

História da Matemática

AULA 21

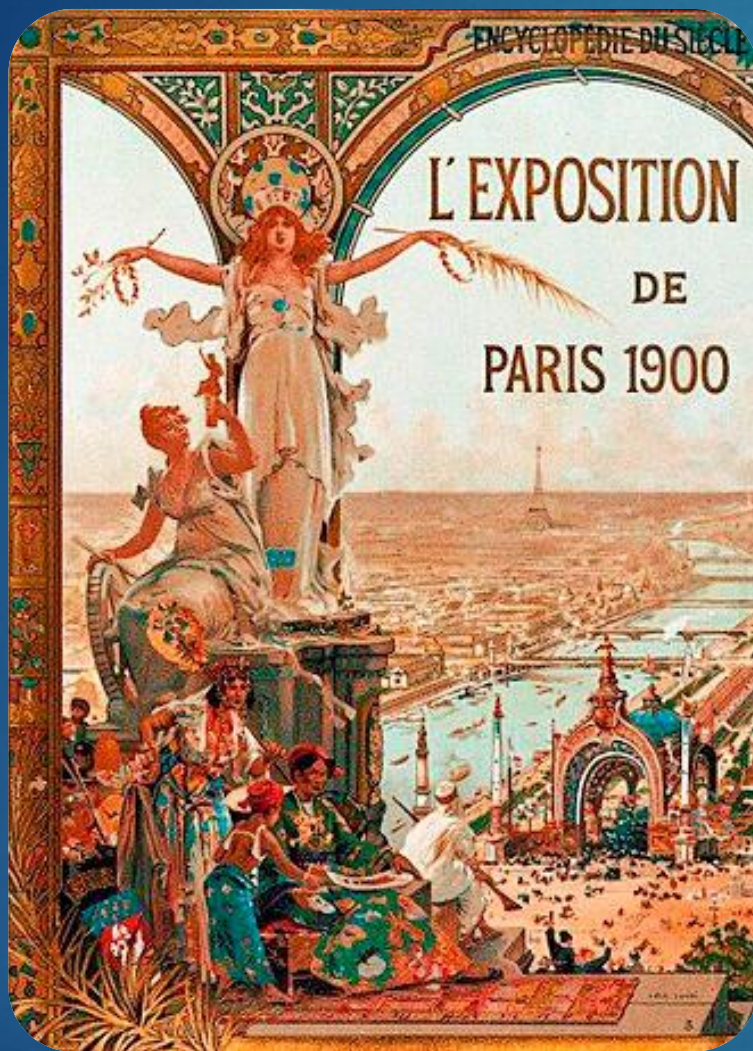
ONCOTÔ? DONCOVIM? PRONCOVÔ?





PRINTEMPS

MUCHA







Cliché obtenu avec les objectifs Zeiss-Knaen.

LE TROTTOIR ROULANT

Rien de plus charmant que ce « chemin qui marche » au milieu du feuillage des arbres, en dominant l'Exposition ! Et quel plaisir de passer d'une plate-forme à l'autre dans un saut léger et gracieux qui quelquefois se termine par une chute sans danger !

La plate-forme mobile et le chemin de fer électrique ont transporté 9.917.000 voyageurs.

L'Exposition a fermé ses portes le 12 novembre 1900 après avoir duré 210 jours pendant lesquels elle a reçu 51 millions de visiteurs — L'Exposition de 1855 en avait reçu 5 millions ; celle de 1857 : 9 millions ; celle de 1878 : 16 millions et demi ; celle de 1889 : 28 millions — La plus forte journée de 1900 a été le 7 octobre avec 652.000 entrées.



La Belle Époque!

- ▶ Se pudéssemos estabelecer um marco inicial da Matemática do Século XX, certamente um dos pontos fundamentais seriam os 23 problemas que Hilbert apresentou no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900, em Paris.

La Belle Époque!

- ▶ David Hilbert (Königsberg, 23 de janeiro de 1862 — Göttingen, 14 de fevereiro de 1943)

La Belle Époque!

► David Hilbert (1862-1943)



La Belle Époque!

- Os problemas de Hilbert possuem uma amplitude matemática muito grande, indo desde o Problema 3 (que consiste em dar uma noção geométrica de volume para poliedros), que é muito simples de entender até por um não especialista e que foi rapidamente resolvido, até problemas que ainda permanecem em aberto, como o Problema 8 (a Hipótese de Riemann).

La Belle Époque!

- Os problemas de Hilbert, em um certo sentido, nortearam a pesquisa em Matemática pura ao longo do Século XX. Desses problemas, apenas quatro deles, com uma formulação precisa ainda permanecem em aberto e dois deles são de natureza muito vaga, o que torna difícil até mesmo buscar uma solução, como é o caso do Problema 6, que propõe estruturar a Física de uma maneira axiomática.

Millenium Prize Problems

- ▶ A ideia de propor uma lista de problemas para nortear a pesquisa matemática futura ainda parece bastante popular na comunidade matemática. O Clay Mathematics Institute anunciou no ano 2000 uma lista de 7 problemas, conhecida como Millenium Prize Problems. Como estímulo aos Matemáticos a buscarem se envolver com esses problemas, é oferecido aos matemáticos que resolverem qualquer um dos problemas, um prêmio de 1 milhão de dólares.

Millenium Prize Problems

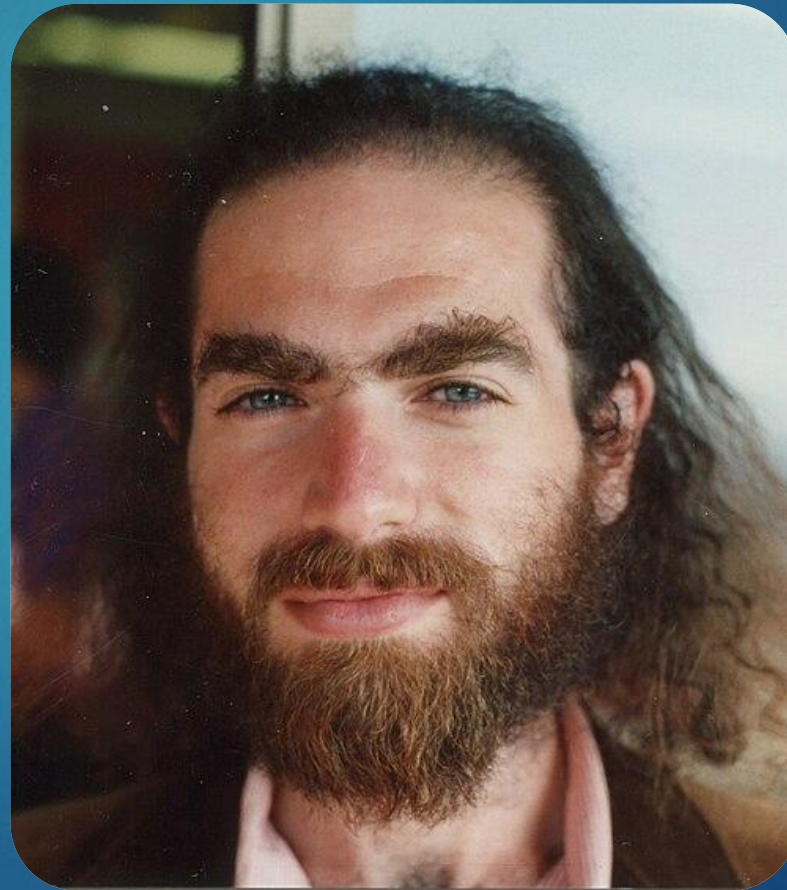
► São esses problemas:

Millenium Prize Problems

- ▶ São esses problemas:
- ▶ A Conjectura de Poincaré (resolvida por Grigori Perelman em 2002).

Millenium Prize Problems

- ▶ Grigori Perelman (13 de junho de 1966, Feliz aniversário Grisha!)



Millenium Prize Problems

- ▶ São esses problemas:
- ▶ A Conjectura de Poincaré (resolvida por Grigori Perelman em 2002).
- ▶ A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer.

Millenium Prize Problems

- ▶ São esses problemas:
- ▶ A Conjectura de Poincaré (resolvida por Grigori Perelman em 2002).
- ▶ A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer.
- ▶ A conjectura de Hodge.

Millenium Prize Problems

- ▶ São esses problemas:
- ▶ A Conjectura de Poincaré (resolvida por Grigori Perelman em 2002).
- ▶ A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer.
- ▶ A conjectura de Hodge.
- ▶ Navier-Stokes, existência e diferenciabilidade de soluções.

Millenium Prize Problems

- ▶ São esses problemas:
- ▶ P versus NP.

Millenium Prize Problems

- ▶ São esses problemas:
- ▶ P versus NP.
- ▶ A Hipótese de Riemann.

Millenium Prize Problems

- ▶ São esses problemas:
- ▶ P versus NP.
- ▶ A Hipótese de Riemann.
- ▶ Teoria de Yang-Mills, existência do gap de massa.

Nicolas Bourbaki

- ▶ A primeira guerra mundial marcou o fim da Belle Époque, ela foi devastadora, entre outros aspectos, por ter dizimado a comunidade matemática na França. Muitos jovens matemáticos franceses foram mortos nas trincheiras da primeira guerra.

Nicolas Bourbaki

- ▶ A primeira guerra mundial marcou o fim da Belle Époque, ela foi devastadora, entre outros aspectos, por ter dizimado a comunidade matemática na França. Muitos jovens matemáticos franceses foram mortos nas trincheiras da primeira guerra.
- ▶ Na década de 20, os dois grandes nomes da Matemática Francesa eram Jacques Haddamard (1865-1963) e Élie Cartan (1869-1951). A nova geração estava em desvantagem em relação à Alemanha (onde em Göttingen, ainda estava Hilbert).

Nicolas Bourbaki

- ▶ No início dos anos 30, um grupo de jovens matemáticos: Henri Cartan (filho de Élie Cartan), Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné e André Weil (irmão da filósofa Simone Weil). Fundaram um grupo com o objetivo de escrever um livro texto moderno de Análise, seguindo a tendência de formalização e abstração que Emmy Noether tinha feito com a Álgebra.

Nicolas Bourbaki



Nicolas Bourbaki



Nicolas Bourbaki

- ▶ De um simples livro de Análise, a proposta do grupo se tornou fazer uma reestruturação de toda a Matemática, partindo como base a teoria dos conjuntos iniciada por Cantor, reescrevendo tópico por tópico da forma mais precisa e formal possível.

Nicolas Bourbaki

- ▶ De um simples livro de Análise, a proposta do grupo se tornou fazer uma reestruturação de toda a Matemática, partindo como base a teoria dos conjuntos iniciada por Cantor, reescrevendo tópico por tópico da forma mais precisa e formal possível.
- ▶ Esta tendência seguia, indiretamente, uma escola filosófica que já influenciava as ciências humanas: o estruturalismo, iniciado por Émile Durkheim e Ferdinand de Saussure.

Nicolas Bourbaki

- ▶ O resultado desse programa ousado foi a obra em 10 volumes, publicada ao longo de várias décadas, iniciando-se em 1954 com *Théorie des Ensembles*.

Nicolas Bourbaki

- ▶ O resultado desse programa ousado foi a obra em 10 volumes, publicada ao longo de várias décadas, iniciando-se em 1954 com *Théorie des Ensembles*.
- ▶ A influência do grupo Bourbaki tem um subproduto interessante: na década de 1960, os matemáticos franceses propuseram que seria importante levar esse formalismo de teoria dos conjuntos para a educação básica. Esse movimento ficou conhecido como Matemática Moderna (muito na moda nos anos 70 no Brasil).

A crise de fundamentos

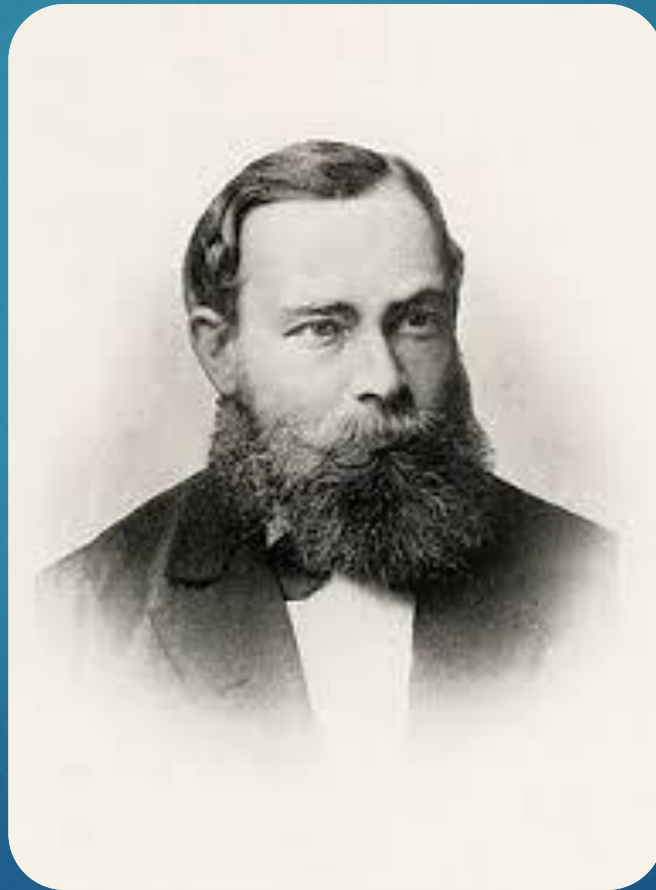
- ▶ Com a aritmetização da Análise, surgiu uma expectativa entre os matemáticos de que toda a Matemática pudesse ser colocada sobre sólidos fundamentos, de forma que todos os resultados fossem deduzidos a partir de pressupostos bem estabelecidos.

A crise de fundamentos

- ▶ Talvez, o primeiro matemático que deu origem ao esforço de formalizar toda a Matemática, foi o filósofo e matemático alemão Friedrich Ludwig Gottlob Frege (8 de novembro de 1848 – 26 de julho de 1925)

A crise de fundamentos

► Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925)



A crise de fundamentos

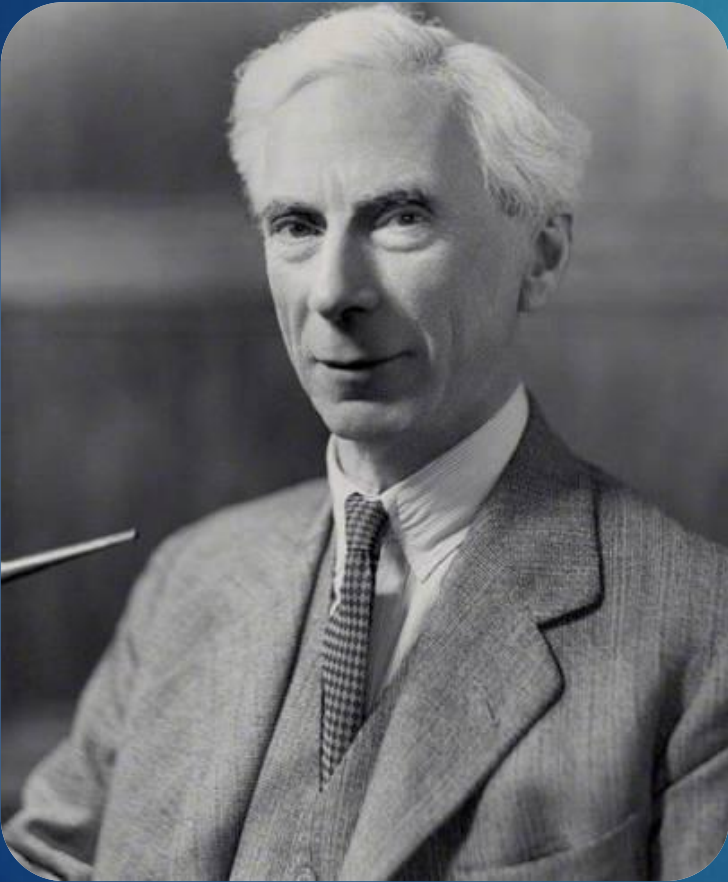
- ▶ Frege, em sua obra, Begriffsschrift, de 1879, deu origem ao que chamamos hoje de Lógica Matemática. Com isso, deu o impulso a um programa de reduzir basicamente todo o conteúdo da Matemática ao seu substrato oriundo da Lógica. Esse programa ficou conhecido como Logicismo.

A crise de fundamentos

- ▶ O auge do Logicismo se deu com o livro Principia Mathematica, uma obra em três volumes, escrita pelos Matemáticos e Filósofos britânicos Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947) entre os anos de 1910 e 1913.

A crise de fundamentos

Bertrand Russell



Alfred North Whitehead



A crise de fundamentos

- Página 362 do Principia Mathematica, onde se prova que $1+1=2$

362
PROLEGOMENA TO CARDINAL ARITHMETIC
[PART II

***54.42.** $\vdash :: \alpha \in 2. \supset : \beta \subset \alpha. \exists ! \beta. \beta \neq \alpha. \equiv. \beta \in t''\alpha$

Dem.

$\vdash. *54.4. \supset \vdash :: \alpha = t'x \cup t'y. \supset :$

$\beta \subset \alpha. \exists ! \beta. \equiv : \beta = \Lambda. \vee. \beta = t'x. \vee. \beta = t'y. \vee. \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

[*24.53-56.*51.161] $\equiv : \beta = t'x. \vee. \beta = t'y. \vee. \beta = \alpha$ (1)

$\vdash. *54.25. \text{Transp. } *52.22. \supset \vdash : x \neq y. \supset. t'x \cup t'y \neq t'x. t'x \cup t'y \neq t'y :$

[*13.12] $\supset \vdash : \alpha = t'x \cup t'y. x \neq y. \supset. \alpha \neq t'x. \alpha \neq t'y$ (2)

$\vdash. (1). (2). \supset \vdash :: \alpha = t'x \cup t'y. x \neq y. \supset :$

$\beta \subset \alpha. \exists ! \beta. \beta \neq \alpha. \equiv : \beta = t'x. \vee. \beta = t'y :$

[*31.235] $\equiv : (\exists z). z \in \alpha. \beta = t'z :$

[*37.6] $\equiv : \beta \in t''\alpha$ (3)

$\vdash. (3). *11.11.35. *54.101. \supset \vdash. \text{Prop}$

***54.43.** $\vdash :: \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv. \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash. *54.26. \supset \vdash :: \alpha = t'x. \beta = t'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv. x \neq y.$

[*51.231] $\equiv. t'x \cap t'y = \Lambda.$

[*13.12] $\equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda$ (1)

$\vdash. (1). *11.11.35. \supset$

$\vdash : (\exists x, y). \alpha = t'x. \beta = t'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda$ (2)

$\vdash. (2). *11.54. *52.1. \supset \vdash. \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$

A crise de fundamentos

- ▶ A segunda escola de fundamentos da Matemática foi o Intuicionismo. Basicamente, o Intuicionismo afirma que os objetos e os conceitos que realmente existem em Matemática são aqueles que podem ser obtidos por um processo construtivo. Além disso, o intuicionismo rejeitava a lei do terceiro excluído, sendo assim, provas por redução ao absurdo não são consideradas válidas dentro do intuicionismo.

A crise de fundamentos

- ▶ O maior expoente do Intuicionismo foi o Matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)

A crise de fundamentos

► Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)



A crise de fundamentos

- ▶ Indo na direção contrária, David Hilbert tinha desde o início de sua carreira demonstrado a existência de objetos matemáticos por métodos não construtivos (é o que fazemos hoje quase todo o tempo). No final das contas, o que importa mesmo é estabelecer quais são os axiomas e serem seguidos e confiar nas regras do jogo para desenvolver a sua Matemática. Essa abordagem é conhecida como Formalismo.

A crise de fundamentos

- ▶ O perigo existencial profundo que nos espreita, residindo nas sombras, quando adotamos a postura formalista é o fato de não termos certeza se, ao estabelecermos um sistema formal, se esse sistema é consistente, ou seja: será que podemos provar que, dentro de nosso sistema formal, estamos livres de provar uma afirmação e ao mesmo tempo a sua negação?

A crise de fundamentos

- ▶ David Hilbert demonstrava, em seu discurso no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900, o otimismo da Belle Époque em relação ao progresso científico da humanidade, chegando a afirmar que não haverá “ignorabimus” em Matemática, isto é: tudo que existir para se conhecer será conhecido, tudo que existir para se provar, será provado!

A crise de fundamentos

- ▶ Esse entusiasmo com o progresso da Matemática sofreu um revés intransponível, graças ao trabalho de um excêntrico, e até mesmo paranóico, matemático austríaco: Kurt Friedrich Gödel (Brno, 28 de abril de 1906 - Princeton, 14 de janeiro de 1978)

A crise de fundamentos

► Kurt Friedrich Gödel (1906-1978)



A crise de fundamentos

- ▶ Kurt Gödel publicou em 1931, seus dois teoremas de incompletude:

A crise de fundamentos

- ▶ Kurt Gödel publicou em 1931, seus dois teoremas de incompletude:
- ▶ O primeiro teorema da incompletude afirma que, para qualquer sistema axiomático recursivo autoconsistente capaz de descrever a aritmética dos números naturais (os axiomas de Peano), há proposições construídas a partir da linguagem desse sistema que nem podem ser provadas verdadeiras e nem falsas a partir dos axiomas.

A crise de fundamentos

- ▶ Kurt Gödel publicou em 1931, seus dois teoremas de incompletude:
- ▶ O segundo teorema da incompletude afirma que, uma teoria, recursivamente enumerável e capaz de expressar verdades básicas da aritmética e alguns enunciados da teoria da prova, pode provar sua própria consistência se, e somente se, for inconsistente.

A crise de fundamentos

- Os Teoremas de Gödel expõe de forma cabal a existência de um “ignorabimus” intrínseco. Como se Deus mesmo tivesse colocado um limite intransponível aos Matemáticos, vedando-lhes o acesso à onisciência. Mostrando-nos enfim que “somos míopes porque somos finitos”!

Perguntas para refletir

- ▶ **Onde que eu estou?** Qual o ponto que a Matemática chegou? Como está a comunidade Matemática? Como os Matemáticos lidam com as questões fundamentais? Eles empurram para debaixo do tapete? Eles assimilam as limitações de sua própria Matemática em seu discurso e em sua práxis?

Perguntas para refletir

- ▶ **De onde que eu vim?** Como o fazer Matemático adquiriu o formato que conhecemos hoje? Como o conhecimento de História da Matemática pode nos levar a insights inclusive para resultados relevantes em nossa própria pesquisa matemática? Como “ler” de forma adequada a contribuição dos antepassados para formarmos uma visão mais abrangente da Matemática de nossos dias?

Perguntas para refletir

- **Para onde que eu vou?** Como identificar as tendências atuais da pesquisa Matemática? Como “apostar” nesse ou naquele problema? Qual será o que dará mais frutos no futuro? Como assimilar o avanço da Inteligência Artificial na pesquisa Matemática, sem sermos engolidos pela máquina, sem nos rendermos ao caminho mais fácil de terceirizarmos nossos pensamentos e nossas decisões e sem correremos o risco de ficarmos reféns do que não é humano?