UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA

KEVIN ALEXANDER MARON

Teorema das quatro cores e o uso de computadores em demonstrações Matemáticas.

FLORIANÓPOLIS
2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FíSICAS E MATEMÁTICA

Kevin Alexander Maron

Teorema das quatro cores, uso de computadores em demonstrações Matemáticas.

Trabalho da graduação apresentado na disciplina
MTM7305-05222 (20261) - História da Matemática.

FLORIANÓPOLIS
2026

SUMÁRIO……3
INTRODUÇÃO……...4
O PROBLEMA DAS QUATRO CORES: ORIGEM E FORMULAÇÃO……5
A BUSCA PELA PROVA……...8
A COMPUTAÇÃO COMO INSTRUMENTO……...13
LEAN: A NOVA FRONTEIRA DA VERIFICAÇÃO FORMAL……16
REFERÊNCIAS……25

Introdução

O século XIX representa um dos períodos mais férteis e turbulentos da história da matemática. Após séculos de desenvolvimento calcado predominantemente no rigor euclidiano e no florescimento do cálculo newtoniano-leibniziano, o século XIX assistiu a uma profunda reconfiguração dos fundamentos e dos horizontes da disciplina. A matemática deixava de ser apenas uma linguagem da natureza para tornar-se também um campo de investigação autônoma, capaz de produzir estruturas abstratas sem ancoragem direta na experiência física.

Nesse contexto, três movimentos intelectuais merecem destaque particular. O primeiro foi a consolidação do rigor analítico, impulsionado por matemáticos como Cauchy e Weierstrass, que sistematizaram os fundamentos do cálculo e introduziram definições precisas de limite, continuidade e convergência, conceitos que até então repousavam sobre intuições geométricas nem sempre confiáveis. O segundo foi o surgimento e a expansão da álgebra abstrata, com os trabalhos de Galois, Abel e Hamilton revelando que era possível estudar estruturas algébricas de forma completamente geral, independentemente de qualquer interpretação aritmética concreta. O terceiro e talvez o mais relevante para o presente trabalho foi o nascimento da topologia e da teoria dos grafos como campos rigorosos, inaugurando uma nova maneira de pensar sobre espaço, forma e conexão.

A topologia emergiu gradualmente da geometria, à medida que matemáticos perceberam que certas propriedades de figuras e superfícies independiam inteiramente de distâncias, dependendo apenas de relações como

vizinhança e continuidade. Paralelamente, a teoria dos grafos dava seus primeiros passos a partir do célebre trabalho de Euler sobre as Sete Pontes de Königsberg (1736), que demonstrou ser possível tratar questões sobre conectividade de forma puramente combinatória, abstraindo completamente a geometria subjacente. Ambos os campos, ainda jovens e sem fronteiras bem definidas entre si, criaram o solo intelectual exato do qual brotaria um dos problemas mais duradouros e desconcertantes da matemática moderna.

O Problema das Quatro Cores: Origem e Formulação

A história do problema das quatro cores começa de maneira notavelmente prosaica. Em 1852, Francis Guthrie, estudante de matemática em Londres que posteriormente se tornaria botânico na África do Sul, estava colorindo um mapa dos condados da Inglaterra. Tentando usar o menor número possível de cores de modo que condados compartilhando uma fronteira nunca recebessem a mesma cor, Guthrie observou que quatro cores pareciam sempre ser suficientes e se perguntou se essa propriedade valeria para qualquer mapa.

Incapaz de demonstrar a conjectura, Guthrie a comunicou a seu irmão Frederick, que por sua vez a submeteu ao matemático Augustus De Morgan, então professor na University College London. De Morgan reconheceu imediatamente tanto a simplicidade do enunciado quanto a dificuldade surpreendente de qualquer tentativa de prova, e passou a divulgar o problema entre seus correspondentes matemáticos. Em carta de outubro de 1852 ao lógico William Rowan Hamilton, De Morgan descreveu o problema com clareza e

admitiu não saber demonstrá-lo e Hamilton, igualmente, declinou de se debruçar sobre a questão, considerando-a fora de seu interesse.

O problema pode ser enunciado da seguinte forma: Dado qualquer mapa planar simples podem ser coloridas com apenas quatro cores, de tal maneira que quaisquer regiões adjacentes tenham cores diferentes.

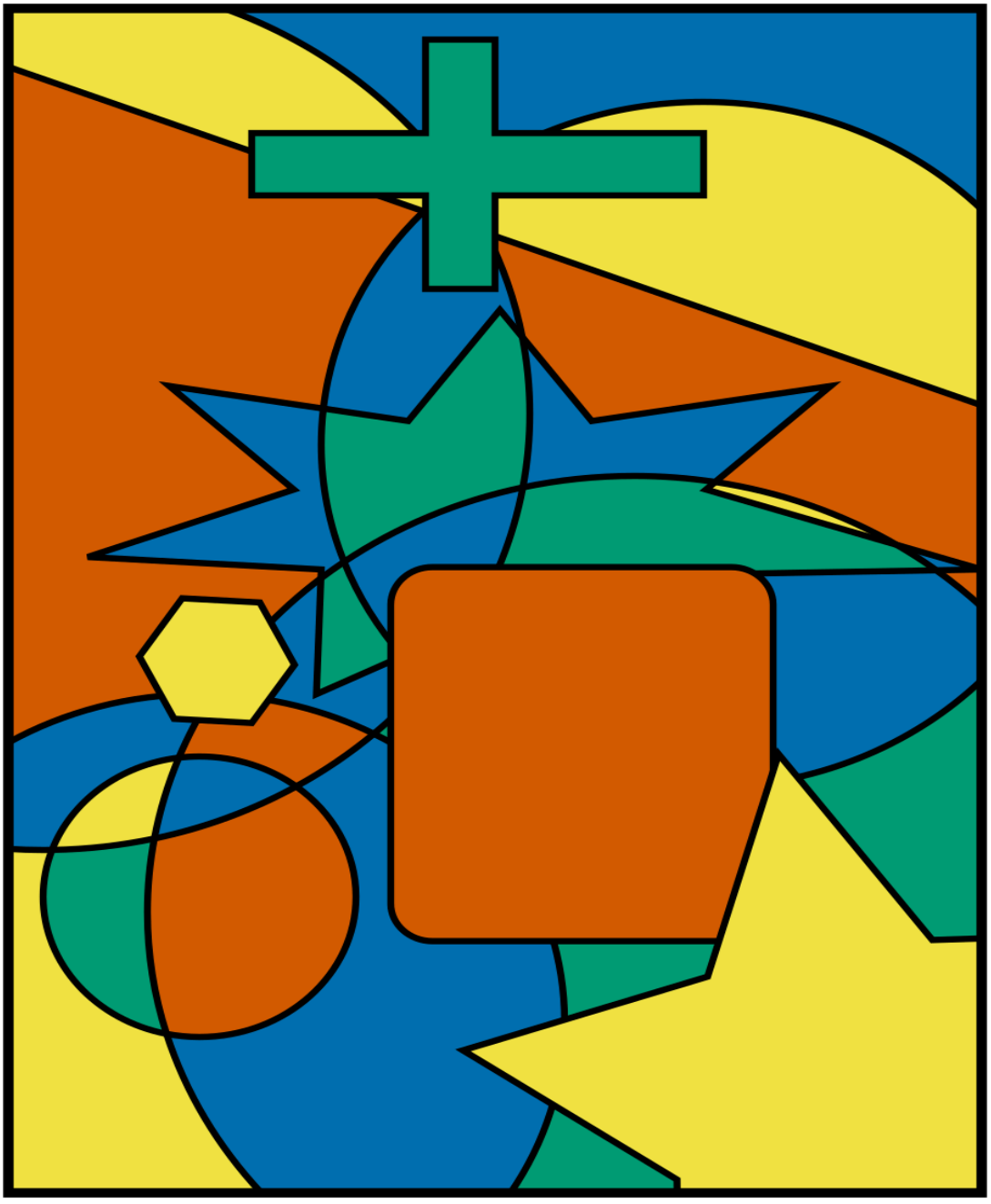


Figura 1 - Exemplo de um mapa que segue o teorema[1]

[1] Figura disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem#/media/File:Four_Colour_Map_Example.svg

Regiões que se tocam apenas em um ponto isolado não são consideradas adjacentes para fins de coloração, isto é, para que duas regiões sejam consideradas adjacentes e exijam cores diferentes, elas devem compartilhar uma fronteira comum com comprimento diferente de zero.

A tradução do problema para a linguagem da teoria dos grafos, consolidada ao longo das décadas seguintes, tornou sua estrutura ainda mais transparente: a cada região associa-se um vértice, e a cada par de regiões adjacentes associa-se uma aresta entre os vértices correspondentes. Desta forma o mapa a seguir se transforma em um grafo:

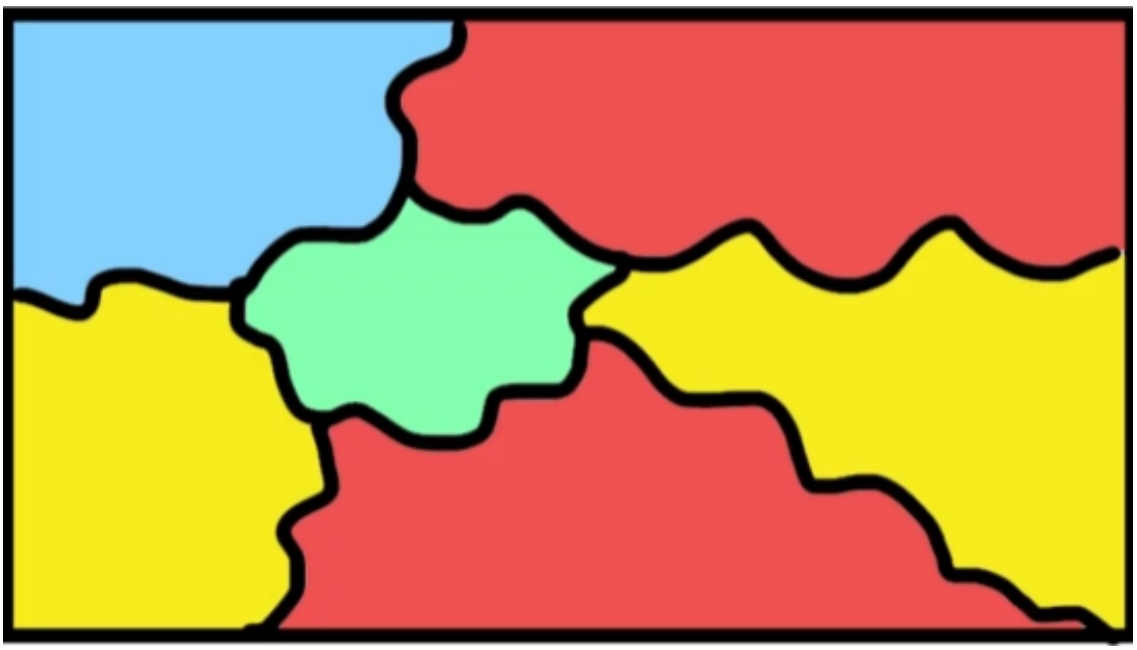
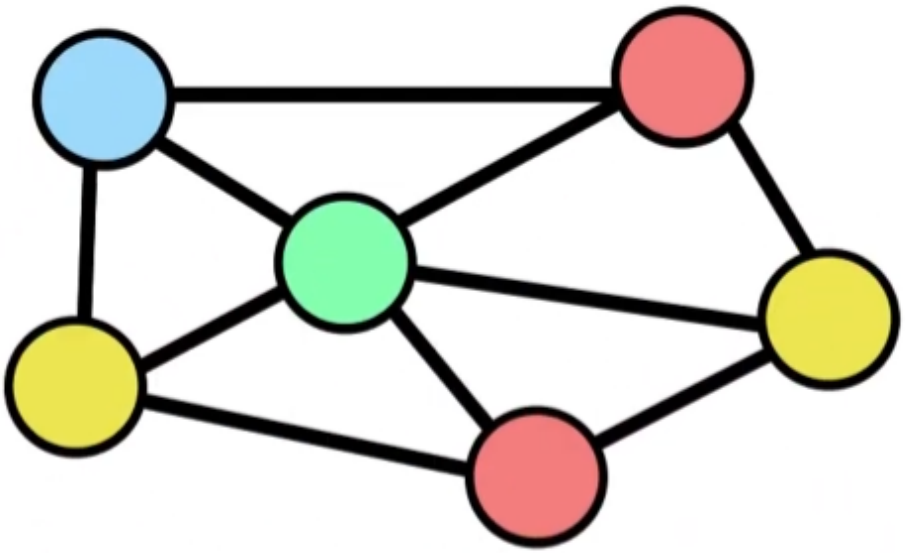


Figura 2



[2]

Figura 3

O problema das quatro cores torna-se então equivalente a demonstrar que todo grafo plano é 4-colorível isto é, que seus vértices podem ser coloridos com quatro cores de modo que vértices adjacentes nunca compartilhem a mesma cor. Essa reformulação não apenas clarificou o problema, mas abriu caminho para as ferramentas que, mais de um século depois, permitiriam sua resolução.

A Busca pela Prova: Entre Tentativas e Erros

- **A Primeira Tentativa: Alfred Kempe (1879)**

Durante quase três décadas após a formulação de De Morgan, o problema das quatro cores circulou entre matemáticos sem atrair uma tentativa de prova publicada e sistemática. Isso mudou em 1879, quando o advogado e matemático

[2] Figuras 2 e 3 disponíveis em: https://www.youtube.com/watch?v=siFuRrhb-cU

amador Alfred Bray Kempe apresentou, no American Journal of Mathematics, aquela que parecia ser a demonstração definitiva da conjectura. O trabalho foi recebido com entusiasmo: o próprio Arthur Cayley, um dos mais respeitados matemáticos britânicos da época, havia chamado atenção para o problema num artigo de 1878, e a prova de Kempe pareceu satisfazer a comunidade por completo. Kempe foi eleito membro da Royal Society em parte por conta desse resultado.

A estratégia de Kempe baseava-se numa técnica que ficaria conhecida como cadeias de Kempe. O argumento procedia por contradição: Suponha que existisse um mapa que não pudesse ser colorido com quatro cores, e tome o menor mapa com essa propriedade um contraexemplo mínimo. Kempe argumentou que qualquer mapa planar deve conter pelo menos uma região com cinco ou menos vizinhos, o que é uma consequência direta da fórmula de Euler para grafos planares. Ele então analisou separadamente os casos em que essa região tem dois, três, quatro ou cinco vizinhos, mostrando em cada caso que seria possível remover a região, recolorir o mapa reduzido com quatro cores por hipótese de minimalidade, e depois restaurar a região removida reaproveitando uma das quatro cores disponíveis. A ideia central era que, ao restaurar a região com cinco vizinhos, poderia ser necessário permutar as cores de certas cadeias alternadas de regiões para liberar uma cor disponível e Kempe argumentou que essas permutações sempre poderiam ser realizadas sem criar conflitos.

- **O Erro de Kempe: A Contribuição de Percy Heawood (1890)**

Em 1890, Percy John Heawood, um matemático britânico de 25 anos, publicou um artigo que identificou um erro na demonstração de Kempe. Para regiões com dois, três ou quatro vizinhos, a estratégia das cadeias de Kempe funciona. Mas no caso pentagonal, Kempe havia assumido implicitamente que duas operações de permutação de cadeias poderiam ser realizadas de forma independente, isto é, permutar as cores numa cadeia não interferiria na outra cadeia que também precisava ser permutada. Heawood construiu um contraexemplo explícito mostrando que essa independência não é garantida: as duas cadeias podem se entrelaçar de tal modo que permutar uma delas altera a outra, desfazendo o que havia sido corrigido e potencialmente criando um novo conflito de cores. O argumento de Kempe continha, portanto, uma lacuna lógica genuína e não um simples erro de cálculo o raciocínio fazia sentido, mas invalido logicamente.

Heawood, porém, não saiu de mãos vazias. Percebendo que a técnica de Kempe, apesar de insuficiente para quatro cores, ainda continha substância genuína, ele adaptou o argumento de forma mais cuidadosa e conseguiu demonstrar um resultado mais fraco: Todo mapa planar pode ser colorido com no máximo cinco cores.

A prova de Heawood para cinco cores funciona porque o argumento das cadeias de Kempe não precisa lidar com a situação problemática de duas permutações simultâneas: com cinco cores disponíveis, ao restaurar uma região com cinco vizinhos, basta garantir que haja pelo menos uma cor livre entre os

vizinhos, o que pode ser feito sem recorrer a duas permutações independentes ao mesmo tempo. O argumento é, portanto, suficientemente simples para evitar a armadilha que arruinou Kempe.

O Teorema das Cinco Cores permaneceria, por décadas, o resultado mais forte demonstrado sobre o problema.

- **O Meio-Século de Tentativas (1890–1950)**

Nos sessenta anos seguintes, o problema das quatro cores acumulou uma história de esforços frustrados. Diversas falsas provas foram publicadas e posteriormente refutadas, algumas chegando a sobreviver por anos antes de terem suas falhas identificadas, frequentemente repetindo variações do mesmo tipo de erro que Kempe havia cometido.

Nesse período, contudo, a matemática em torno do problema amadureceu consideravelmente. Dois conceitos provaram ser especialmente frutíferos. O primeiro foi o de configuração redutível. Diz-se que uma configuração é redutível quando se pode provar que ela não pode aparecer num contraexemplo mínimo para o teorema das quatro cores. O argumento é o seguinte: se uma configuração é redutível e aparece num mapa M, então existe um mapa menor M′ tal que qualquer 4-coloração de M′ pode ser estendida a uma 4-coloração de M. Portanto, se M fosse um contraexemplo mínimo, M′ seria um contraexemplo ainda menor, contradição. A ideia de Kempe era essencialmente a identificação de configurações redutíveis, e seu erro estava em supor que o caso pentagonal era uma delas quando não havia provado isso adequadamente.

O segundo conceito foi o de conjunto inevitável. Um conjunto de configurações é inevitável se todo mapa planar contém pelo menos uma configuração do conjunto. Kempe havia observado, a partir da fórmula de Euler, que o conjunto formado pelas regiões com dois, três, quatro e cinco vizinhos é inevitável. Todo mapa planar tem pelo menos uma região com no máximo cinco vizinhos. A estratégia geral de prova que se consolidou ao longo das décadas seguintes combinava esses dois ingredientes: encontrar um conjunto inevitável de configurações, todas elas redutíveis, provando assim que nenhum contra exemplo mínimo pode existir.

O desafio era que ninguém conseguia fechar o argumento: ou os conjuntos inevitáveis encontrados continham configurações não redutíveis, ou as configurações confirmadas como redutíveis não formavam um conjunto inevitável. A tensão entre esses dois requisitos revelou-se extraordinariamente difícil de resolver.

Nos anos 1940 e 1950, Heinrich Heesch, matemático alemão, desenvolveu métodos sistemáticos para testar a redutibilidade de configurações e aprofundou a teoria de forma decisiva. Heesch acreditava que a prova do teorema exigiria verificar um conjunto inevitável com talvez algumas centenas de configurações redutíveis um número impraticável para cálculo manual, mas que já imaginava como acessível para computadores, tecnologia que estava então em seus primórdios. Foi Heesch quem, décadas antes da prova definitiva, articulou com clareza que a solução do problema das quatro cores dependeria provavelmente de uma colaboração sem precedentes entre raciocínio matemático e poder computacional.

- **Appel, Haken e a Máquina (1976)**

Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, da Universidade de Illinois, anunciaram a prova completa do Teorema das Quatro Cores e com ela inauguraram uma nova era na história da matemática. A prova seguia a estratégia geral que vinha sendo desenvolvida há décadas, mas a realizou numa escala que tornava qualquer execução puramente humana absolutamente inviável.

Appel e Haken construíram, em colaboração com o programador John Koch, um conjunto inevitável de 1.936 configurações, todas verificadas como redutíveis. A verificação da redutibilidade de cada configuração exigia checar um número enorme de casos combinatórios para cada configuração, era necessário confirmar que toda possível coloração parcial de sua vizinhança poderia ser estendida a uma 4-coloração consistente após a remoção e reintrodução da configuração no mapa. Esse processo, realizado à mão, teria levado séculos de trabalho contínuo.

A solução foi recorrer a um computador IBM 360, que rodou por aproximadamente 1.200 horas de CPU ao longo de vários meses para completar a verificação. O código foi escrito, revisado e corrigido diversas vezes durante o processo, o próprio programa evoluiu à medida que os casos eram analisados, num diálogo contínuo entre os matemáticos e a máquina sem precedentes na história.

O algoritmo de verificação de redutibilidade implementado por Koch funcionava da seguinte maneira para cada configuração:

Primeiro, enumerava todas as colorações possíveis do anel da configuração. Para um anel de tamanho k, o número de 4-colorações próprias do anel, isto é, colorações em que vértices adjacentes no anel recebem cores distintas é calculável pela teoria de polinômios cromáticos, e embora seja menor que , permanece exponencialmente crescente com k.

Segundo, para cada coloração do anel, o algoritmo tentava encontrar uma extensão ao interior da configuração diretamente. Se uma extensão direta existia, a coloração do anel estava resolvida.

Terceiro, quando a extensão direta não existia, o algoritmo tentava realizar permutações de cadeias de Kempe nas cores do anel (trocando as cores ao longo de caminhos alternados) para transformar a coloração do anel numa coloração para a qual a extensão ao interior fosse possível. O algoritmo explorava as permutações disponíveis até encontrar uma que funcionasse ou até esgotar todas as possibilidades.

Se para alguma coloração do anel nenhuma extensão fosse possível após todas as permutações disponíveis, a configuração não era redutível, e os matemáticos precisavam revisar as regras de descarga. Se todas as colorações do anel pudessem ser resolvidas, a configuração era confirmada como redutível e incorporada ao conjunto.

- **A Computação como Instrumento de Demonstração Matemática**

A prova de Appel e Haken não foi um episódio isolado, foi o início de uma transformação na relação entre matemática e computação. Nas décadas

seguintes, o papel do computador nas demonstrações matemáticas expandiu-se em duas direções distintas. De um lado, computadores continuaram sendo usados para verificar casos em quantidade inacessível ao cálculo humano, refinando e generalizando a abordagem inaugurada em 1976. De outro, surgiu uma linha de pesquisa inteiramente nova: a de sistemas capazes não apenas de calcular, mas de raciocinar formalmente verificando cada passo lógico de uma demonstração com o mesmo rigor com que um compilador verifica a sintaxe de um programa.

- **1990 — A Conjectura de Kepler e o Empacotamento de Esferas**

Em 1611, Johannes Kepler afirmou que a maneira mais eficiente de empacotar esferas de mesmo tamanho no espaço tridimensional é a disposição conhecida como empacotamento cúbico de face centrada, a mesma usada intuitivamente por feirantes ao empilhar laranjas numa pirâmide. Kepler não demonstrou esse fato; ele o conjecturou com base em argumentos geométricos plausíveis. A afirmação permaneceu sem prova por quase quatro séculos, resistindo a ataques de matemáticos como Gauss, que resolveu o caso bidimensional em 1831 mas não conseguiu generalizar para três dimensões.

O problema é difícil porque envolve otimização sobre um espaço de configurações infinito e contínuo: é necessário demonstrar que nenhuma disposição possível de esferas nem as regulares, nem as irregulares, nem as parcialmente periódicas, supera a densidade de $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 74{,}05\%$ atingida pelo empacotamento de Kepler. Argumentos puramente analíticos haviam reduzido o problema a verificar certas desigualdades sobre configurações locais de esferas, mas o número de configurações locais relevantes era enorme.

Em 1998, Thomas Hales, da Universidade de Pittsburgh, anunciou uma prova completa da Conjectura de Kepler. A estratégia de Hales, desenvolvida com seu estudante Samuel Ferguson, foi reduzir o problema a uma coleção de cerca de 150.000 casos lineares de programação, cada um correspondendo a uma configuração local possível de esferas, e verificar por computador que em nenhum desses casos a densidade superava o limite de Kepler. O código envolveu aproximadamente 40.000 linhas distribuídas entre as linguagens C e Java, e a execução levou vários meses em múltiplos processadores.

A prova foi submetida ao Annals of Mathematics e passou por um processo de revisão por pares que durou quatro anos. Em 2003, os revisores concluíram algo incomum: estavam 99% certos da correção da prova, mas não podiam garantir a ausência de erros no código computacional. O artigo foi publicado com essa ressalva explícita, uma situação inusitada da história do periódico.

- **2000 — A Conjectura de Catalan e o Problema de Potências Consecutivas**

A Conjectura de Catalan, formulada pelo matemático belga Eugène Catalan em 1844, afirma que as únicas potências perfeitas consecutivas de inteiros positivos são $2^3 = 8$ e $3^2 = 9$, ou seja, a única solução inteira da equação

$$x^p - y^q = 1, \text{ x,y,p,q>1}$$

é (x,p,y,q)=(3,2,2,3). O problema pertence à teoria dos números, e sua dificuldade reside no caráter diofantino da equação: demonstrar que não existem outras soluções exige controlar simultaneamente os expoentes e as bases.

Durante a segunda metade do século XX, uma série de resultados parciais reduziu progressivamente o espaço de soluções possíveis. Robert Tijdeman provou em 1976 que os expoentes p e q numa eventual solução seriam necessariamente finitos, e trabalhos posteriores estabeleceram cotas explícitas cada vez menores. Em particular, descobriu-se que p e q seriam necessariamente primos, que p não poderia dividir q−1 nem q dividir p−1 simultaneamente.

Num passo crucial ocorrido em torno de 2000, os matemáticos passaram a combinar esses resultados teóricos com verificações computacionais sistemáticas para eliminar faixas de valores dos expoentes. Verificações por computador confirmaram que a conjectura era verdadeira para todos os valores de p e q até certas cotas, enquanto a teoria reduzia progressivamente o problema a um conjunto finito de casos residuais. Esse trabalho computacional foi essencial para motivar e direcionar os esforços teóricos subsequentes, identificando quais casos resistiam ao ataque analítico e precisavam de argumentos mais refinados.

A prova completa foi finalmente obtida em 2002 por Preda Mihailescu, matemático romeno trabalhando em Göttingen, inteiramente por métodos algébricos usando teoria de corpos ciclotômicos e unidades de Stickelberger, sem necessidade de computação na etapa final. A contribuição computacional, nesse caso, foi de natureza diferente daquela vista em Appel-Haken ou Hales: o computador não executou a prova, mas explorou o espaço do problema,

eliminando casos e apontando onde a teoria precisava ser aprofundada. A computação funcionou como telescópio não como o astrônomo, mas como o instrumento que ampliou o campo de visão até que o objeto de interesse ficasse suficientemente nítido para ser descrito em detalhe.

- **2010 — O Lema Fundamental e a Prova do Teorema Fundamental da Teoria dos Automorfismos**

Em 2009 e 2010, dois desenvolvimentos distintos ilustram a maturação do uso computacional em matemática pura de alto nível.

O primeiro foi a prova do Lema Fundamental da teoria das representações automórficas, formulado por Robert Langlands e Diana Shelstad nas décadas de 1970 e 1980 como parte do programa de Langlands, um conjunto de conjecturas que propõem conexões profundas entre teoria dos números, geometria algébrica e teoria das representações. O Lema Fundamental, apesar do nome modesto, era na verdade um resultado técnico central do qual dependiam numerosos outros teoremas do programa. Sua prova completa foi obtida por Ngô Bảo Châu em 2008, rendendo-lhe a Medalha Fields em 2010.

A prova de Ngô não foi computacional no sentido direto de Appel-Haken. O que é relevante aqui é que, no processo de verificação e refinamento do argumento, ferramentas computacionais de álgebra simbólica, em particular sistemas como Magma e SageMath, foram usadas extensivamente para calcular casos específicos de objetos geométricos, verificar identidades em álgebras de Hecke e confirmar que certas estruturas se comportavam conforme previsto pela teoria.

O segundo desenvolvimento de 2010 relevante para este trabalho foi a formalização em Coq, pelo grupo de Georges Gonthier no INRIA, de uma prova completa do Teorema das Quatro Cores o mesmo resultado de Appel e Haken, agora verificado passo a passo por um assistente de provas formal. Esse trabalho, iniciado em 2000 e concluído em 2005 mas cujos desdobramentos e influências se estenderam pela década seguinte, será discutido com mais detalhe adiante, pois representa uma ponte direta para o paradigma moderno dos assistentes de prova.

O que o período em torno de 2010 deixa evidente é que a computação havia deixado de ser uma ferramenta de exaustão, acionada quando os métodos tradicionais eram trabalhosos demais, para tornar-se parte do fluxo de trabalho cotidiano do matemático de pesquisa. Sistemas de álgebra computacional, verificadores de satisfatibilidade, programas de teoria dos números e assistentes de prova passaram a ser tão naturais no ambiente de pesquisa matemática quanto a lousa e o artigo impresso.

- **Lean: A Nova Fronteira da Verificação Formal**

Um assistente de provas formal é um sistema de software baseado numa teoria de tipos ou lógica formal que permite ao matemático escrever uma prova matemática como um programa de computador e ter cada passo lógico verificado mecanicamente. A diferença fundamental em relação ao uso computacional visto em Appel e Haken é de natureza: ali, o computador executava cálculos cujo resultado era tomado como evidência matemática. Aqui, o computador verifica a validade lógica de cada inferência na demonstração, ele não calcula o resultado,

ele certifica que cada passo segue rigorosamente dos anteriores segundo as regras da lógica formal subjacente.

Lean é um assistente de provas desenvolvido por Leonardo de Moura, originalmente na Microsoft Research, com a primeira versão lançada em 2013 e a versão atual, Lean 4, em desenvolvimento ativo desde 2021. Lean é baseado numa extensão do Cálculo das Construções, um sistema de teoria de tipos dependentes que permite expressar tanto objetos matemáticos quanto as proposições sobre eles dentro de uma única estrutura lógica. Isso significa que definições, enunciados e provas coexistem no mesmo ambiente, e a fronteira entre programar e demonstrar dissolve-se quase inteiramente.

O ecossistema matemático em torno do Lean é chamado de Mathlib, uma biblioteca colaborativa e em expansão contínua que contém formalizações de resultados de álgebra, análise, topologia, teoria dos números, geometria e diversas outras áreas. Em junho de 2026, a Mathlib contém mais de 200.000 teoremas formalizados, representando o maior repositório de matemática verificada formalmente da história. Contribuidores de dezenas de países adicionam resultados regularmente, e a biblioteca é continuamente integrada e verificada de forma automática.

Uma prova em Lean tem a seguinte estrutura geral: o matemático enuncia um teorema como uma proposição tipada, e em seguida fornece uma prova que é, um termo do tipo correspondente à proposição. O verificador de tipos do Lean confirma que o termo fornecido tem de fato o tipo declarado, o que equivale a confirmar que a prova é válida. Se houver qualquer lacuna lógica, qualquer passo

não justificado ou qualquer erro de definição, o sistema rejeita a prova com uma mensagem de erro precisa, apontando exatamente onde a falha ocorre.

Isso tem uma consequência notável: uma prova aceita pelo Lean é, dentro da teoria de tipos subjacente, absolutamente certa, não no sentido filosófico profundo de que o sistema lógico é consistente, o que nenhum sistema suficientemente expressivo pode garantir por si mesmo pelo Teorema da Incompletude de Gödel, mas no sentido prático de que nenhum erro lógico passou despercebido. A confiança na prova é transferida da confiança no raciocínio humano para a confiança no verificador de tipos, que é um programa muito mais simples e auditável do que qualquer demonstração matemática complexa.

Um dos exemplos mais ilustrativos do uso do Lean em matemática avançada é a formalização, dentro da Mathlib, do Teorema de Cauchy–Davenport, resultado clássico da teoria aditiva dos números que afirma o seguinte: para p primo e A, B subconjuntos não vazios de Z/pZ

$$|A + B| \geq min(p, |A| + |B| - 1)$$

onde $A + B$ = {a+b: a∈A, b∈B} denota a soma de Minkowski dos conjuntos.

Esse teorema possui uma prova que envolve um argumento de indução cuidadoso sobre o tamanho dos conjuntos, com múltiplos casos e um uso sutil da estrutura de corpo de Z/pZ. A formalização em Lean exigiu não apenas traduzir a prova usual para a linguagem do sistema, mas também construir formalmente

toda a infraestrutura necessária: a definição de soma de conjuntos em grupos abelianos, propriedades de cardinalidade de conjuntos finitos, e resultados auxiliares sobre aritmética modular. Ao fazê-lo, os formalizadores identificaram pontos da prova usual que eram deixados implícitos na literatura, que exigiram esforços consideráveis para que fossem totalmente justificados no ambiente computacional.

O exemplo mais dramaticamente revelador do potencial do Lean em matemática de fronteira é o **Liquid Tensor Experiment**, iniciado em dezembro de 2020 por Peter Scholze, ganhador da Medalha Fields em 2018.

Scholze e Dustin Clausen haviam desenvolvido uma teoria nova e tecnicamente densa chamada Matemática Condensada, que busca reformular os fundamentos da geometria analítica p-ádica e da topologia algébrica sobre corpos valuados em bases mais sólidas do que as construções tradicionais. No centro dessa teoria estava um teorema técnico fundamental, referido por Scholze como o "Teorema 9.4" cuja prova era longa, intrincada, e envolvia uma combinação de álgebra homológica, teoria das categorias e análise funcional em níveis de abstração muito elevados.

Scholze fez algo incomum: publicamente declarou que, embora ele e Clausen acreditassem que o resultado era verdadeiro e a prova correta, a demonstração era suficientemente complexa que ele não estava absolutamente certo de que não havia um erro sutil em algum ponto. Em suas próprias palavras, o resultado era o que ele mais queria ver verificado formalmente em toda a

matemática. Ele lançou isso como um desafio público à comunidade de formalização.

A comunidade do Lean respondeu. Uma equipe liderada por Johan Commelin, com contribuições de dezenas de colaboradores ao redor do mundo, iniciou a formalização do resultado dentro do Lean 4 com a biblioteca Mathlib. O projeto exigiu construir formalmente estruturas matemáticas que não existiam na Mathlib, incluindo categorias derivadas de certos módulos, funcionais lineares sobre espaços de medidas e construções de álgebra homológica de alta sofisticação. Em junho de 2022, menos de dezoito meses após o início do projeto, a formalização foi concluída: o Lean verificou o Teorema 9.4 de Clausen–Scholze em todos os seus detalhes lógicos.

A reação de Scholze foi direta e reveladora. Ele declarou publicamente que o resultado o havia convencido de que a formalização de matemática avançada em assistentes de prova havia atingido um nível de maturidade genuíno, que não se tratava mais de um projeto de demonstração de princípio aplicado a teoremas elementares, mas de uma ferramenta capaz de operar na fronteira da pesquisa matemática contemporânea. O processo de formalização também revelou um ponto da prova original onde o argumento era mais delicado do que havia parecido inicialmente, exigindo uma justificativa adicional que foi incorporada à versão formalizada.

Outro exemplo que mostra a adoção crescente do Lean por matemáticos de alto nível é o do próprio Terence Tao, ganhador da Medalha Fields e amplamente considerado um dos maiores matemáticos vivos. Em seu canal no

YouTube, Tao publica vídeos demonstrando o processo de formalização de provas em Lean 4, frequentemente combinando a ferramenta com assistentes de IA. Em um desses vídeos, publicado em maio de 2025, ele relata ter formalizado em Lean uma prova de uma página fornecida por um colaborador do Equational Theories Project em apenas 33 minutos foi capaz de realizar a formalização quase que cegamente, sem compreender em alto nível como a prova procedia. Mais recentemente, um vídeo de março de 2026 registra Tao usando Claude Code para formalizar provas em Lean, decompondo o trabalho em subtarefas e alternando entre passos manuais e automáticos. O fato de que um matemático Tao dedica tempo público a demonstrar e explorar essas ferramentas é, por si só, um sinal significativo do papel que a verificação formal tende a ocupar na matemática das próximas décadas.

- REFERÊNCIAS

APPEL, Kenneth; HAKEN, Wolfgang. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. Illinois Journal of Mathematics, v. 21, n. 3, p. 429-490, 1977.

APPEL, Kenneth; HAKEN, Wolfgang; KOCH, John. Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility. Illinois Journal of Mathematics, v. 21, n. 3, p. 491-567, 1977.

BIRKHOFF, George D. The reducibility of maps. American Journal of Mathematics, v. 35, n. 2, p. 115-128, 1913.

BONDECKA-KRZYKOWSKA, Izabela. The four-color theorem and its consequences for the philosophy of mathematics. Annales UMCS Informatica, Lublin, v. AI 2, p. 5-14, 2004.

GONTHIER, Georges. Formal Proof—The Four-Color Theorem. Notices of the American Mathematical Society, v. 55, n. 11, p. 1382-1393, 2008.

HEAWOOD, Percy J. Map-colour theorem. Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, v. 24, p. 332-338, 1890.

KEMPE, Alfred B. On the geographical problem of the four colours. American Journal of Mathematics, v. 2, n. 3, p. 193-200, 1879.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. The four colour theorem. MacTutor History of Mathematics. University of St Andrews, 1996.

SEYMOUR, Paul; THOMAS, Robin. The four-colour theorem. Journal of Combinatorial Theory, Series B, v. 70, n. 1, p. 2-44, 1997.

RUFENER, Casey M. The Four-Color Theorem Solved, Again: Extending the Extended Mind to the Philosophy of Mathematics. International Journal of Undergraduate Research and Creative Activities, v. 3, n. 2, art. 17, 2011.

TYMOCZKO, Thomas. The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance.

The Journal of Philosophy, v. 76, n. 2, p. 57-83, 1979.

WILSON, Robin J. Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved. Princeton: Princeton University Press, 2002.