



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA

Mateus de Souza Pereira

Teoria do matching

Florianópolis
2026

Mateus de Souza Pereira

Teoria do matching

Trabalho da graduação apresentado na disciplina
MTM7305-05222 (20261) - História da Matemática.

Florianópolis
2026

Sumário

1	Introdução	4
2	A origem matemática: O problema do casamento estável.....	5
3	De Shapley a Roth: da teoria pura à prática.....	6
4	As ideias matemáticas por trás do resultado	7
	4.1 Estabilidade e o núcleo.....	7
	4.2 A estrutura de reticulado dos emparelhamentos estáveis.....	7
	4.3 O emparelhamento egalitário.....	8
6	Conclusão	9
	Referências.....	9

1. Introdução:

Imagine um mercado em que comprar e vender com dinheiro é proibido. É exatamente essa a situação em três contextos muito reais: a alocação de médicos recém-formados a hospitais, a matrícula de crianças em escolas públicas e, mais dramaticamente, a doação de órgãos entre pessoas vivas. Em todos esses casos, não existe um preço que equilibra oferta e demanda, existem apenas preferências, prioridades e a necessidade de encontrar arranjos que sejam, ao mesmo tempo, eficientes e estáveis. Resolver esse tipo de problema é o objeto de um dos ramos mais bem-sucedidos da matemática aplicada das últimas décadas: a teoria do matching (ou teoria do emparelhamento), parte da teoria dos jogos cooperativa e hoje também um pilar do campo conhecido como market design (desenho de mercados).

Este ensaio percorre a trajetória dessa ideia: nasce como um teorema elegante e quase recreativo em 1962, atravessa décadas de desenvolvimento teórico e, já nos anos 1990 e 2000, se transforma em ferramenta concreta usada por governos, hospitais e sistemas de saúde ao redor do mundo um percurso reconhecido com o Prêmio Nobel de Ciências Econômicas de 2012, concedido a Alvin Roth e Lloyd Shapley.

Vale situar esse percurso dentro da história mais ampla da teoria dos jogos. O campo nasce formalmente em 1944, com o livro *Theory of Games and Economic Behavior*, de John von Neumann e Oskar Morgenstern, e ganha um novo capítulo decisivo na década seguinte com os equilíbrios de John Nash. Esses marcos, no entanto, pertencem à primeira metade do século XX. A teoria do matching representa algo diferente: é um exemplo de como, já na segunda metade do século e início do XXI, a teoria dos jogos deixou de ser apenas uma linguagem para descrever conflitos e decisões e passou a ser, ela mesma, uma ferramenta de engenharia social usada deliberadamente para projetar instituições e mercados que funcionem melhor. Esse deslocamento, de uma matemática descritiva para uma matemática construtiva e normativa, é um dos traços mais característicos da matemática aplicada contemporânea.

2. A origem matemática: O problema do casamento estável:

A história começa em 1962, quando os matemáticos David Gale e Lloyd Shapley publicaram o artigo "College Admissions and the Stability of Marriage" no American Mathematical Monthly. A pergunta que os dois colocaram era, à primeira vista, simples: dado um grupo de homens e um grupo de mulheres, cada qual com uma lista de preferências sobre o grupo oposto, é sempre possível formar casais de modo que não existam dois indivíduos em casais diferentes que prefeririam ficar um com o outro a permanecer com seus respectivos parceiros atuais? Um arranjo livre desse tipo de "tentação mútua" é chamado de emparelhamento estável.

Gale e Shapley não apenas provaram que um emparelhamento estável sempre existe, como também construíram um algoritmo simples e construtivo para encontrá-lo: o algoritmo de aceitação diferida (deferred acceptance). Em termos informais, cada homem propõe à mulher do topo de sua lista; cada mulher recebe as propostas, mantém provisoriamente a que mais prefere e rejeita as demais; os rejeitados propõem à próxima opção de sua lista, e o processo se repete até que ninguém mais seja rejeitado. O resultado final é sempre um emparelhamento estável e, mais surpreendente ainda, é o melhor resultado estável possível para quem propõe.

O que torna esse resultado matematicamente elegante é que ele não depende de números, dinheiro ou utilidades cardinais apenas de ordens de preferência. Isso o conecta diretamente à teoria dos jogos cooperativa, desenvolvida décadas antes por John von Neumann e Oskar Morgenstern, mas com um enfoque distinto: em vez de perguntar qual é o melhor resultado para um jogador isolado, a teoria do matching pergunta qual arranjo é estável para o sistema como um todo.

Aqui no Brasil o SISU utiliza uma variação do algoritmo de aceitação diferida para arranjar os futuros estudantes do ensino superior para as faculdades do país todo.

3. De Shapley a Roth: da teoria pura à prática

Durante quase trinta anos, o resultado de Gale e Shapley permaneceu majoritariamente como um objeto de estudo teórico dentro da matemática e da economia. Foi o economista Alvin Roth quem, a partir do fim dos anos 1970 e ao longo das décadas de 1980, 1990 e 2000, percebeu que algoritmos de matching já estavam sendo usados, de forma intuitiva e sem fundamentação teórica explícita, em sistemas reais como o National Resident Matching Program (NRMP), responsável por alocar médicos recém-formados nos Estados Unidos a programas de residência desde a década de 1950.

Roth mostrou que o algoritmo então usado pelo NRMP era, essencialmente, uma variante do algoritmo de Gale-Shapley, e usou a teoria para diagnosticar falhas e propor correções nos sistemas existentes. Esse trabalho consolidou um novo campo, o market design, usando a teoria dos jogos como ferramenta central.

O exemplo mais marcante da aplicação dessas ideias talvez seja o dos programas de troca de rins (kidney exchange paired donation). Quando uma pessoa precisa de um transplante de rim e tem um familiar disposto a doar, mas incompatível, a solução matemática é encontrar outro par na mesma situação, de forma que o doador de um par seja compatível com o paciente do outro e vice-versa. Roth, em parceria com Tayfun Sönmez e Utku Unver, adaptou os algoritmos de matching para organizar essas trocas em larga escala, incluindo cadeias com vários pares simultâneos. Programas baseados nesse princípio operam hoje em diversos países e já viabilizaram milhares de transplantes que, de outra forma, não teriam ocorrido.

Outro caso amplamente estudado é o da matrícula em escolas públicas. Em 2003, Roth e colaboradores ajudaram a redesenhar o sistema de matrícula de Nova York, substituindo um mecanismo falho em que famílias tinham incentivo para mentir sobre suas preferências reais por uma versão do algoritmo de aceitação diferida, que é à prova de manipulação estratégica do lado das famílias. Sistemas semelhantes foram adotados em Boston e em diversas outras cidades.

Em 2012, a Real Academia Sueca de Ciências concedeu o Prêmio Nobel de Ciências Econômicas a Alvin Roth e Lloyd Shapley "pela teoria de alocações estáveis e pela prática do desenho de mercados". É notável que um prêmio de economia tenha reconhecido, em essência, um resultado de matemática combinatória pura de 1962 evidência de como ideias matemáticas aparentemente abstratas podem levar décadas para revelar seu impacto prático.

4. As ideias matemáticas por trás do resultado

4.1 Estabilidade e o núcleo:

O conceito central da teoria é o de emparelhamento estável. Formalmente, dado um conjunto de agentes dividido em dois grupos digamos, estudantes e escolas e dadas listas de preferências ordenadas para cada agente, um emparelhamento é uma atribuição de cada estudante a uma escola (e vice-versa) de modo que nenhum par (estudante, escola) seja bloqueante: um par é bloqueante (blocking pair) quando o estudante prefere aquela escola à sua escola atual, e a escola também prefere aquele estudante ao estudante atualmente alocado. Um emparelhamento sem pares bloqueantes é chamado de estável.

Outro conceito importante é o núcleo (core) de um jogo. O núcleo é o conjunto de resultados em que nenhuma coalizão de jogadores teria incentivo para se desviar ou seja, nenhum subgrupo conseguiria ser um par bloqueante. Nos jogos de matching, o emparelhamento estável corresponde exatamente ao núcleo do jogo associado: nenhum par de agentes preferiria, simultaneamente, sair do arranjo proposto para formar um par alternativo. Isso implica que a estabilidade não é apenas uma propriedade combinatória local ela é uma condição global de equilíbrio cooperativo, com fundamento sólido na teoria dos jogos.

4.2 A estrutura de reticulado dos emparelhamentos estáveis

Uma descoberta notável, devida a Donald Knuth (que sistematizou muito do trabalho inicial de Gale e Shapley) e aprofundada por outros, é que o conjunto de todos os emparelhamentos estáveis possíveis para um dado problema não é apenas um conjunto qualquer: ele forma um reticulado (lattice). Usando a situação dos homens e mulheres e seus pretendentes, isso significa que, dados quaisquer dois emparelhamentos estáveis, é possível definir um "supremo" (o melhor para os homens entre os dois) e um "ínfimo" (o melhor para as mulheres entre os dois), e ambos são também emparelhamentos estáveis.

Essa estrutura explica e formaliza uma assimetria fundamental do algoritmo de aceitação diferida: quando os homens propõem, o algoritmo converge para o emparelhamento ótimo para os homens aquele que ocupa o extremo máximo do reticulado do ponto de vista masculino e esse é simultaneamente o pior emparelhamento estável do ponto de vista

feminino. A situação se inverte quando as mulheres propõem. A estrutura de reticulado deixa evidente, portanto, que não existe um emparelhamento estável que seja simultaneamente o melhor para ambos os lados: os interesses dos dois grupos são sempre, em certa medida, opostos dentro do conjunto de soluções estáveis.

4.3 O emparelhamento egalitário

A assimetria intrínseca do algoritmo de Gale-Shapley motivou pesquisadores a buscar emparelhamentos estáveis que distribuíssem os benefícios de forma mais equilibrada entre os dois lados do mercado. Uma das respostas mais elegantes foi o emparelhamento egalitário (egalitarian matching), proposto por Irving, Leather e Gusfield em 1987. A ideia central é atribuir a cada agente um custo igual à posição do parceiro que lhe foi designado em sua lista de preferências se um estudante foi alocado à sua sétima opção, seu custo é 7. O custo total de um emparelhamento é então a soma dos custos de todos os agentes de ambos os lados. O emparelhamento egalitário é aquele que minimiza esse custo total dentro do conjunto de emparelhamentos estáveis, buscando, portanto, o arranjo em que a insatisfação agregada de toda a sociedade é a menor possível. O algoritmo que o encontra opera em tempo polinomial de ordem $O(n^2)$, percorrendo o reticulado de emparelhamentos estáveis por meio de estruturas chamadas rotações movimentos elementares que permitem transitar de um emparelhamento estável a outro alterando apenas um número mínimo de pares e é, portanto, computacionalmente viável mesmo para mercados de grande escala.

Do ponto de vista das aplicações práticas, o emparelhamento egalitário representa uma escolha de valor tanto quanto uma escolha matemática: ao minimizar o custo total, ele prioriza a redução do sofrimento agregado da sociedade, mesmo que isso implique alguma assimetria residual entre os dois lados. Em sistemas de alocação de vagas em escolas públicas, por exemplo, este critério tende a evitar situações em que uma minoria de estudantes fica com opções muito distantes de suas preferências, um problema frequente em mecanismos que otimizam apenas para um dos lados.

5. Conclusão:

Em 1962, dois matemáticos resolveram, com elegância e poucas páginas, um problema combinatório sobre casamentos. Cinco décadas depois, a mesma estrutura matemática organiza a alocação de médicos a hospitais, de crianças a escolas e, mais notavelmente, salva vidas ao viabilizar transplantes de órgãos que de outra forma seriam impossíveis. A trajetória da teoria do matching da pergunta abstrata de Gale e Shapley às aplicações concretas desenvolvidas por Alvin Roth é um exemplo particularmente claro de como a matemática contemporânea segue produzindo resultados cuja relevância plena só se revela com o tempo, e de como a fronteira entre matemática pura e matemática aplicada permanece, hoje como sempre, mais porosa do que parece.

Referências

GALE, D.; SHAPLEY, L. S. College Admissions and the Stability of Marriage. *American Mathematical Monthly*, v. 69, n. 1, p. 9-15, 1962.

ROTH, A. E. The Economist as Engineer: Game Theory, Experimentation, and Computation as Tools for Design Economics. *Econometrica*, v. 70, n. 4, p. 1341-1378, 2002.

ROTH, A. E. *Who Gets What — and Why: The New Economics of Matchmaking and Market Design*. Boston: Houghton Mifflin Harcourt, 2015.

ROTH, A. E.; SÖNMEZ, T.; ÜNVER, M. U. Kidney Exchange. *Quarterly Journal of Economics*, v. 119, n. 2, p. 457-488, 2004.

ROTH, A. E.; PERANSON, E. The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design. *American Economic Review*, v. 89, n. 4, p. 748-780, 1999.

Real Academia Sueca de Ciências. *Scientific Background: Stable Matching — Theory, Evidence, and Practical Design*. Estocolmo, 2012.