

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIENCIAS FíSICAS E MATEMATICA

Felipe Rosa Grams

UMA BREVE INTRODUÇÃO:

TEORIA DE ATRATORES

FLORIANÓPOLIS

2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIENCIAS FíSICAS E MATEMATICA

Felipe Rosa Grams

UMA BREVE INTRODUÇÃO:

TEORIA DE ATRATORES

Trabalho da graduação apresentado na disciplina MTM7305-05222 (20261) - História da Matemática.

FLORIANÓPOLIS

2026

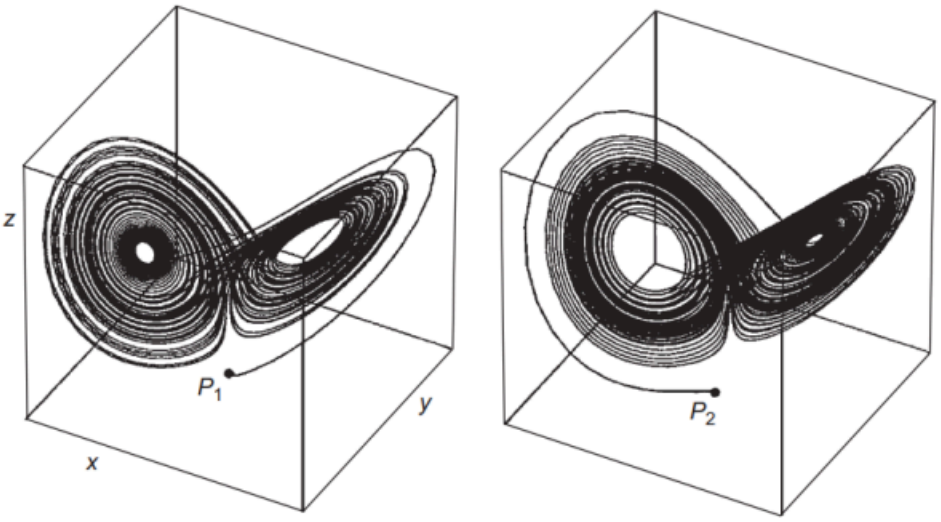
SUMÁRIO

SUMÁRIO..... 3
1 INTRODUÇÃO..... 4
2 ALGUNS NOMES DE DESTAQUE..... 5
3 O QUE É UM ATRATOR?..... 7
4 APLICAÇÕES NO PRESENTE E O QUE O FUTURO RESERVA..... 9
6 CONCLUSÃO..... 10
Referências..... 10

1 INTRODUÇÃO

Diversos fenômenos podem ser descritos e estudados por leis matemáticas que determinam sua evolução ao longo do tempo. Desde o movimento dos planetas, propagação de doenças, mudanças climáticas e até mesmo o funcionamento do cérebro, são alguns exemplos de fenômenos que compreendemos como um sistema dinâmico, isto é, um sistema nos quais um estado presente influencia os estados futuros. Entretanto, apenas conhecer as equações que descrevem um sistema nem sempre é suficiente para prever seu comportamento futuro de maneira satisfatória.

Uma pergunta fundamental nesses sistemas é: o que acontece ao longo e após muito tempo? Diante da dificuldade em responder esse questionamento, a matemática desenvolveu uma abordagem diferente: em vez de tentar acompanhar cada instante da evolução de um sistema, busca-se compreender seu comportamento de longo prazo. É nesse contexto que surge o conceito de **atrator**, uma das ideias mais importantes da teoria moderna dos sistemas dinâmicos.



Fonte: [Oliveira., 2025, Figura 1:Atrator de Lorenz]

De forma intuitiva, um atrator representa um conjunto de estados para os quais um sistema tende a evoluir após um longo período de tempo. Embora trajetórias individuais possam apresentar comportamentos extremamente complexos, muitas vezes existe uma

estrutura geométrica subjacente que organiza essa dinâmica. A teoria dos atratores busca justamente identificar e compreender essas estruturas. Frequentemente associada à teoria do caos, a noção de atrator possui um alcance muito maior. Ela aparece em diversas áreas da matemática pura e aplicada, da física à biologia, da engenharia à neurociência, constituindo atualmente uma das ferramentas mais importantes para o estudo de sistemas complexos.

A partir das décadas de 1960 e 1970, a teoria passou por uma rápida expansão, incorporando contribuições da topologia, da geometria diferencial, da teoria ergódica e da análise funcional. O conceito de atrator tornou-se então uma ferramenta central para compreender a evolução de sistemas tanto finitos quanto infinitodimensionais.

2 ALGUNS NOMES DE DESTAQUE

As origens da teoria dos atratores estão ligadas ao desenvolvimento das equações diferenciais no século XIX. Segundo Laureano e Ferreira (2022) a concepção geral era de que o Universo funcionava como um "relógio" e que, ao combinar a Matemática com a Lógica, era possível obter a exata descrição do mundo ao nosso redor. Essa visão idealizava um Universo com comportamento previsível, descrito analiticamente pelas ferramentas a partir de um conjunto de condições iniciais. Muitos matemáticos buscavam encontrar soluções explícitas para os problemas relacionados a essas equações, porém, muitos sistemas se mostraram mais trabalhosos do que os métodos analíticos tradicionais permitiam resolver. É no fim do século XIX que o matemático Henri Poincaré (1854-1912) apresentou uma abordagem qualitativa na resolução do problema dos três corpos, explorando o comportamento das soluções. Tal estudo apresentou resultados tanto quanto à situação de estabilidade e instabilidade do sistema, tornando-o embrião da área de Sistemas Dinâmicos e da Teoria do Caos.

Outro nome de destaque é o do matemático e meteorologista Edward Norton Lorenz (1917-2008). Em 1963 Lorenz formulou um sistema de três equações diferenciais não-lineares enquanto realizava seu estudo sobre o clima. Ao computar o sistema, Lorenz acabou por fornecer evidência necessária para validar as intuições qualitativas de Poincaré para a comunidade científica (Laureano; Ferreira, 2022). A imagem gerada por esse sistema se tornou um dos ícones não apenas da matemática, mas da ciência moderna: O chamado Atrator de Lorenz, formalmente categorizado como um atrator estranho, lembrando as asas de

uma borboleta. Focando seus estudos em sistemas caóticos, Lorenz apresentou em 1979, em seu artigo “Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas” o que conhecemos hoje como efeito borboleta, segundo Strogatz (2003) essa ideia demonstrou que, em sistemas caóticos, mesmo as pequenas perturbações crescem exponencialmente rápido, o que torna impossível qualquer previsão a longo prazo.

O matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) é responsável pela consolidação teórica dos sistemas dinâmicos e da estabilidade de atratores. Em 1892, publicou *"O Problema Geral da Estabilidade do Movimento"*, introduziu uma abordagem rigorosa para determinar se um sistema retornaria ao seu estado original após uma perturbação, Lyapunov fundamentou conceitos como a **e**stabilidade de Lyapunov e os expoentes de Lyapunov (Milnor, 1985).

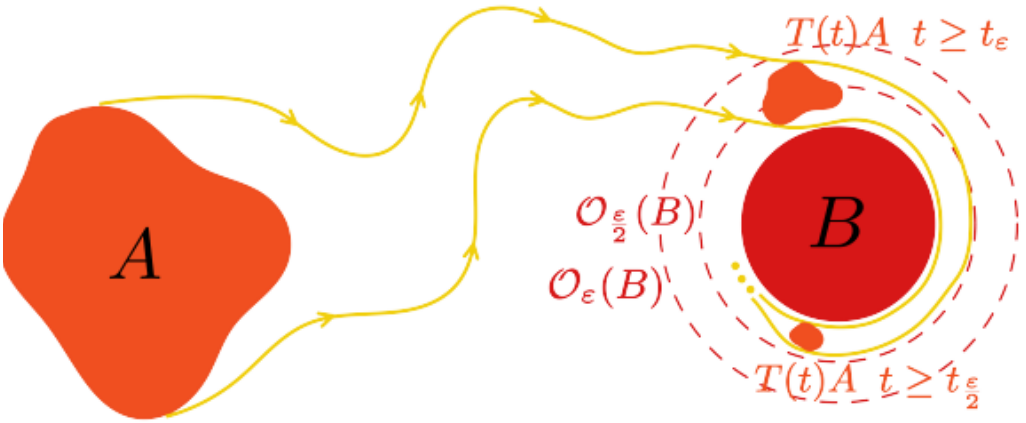
Stephen Smale (nascido em 1930) é um dos nomes fundamentais ao falarmos na área. Smale foi um dos que demonstrou que nos chamados de sistemas Morse-Smale, caso sofram uma pequena perturbação, suas propriedades qualitativas e a configuração de suas trajetórias permanecem as mesmas. Essa "imunidade" a pequenas variações garante que imprecisões nos parâmetros de um modelo não invalidam as previsões sobre o destino final do sistema (Hale, 2010).

Nomes como David Ruelle (nascido em 1935) e Floris Takens (1940–2010) são fundamentais para a formulação da teoria como a conhecemos hoje. Segundo Milnor(1985) foi em 1971 que Ruelle e Takens produziram um trabalho sobre a natureza da turbulência, onde sugeriram que o comportamento turbulento em fluidos poderia ser causado pela presença de atratores “estranhos”. Este trabalho acabou por cunhar e definir o que seria um atrator estranho, bem como foi responsável por definir.

Por fim, não seria justo dar continuidade no texto sem falar em Jack Kenneth Hale (1928-2009). Suas pesquisas foram fundamentais na formalização matemática rigorosa do estudo de atratores em sistemas de dimensão infinita. Suas contribuições são fundamentais no estudo de atratores globais, provando muito além da existência e estabilidade desses atratores, que se transmite para diversas aplicações, como modelos biológicos. Em 1988, publicou o livro *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems,* referência no estudo de atratores globais.

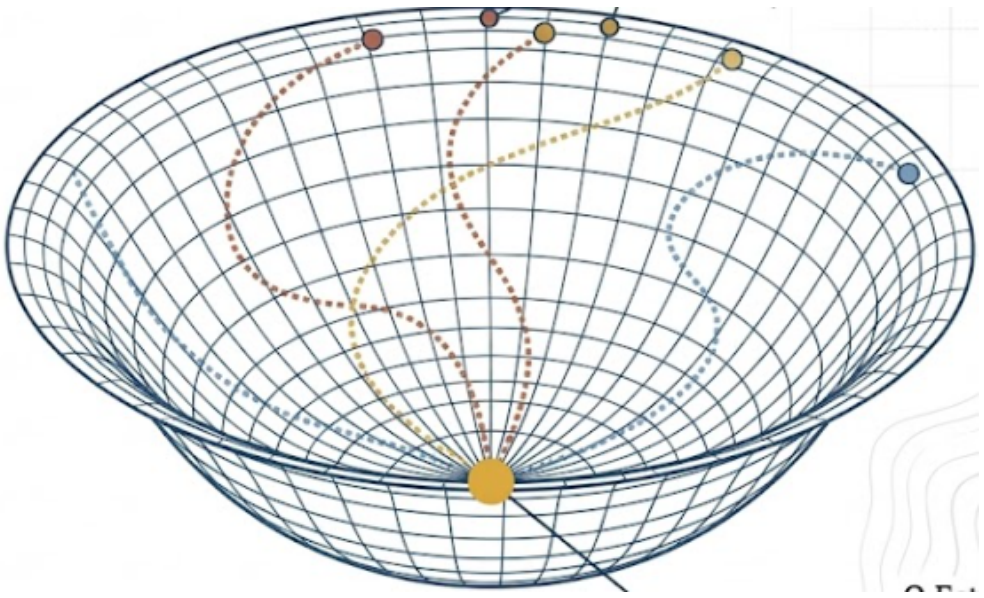
3 O QUE É UM ATRATOR?

Matematicamente, um atrator é um conjunto que permanece inalterado pela dinâmica do sistema e que atrai uma região de estados próximos.De maneira intuitiva, um atrator é uma região do espaço de possibilidades para a qual o comportamento de um sistema tende a se aproximar com o passar do tempo.



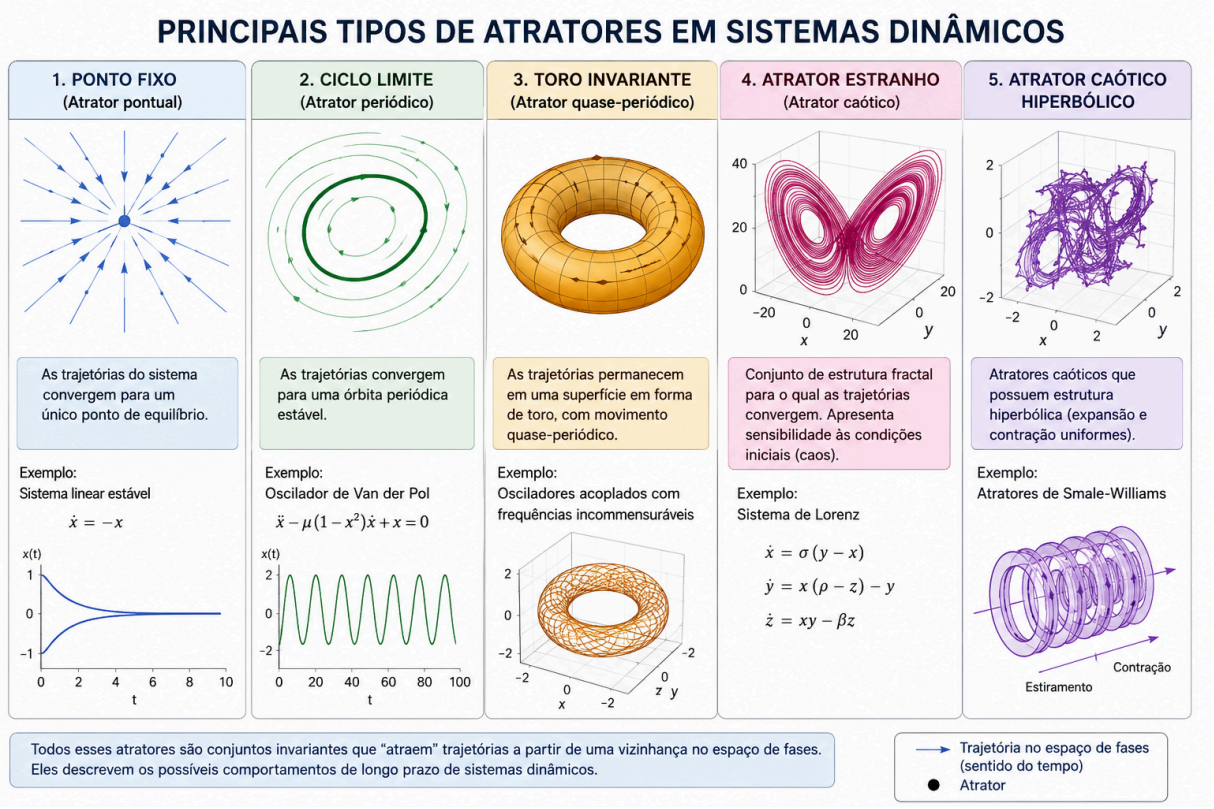
Fonte: [Oliveira., 2025, Figura 2:Atração]

Um exemplo simples é uma bola colocada dentro de uma tigela. Independentemente do ponto inicial em que a bola seja solta, ela se movimenta até alcançar o ponto mais baixo do recipiente. Nesse caso, o fundo da tigela funciona como um atrator: diferentes trajetórias conduzem ao mesmo estado final.



Fonte: [Elaborado com Gemini , Figura 3]

Entretanto, nem todos os atratores correspondem a um único ponto. Em muitos sistemas, o comportamento de longo prazo pode assumir formas mais complexas. Existem atratores periódicos, nos quais o sistema repete continuamente um ciclo de estados, como ocorre no movimento de um oscilador ou em certos ritmos biológicos. Há também atratores quase-periódicos, associados a movimentos que combinam diferentes frequências sem nunca se repetirem exatamente. Mais surpreendentes ainda são os chamados atratores estranhos, característicos dos sistemas caóticos. Neles, as trajetórias permanecem confinadas a uma determinada região do espaço de estados, mas nunca se repetem de forma idêntica, produzindo padrões complexos e aparentemente imprevisíveis.



Fonte: [Elaborado com Gemini , Figura 4]

A importância dos atratores está justamente no fato de que eles permitem compreender o comportamento global de sistemas complexos sem a necessidade de acompanhar cada detalhe de sua evolução. Em vez de analisar infinitas trajetórias individuais, os pesquisadores podem investigar quais estruturas organizam a dinâmica e quais comportamentos são possíveis em longo prazo.

4 APLICAÇÕES NO PRESENTE E O QUE O FUTURO RESERVA

Na Física, a teoria é fundamental para descrever desde o comportamento de partículas subatômicas até fenômenos complexos como a transição do fluxo laminar para a turbulência caótica. Na Biologia e na Medicina, ela permite prever a propagação de doenças infecciosas por meio de modelos epidemiológicos, como o S.I.R., além de compreender a dinâmica populacional em sistemas como o de Lotka–Volterra, o famoso modelo Predador-Presa, e analisar processos farmacocinéticos relacionados à absorção e eliminação de medicamentos pelo organismo. Na Engenharia, os atratores são aplicados ao desenvolvimento de sistemas de controle para robôs e veículos autônomos, à análise de vibrações estruturais e ao estudo da estabilidade de circuitos elétricos complexos. Já na Economia e nas Ciências Sociais, modelos dinâmicos, como o de Solow, utilizam esses conceitos para investigar o crescimento econômico, a evolução do capital e as oscilações dos mercados financeiros ao longo do tempo.

A ampla repercussão da teoria de atratores contribuiu para uma mudança profunda na visão científica do mundo. Em vez de enxergar o universo como um sistema completamente previsível, a ciência moderna passou a reconhecer a existência de padrões e formas de ordem que emergem espontaneamente em meio à complexidade. Essa mudança de perspectiva orienta muitas das pesquisas atuais, que tendem a abandonar o estudo de sistemas isolados para concentrar-se em redes de larga escala, como o cérebro humano, a internet e os ecossistemas globais, caracterizados por milhões de interações simultâneas.

Nesse contexto, algumas das principais direções de desenvolvimento da área incluem o estudo de sistemas não-autônomos e aleatórios, nos quais a dinâmica é influenciada por fatores externos e por incertezas ambientais. Essa linha de pesquisa tem impulsionado a criação de teorias para atratores em sistemas impulsivos e para atratores aleatórios capazes de incorporar ruídos e perturbações do ambiente. Outra tendência importante é a integração com a Inteligência Artificial, especialmente por meio de redes neurais diferenciais e técnicas de

aprendizado de máquina, que permitem aproximar e analisar atratores em sistemas de altíssima dimensionalidade, superando limitações das abordagens analíticas tradicionais.

A teoria de atratores tornou-se uma das bases matemáticas mais importantes para a compreensão de sistemas dinâmicos complexos. Sua capacidade de identificar estruturas estáveis em sistemas complexos garante sua relevância não apenas para a compreensão dos fenômenos atuais, mas também para enfrentar os desafios de um futuro marcado pelo crescimento exponencial dos dados, das conexões e da complexidade dos sistemas estudados pela ciência.

6 CONCLUSÃO

A teoria dos atratores representa uma das mais importantes conquistas da matemática moderna. Fornecendo ferramentas para compreender o comportamento de longo prazo de sistemas dinâmicos, ela permite transformar problemas de grande complexidade em estruturas organizadas e analisáveis. Embora frequentemente associada à teoria do caos, sua importância transcende amplamente esse contexto.

Do Poincaré até os desenvolvimentos contemporâneos envolvendo atratores globais e sistemas de dimensão infinita, essa teoria continua expandindo. Em um mundo cada vez mais marcado pela complexidade, compreender os atratores significa compreender os mecanismos que organizam a dinâmica dos sistemas que nos cercam.

Referências

LAUREANO, Rosário; FERREIRA, Manuel Alberto M. Poincar\'e Work on Celestial Mechanics: Predictability versus Determinism in the Context of Restricted Three-Body Problem. **arXiv preprint arXiv:2212.12339**, 2022.

BONOTTO, Everaldo et al. A survey on impulsive dynamical systems. **Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations**, v. 2016, n. 7, p. 1-27, 2016.

CARVALHO, Alexandre N. Sistemas dinâmicos não-lineares SMA-5880.

STROGATZ, Steven. Sync: The emerging science of spontaneous order. 2004.

MILNOR, John. On the concept of attractor. **Communications in Mathematical Physics**, v. 99, n. 2, p. 177-195, 1985.

HALE, Jack K. **Asymptotic behavior of dissipative systems**. American Mathematical Soc., 2010.

OLIVEIRA, Eduardo Teixeira de. **Teoria de atratores, Teorema de Poincaré-Bendixson e aplicação ao modelo S.I.R.** 2025. 84 f. monografia – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2025.