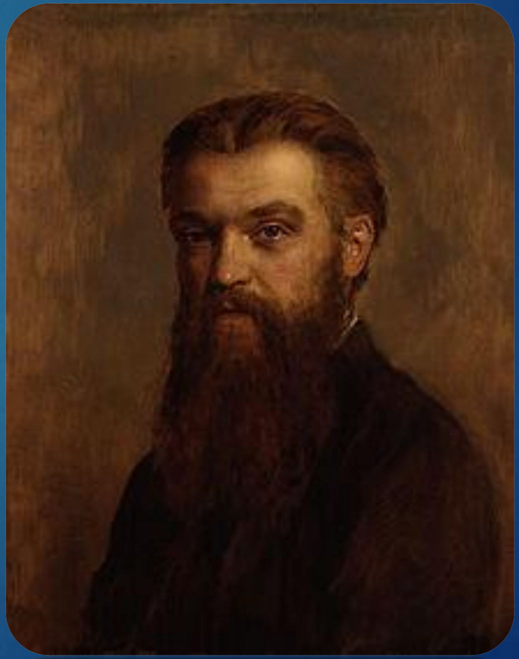
Equações de Maxwell com a notação do Cálculo Vetorial.

O salto de abstração

- Ou expandir a álgebra para conter outros elementos além de escalares e vetores:

Hermann Günther Grassmann (1809-1877)

William Kingdom Clifford (1845-1879)



O salto de abstração

- As álgebras de Clifford generalizam várias outras construções anteriores, como os números complexos, álgebras de matrizes, os quatérnions, etc.

O salto de abstração

- Álgebra de Clifford sobre um espaço vetorial $\mathbb{V}$ (sobre $\mathbb{R}$) munido de uma forma bilinear simétrica

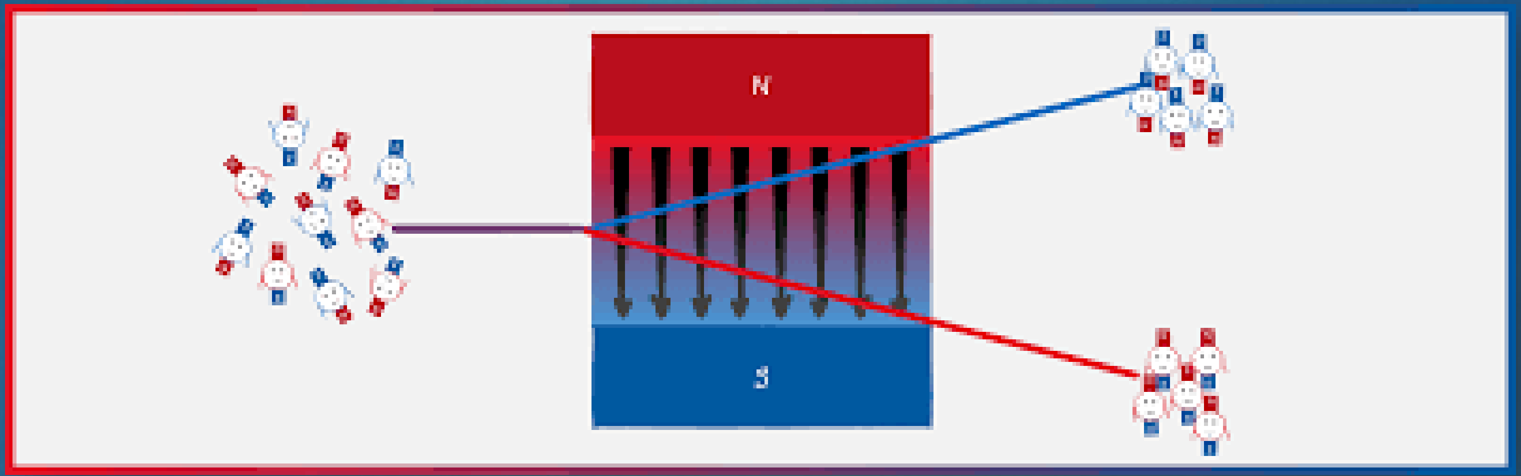
$$<\,,>: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{V}, <\,,>) = T(\mathbb{V})/\mathcal{J}$$

Em que $\mathcal{J} = \langle v \otimes w + w \otimes v - < v, w > \mid v, w \in \mathbb{V} \rangle$

A redescoberta!

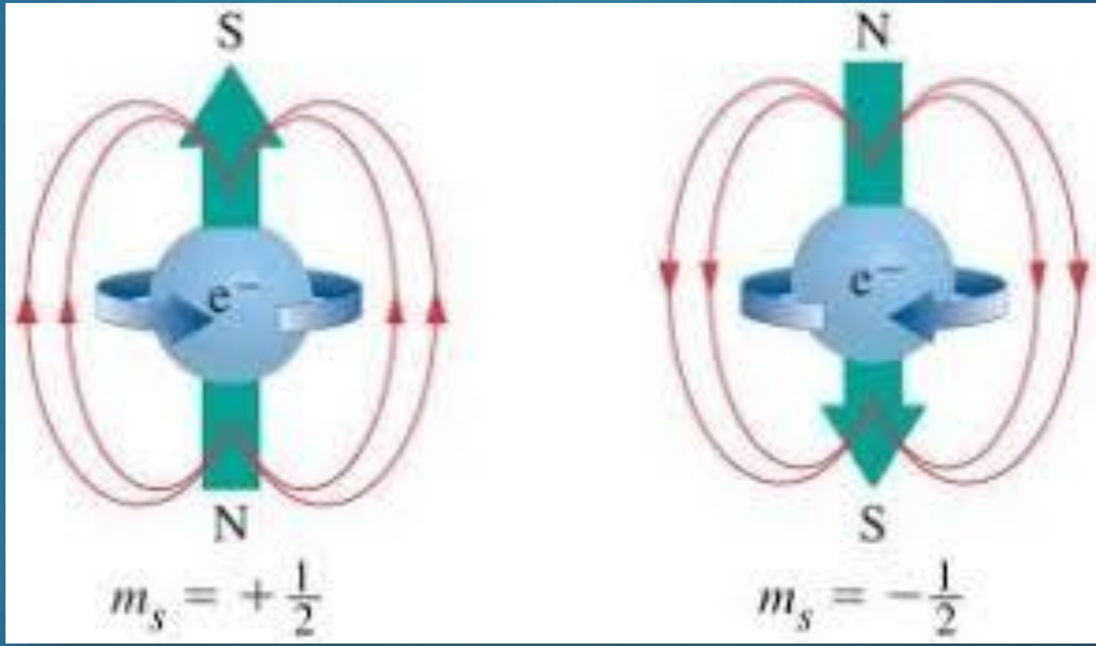
- O spin do elétron:



Experimento de Stern-Gerlach

A redescoberta!

- O spin do elétron:



Visão pictórica do spin

A redescoberta!

- O spin do elétron:

Wolfgang
Pauli
(1900-1958)

Matrizes
de
Pauli

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A redescoberta!

- O elétron relativístico (Equação de Klein-Gordon):

$$p \to -i\nabla \qquad E \to i\frac{\partial}{\partial t}$$

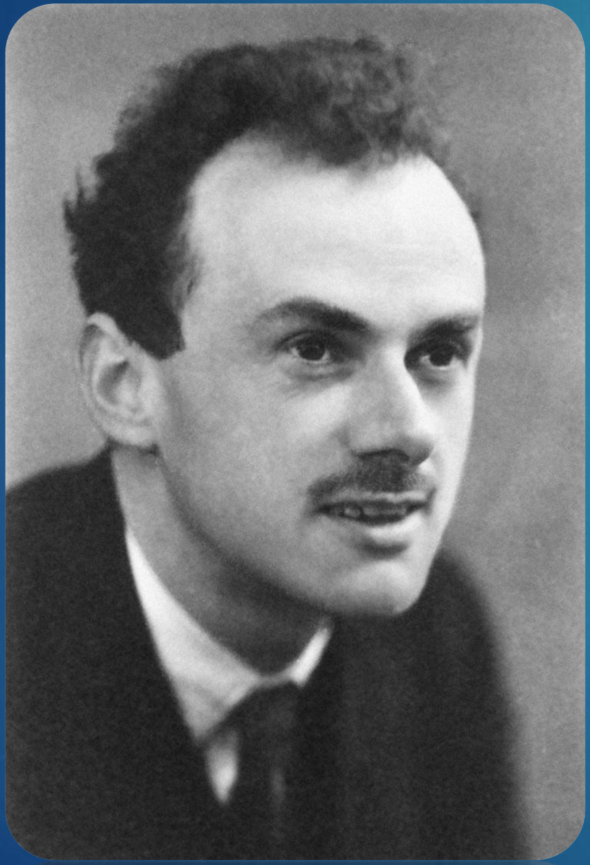
$$\implies E^2 = p^2 + m^2 \quad \longrightarrow \quad -\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\nabla^2 + m^2$$

$$\implies \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 = 0$$

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0}$$

A redescoberta!

- O elétron relativístico:



Paul Adrien Maurice Dirac
(1902-1984)

A redescoberta!

- O elétron relativístico (Equação de Dirac):

$$
\begin{aligned}
(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &= 0 \\
\gamma^0 &= \beta \\
\gamma^i &= \beta\alpha^i, \qquad i = 1, 2, 3 \\
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

O advento da estrutura

- Paulatinamente, a Álgebra foi evoluindo do estudo da resolução de equações algébricas para o estudo das estruturas algébricas, isto é, os ambientes abstratos onde existem operações entre os elementos e onde faz sentido falar em equações.

O advento da estrutura

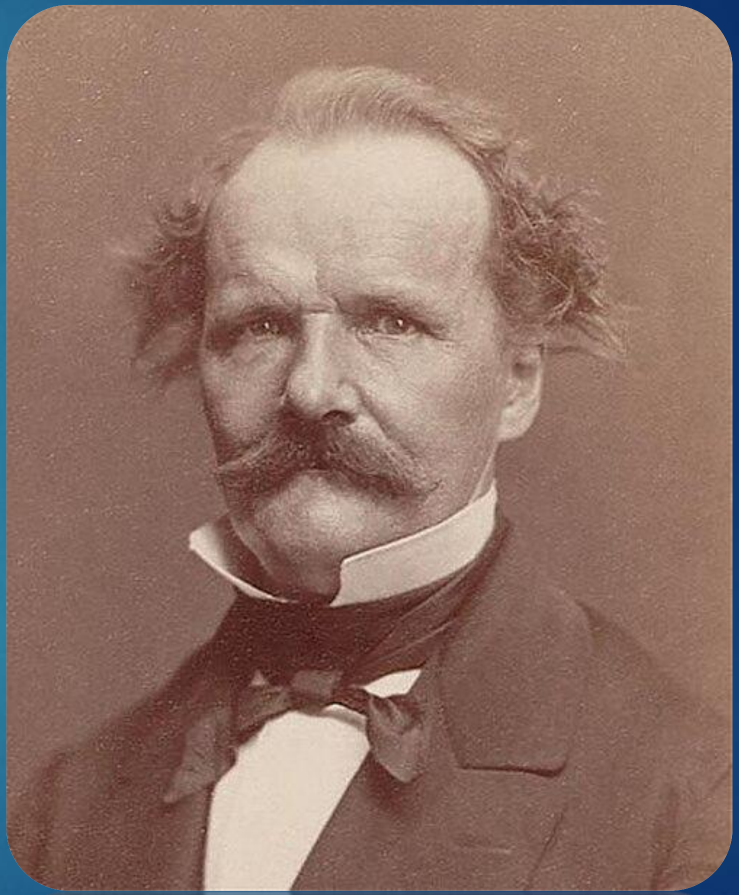
- Paulatinamente, a Álgebra foi evoluindo do estudo da resolução de equações algébricas para o estudo das estruturas algébricas, isto é, os ambientes abstratos onde existem operações entre os elementos e onde faz sentido falar em equações.
- Alguns matemáticos foram responsáveis pelo desenvolvimento da linguagem e das ferramentas que hoje nos são comuns no estudo da Álgebra Abstrata.

O advento da estrutura

- Ernst Eduard Kummer (Żary, 29 de janeiro de 1810 — Berlim, 14 de maio de 1893)

O advento da estrutura

- Ernst Eduard Kummer (1810-1893)



O advento da estrutura

- Kummer, na tentativa de demonstrar o Último Teorema de Fermat para vários primos, inventou o conceito de ideal. Também desenvolveu as primeiras ideias que levaram aos números p-ádicos. Finalmente, podemos também atribuir a Kummer a criação das extensões ciclotômicas de corpos.

O advento da estrutura

- Amalie Emmy Noether (Erlangen, 23 de março de 1882 – Bryn Mawr, 14 de abril de 1935)

O advento da estrutura

- Amalie Emmy Noether (1882-1935)

O advento da estrutura

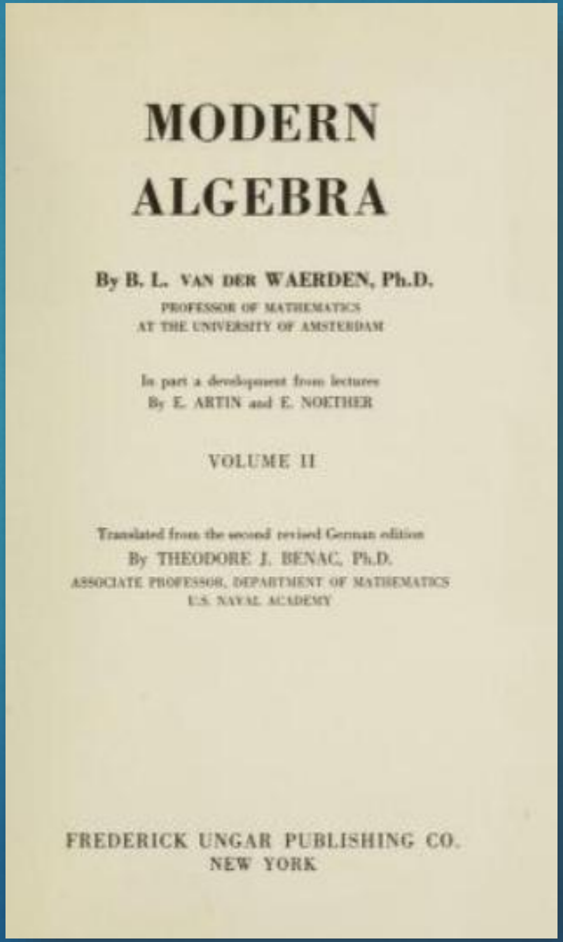
- Emmy Noether, em seu artigo Idealtheorie in Ringbereichen (Teoria dos Ideais em Anéis), de 1920, fundou um novo estilo de se formular a Álgebra: como uma Teoria de Estruturas. Os conceitos de ideais primos, anéis com condições de cadeia crescente (anéis Noetherianos).

O advento da estrutura

- Em Göttingen, Noether teve vários estudantes, entre eles se destaca Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996), que publicou em 1931 o primeiro livro de Álgebra abstrata: *Moderne Algebra*

O advento da estrutura

- Edição em inglês de *Moderne Algebra,* de Van der Waerden



MODERN
ALGEBRA

By B. L. VAN DER WAERDEN, Ph.D.
PROFESSOR OF MATHEMATICS
AT THE UNIVERSITY OF AMSTERDAM

In part a development from lectures
By E. ARTIN and E. NOETHER

VOLUME II

Translated from the second revised German edition
By THEODORE J. BENAC, Ph.D.
ASSOCIATE PROFESSOR, DEPARTMENT OF MATHEMATICS
U.S. NAVAL ACADEMY

FREDERICK UNGAR PUBLISHING CO.
NEW YORK

Menções honrosas

- Samuel Eilenberg (1913-1998) e Saunders Mac Lane (1909-2005), os fundadores da Teoria de Categorias, com o legendário artigo:

General Theory of Natural Equivalences

Transactions of the American Mathematical Society,

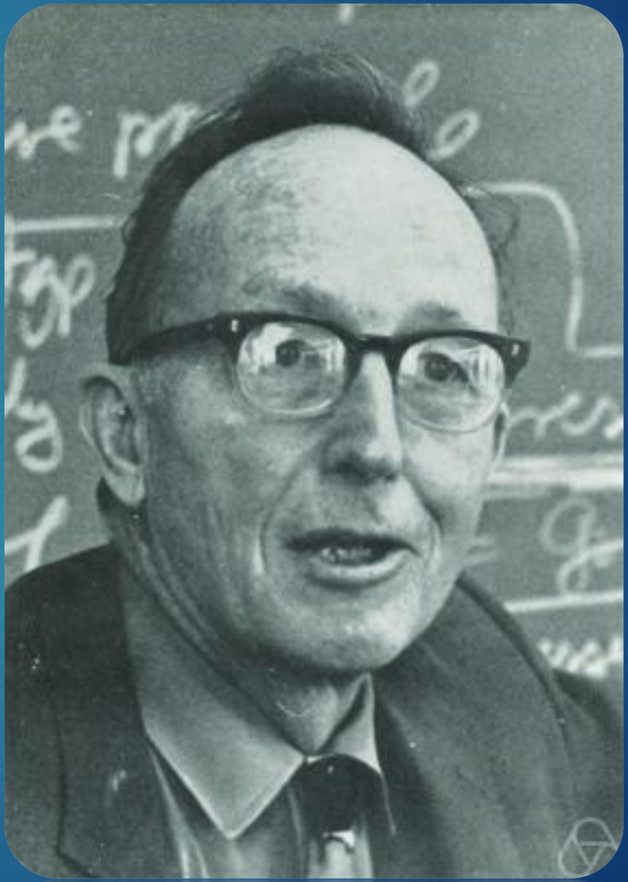
Vol. 58, No. 2 (1945), 231-294.

Lançou os conceitos fundamentais de Categorias, Funtores e Transformações Naturais.

Menções honrosas

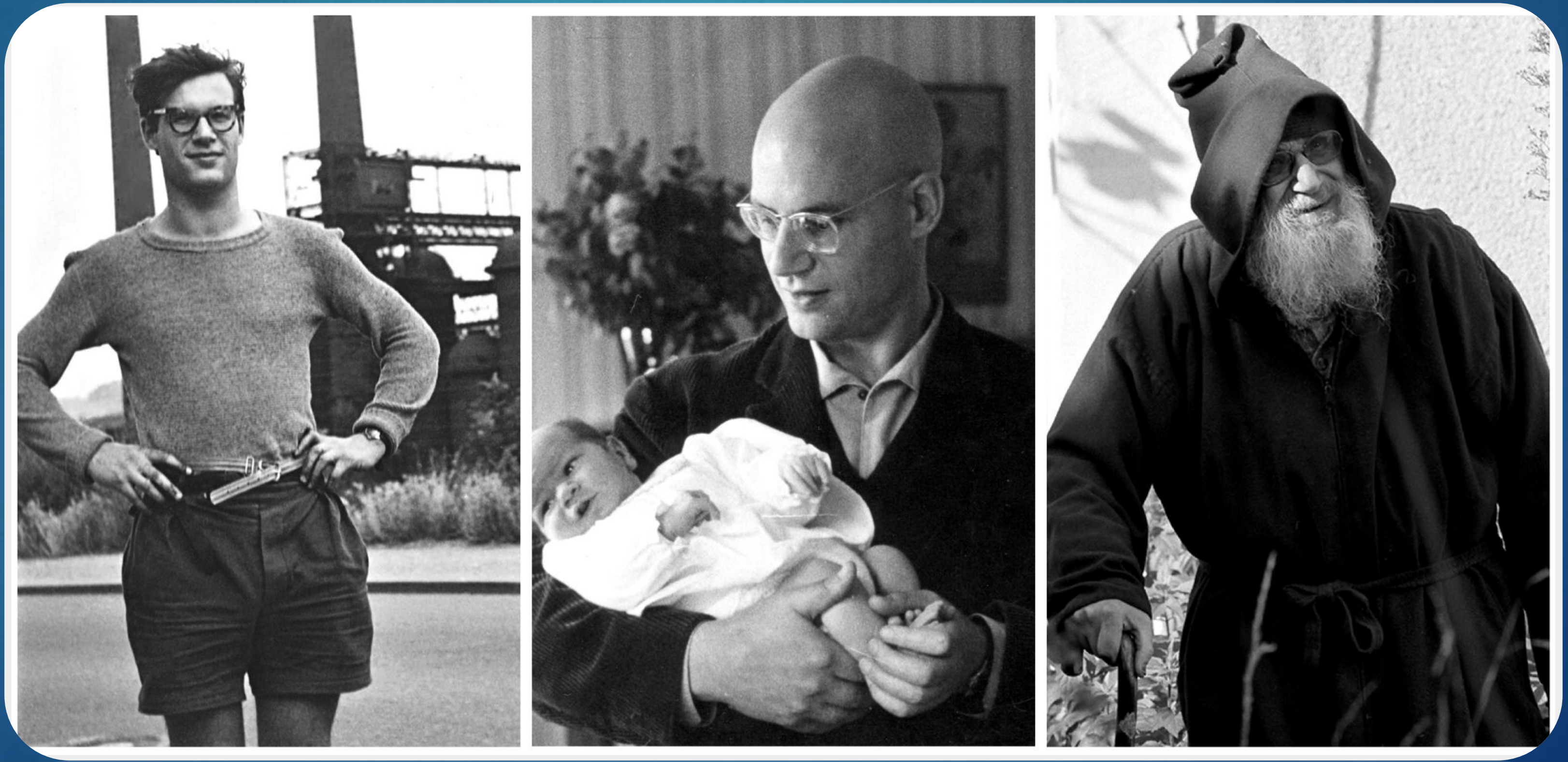
Samuel Eilenberg

Saunders Mac Lane



Menções honrosas

- Alexander/Alexandre Grothendieck (Berlim, 28 de março de 1928 — Saint-Girons, 13 de novembro de 2014)



Menções honrosas

- Grothendieck contribuiu para o desenvolvimento desde elementos da teoria de espaços vetoriais topológicos (espaços nucleares) até os fundamentos da Geometria Algébrica (teoria dos esquemas). Mas também são dele as noções de cohomologia étale, K-teoria, Teoria de topos, motivos e cohomologia motivica.

Menções honrosas

Embora a matemática tenha se tornado cada vez mais abstrata e geral ao longo do século XX, foi Alexander Grothendieck quem se destacou como o maior mestre dessa tendência. Sua habilidade singular residia em eliminar todas as hipóteses desnecessárias e aprofundar-se em uma área de tal forma que seus padrões internos, no nível mais abstrato, se revelavam — e então, como um mágico, mostrar como a solução de antigos problemas se apresentava de maneira direta, agora que sua verdadeira natureza havia sido revelada.