

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA

Gabriel Palacio Pilatti e SIlva

Prof. Eliezer Baptista

Uma introdução à Teoria de Tipos de Homotopia

Trabalho avaliativo parcial da disciplina de graduação MTM7305-05222 (2026.1) - História da Matemática.

Florianópolis
2026

Sumário

1. Introdução
2. A Transição de Paradigma: De Conjuntos para Tipos
3. A construção fundacional intuicionista de HoTT
    - 3.1. Introdução Axiomática de HoTT
    - 3.2. Os Construtores Universais: Tipos Dependentes Π e Σ
    - 3.3. A Geometria da Igualdade: Intensionalidade, Caminhos e Estruturas Derivadas
    - 3.4. Tipos Indutivos Superiores (HITs) e mais algumas construções topológicas
    - 3.5. O Dicionário Estrutural: Comparativo HoTT vs. ZFC
4. A Revolução dos Tipos Indutivos Superiores (HITs)
    - 4.1. Exemplo 1: O Tipo-Círculo (S^1)
    - 4.2. Exemplo 2: O Tipo-Toro (T^2)
    - 4.3. Exemplo 3: A Suspensão Topológica e Esferas Superiores ($susp(S^n)$)
5. HoTT no desenvolvimento da matemática e da física contemporânea
    - 5.1. Avanços na Matemática Pura: O Caso de Blakers-Massey
    - 5.2. O Grupo Fundamental do Círculo ($\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$)
    - 5.3. A Fronteira Física: Mecânica Quântica Homotópica (HQM) e o Colapso Contratível
    - 5.4. Teoria de Calibre Superior e *Anyons* na Computação Quântica
6. Discussão
7. Conclusão
8. Referências

1. Introdução

A matemática contemporânea tradicional é operada através da fundamentação, seja ela explícita ou implícita, da Teoria dos Conjuntos axiomática de Zermelo-Fraenkel (ZFC). Tal sistema fundante permite que os matemáticos possam tratar de espaços topológicos complexos, estruturas algébricas infinitas e as bases da análise funcional de forma estritamente rigorosa. Entretanto, na virada para o século XXI, o manuseio do formalismo conjuntista na construção de comandos computacionais para assistentes de provas virtuais (como Coq, Agda e Lean) revelou-se profundamente moroso e sintaticamente inadequado. Esta ineficiência é atestada pelas barreiras da codificação de equivalências analíticas independentes — a necessidade hercúlea de gerenciar manualmente relações de equivalência externas sobre tipos e quocientes (The Univalent Foundations Program, 2013; Coquand, 2014) — e pela intratabilidade algorítmica de fatiar e modelar objetos geométricos contínuos em poeiras estáticas de conjuntos vazios isolados.

Em paralelo às barreiras computacionais do ZFC, emergiu uma severa problemática sociológica e epistemológica: a análise analógica via revisão por pares (*peer-review*) humana tem-se tornado insuficiente para garantir a correção de teoremas frente ao nível colossal de complexidade e extensão das demonstrações da alta dimensionalidade atual. Foi precisamente no encontro desta crise de verificação com a necessidade de uma geometria computável que Vladimir Voevodsky, galardoado com a Medalha Fields, estruturou o programa das Fundações Univalentes (2013). Para edificar esta alternativa, o programa não partiu do zero, mas unificou duas grandes contribuições históricas prévias: primeiro, a base da Teoria Intuicionista de Tipos desenvolvida por Per Martin-Löf na década de 1970, que forneceu uma linguagem lógica construtiva onde as provas matemáticas são, elas próprias, algoritmos executáveis; segundo, a descoberta matemática independente de Steve Awodey e Michael Warren (2009), que evidenciaram que os "tipos de identidade intensionais" da lógica de Martin-Löf não eram meras abstrações estáticas, mas comportavam-se nativamente como grupoides da teoria de homotopia clássica.

A partir desta convergência, Voevodsky formulou o Axioma da Univalência, fundando formalmente a Teoria de Tipos de Homotopia (HoTT). Este sistema ergue-se como uma alternativa fundacional na qual a construção lógico-matemática de objetos algébricos e topológicos ocorre de forma nativa, fluida e direta para aplicação computacional, abdicando inteiramente da lógica axiomática clássica dos conjuntos e substituindo-a por uma geometria intrínseca e contínua de caminhos de identidade.

Neste artigo, examinaremos detalhadamente como se processa a transição paradigmática deste recente movimento (tanto na sua semântica ontológica quanto na sua sintaxe formal). Nas Seções 2 e 3, apresentarei o contraste conceitual em relação ao ZFC e a construção axiomática essencial da HoTT, derivando o catálogo fundacional que dita o comportamento dos espaços. Na Seção 4, abordarei a mecânica dos Tipos Indutivos Superiores (HITs), apresentando as construções básicas do Círculo, do Toro e da Suspensão para o campo da topologia algébrica. Na Seção 5, veremos como a linguagem univalente pode ser aplicável em provas de matemática avançada (Teorema de Blakers-Massey e Grupo Fundamental do Círculo) e na sua radical expansão para a física quântica (Mecânica Quântica Homotópica e tranças de quasipartículas em dimensões superiores).

Após isto, na Seção 6, aprofundaremos alguns tópicos de discussão a respeito do atrito cultural provocado por esta nova ferramenta, avaliando as suas exigências construtivistas e o seu impacto epistemológico através do princípio da perspicuidade de J. D. North. Por fim, concluímos o artigo com uma reflexão sobre o futuro do pluralismo na atividade matemática, delineando a consolidação da HoTT não como um substituto coercivo, mas como a linguagem rigorosa e possivelmente incontornável de verificação para a qual os pesquisadores na fronteira da investigação terão inevitavelmente de lidar.

2. A Transição de Paradigma: De Conjuntos para Tipos

Na matemática clássica subjacente ao sistema ZFC, o conceito primitivo fundamental é o de *conjunto*, sendo a relação de pertinência ($\in$) a operação primitiva que permite relacionar os conjuntos e construí-los sintaticamente. Esta ferramenta fundacional, para além de oferecer uma justificação rigorosa às ferramentas essenciais do trabalho e investigação cotidianos, também forneceu ao matemático um raciocínio padrão para as suas intuições, dotado de um grau de fiabilidade maior (isto é, com menor probabilidade de gerar uma inconsistência) para as suas hipóteses e demonstrações.

Entretanto, como apontado por Daniel Grayson (2018, p. 427), essa abordagem reducionista frequentemente força o matemático a atribuir uma estrutura interna inteiramente arbitrária e irrelevante aos objetos no cotidiano da pesquisa — como exemplificado na clássica codificação de von Neumann, que define o número cardinal 2 como o conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Nesse formalismo conjuntista, qualquer objeto matemático complexo deve ser "fatiado" recursivamente em pontos isolados construídos sobre conjuntos vazios. Filosoficamente, Vladimir Voevodsky (2016) diagnosticou que a Teoria dos Conjuntos opera sob a abstração de que a realidade matemática se resume a meros agregados atômicos discretos, destituídos de qualquer propriedade geométrica contínua nativa.

Inversamente, na Teoria de Tipos de Martin-Löf, que serve de base para a Teoria de Tipos de Homotopia (HoTT), o conceito primitivo passa a ser o de *tipo* (A), e os objetos lógicos são *Termos* (a) pertencentes a esse tipo, validados sintaticamente pela assinatura de julgamento *a : A* (Homotopy, 2025). Sob a interpretação univalente de Voevodsky, abdica-se da necessidade de triturar as formas geométricas para encaixá-las em moldes discretos de conjuntos. Os Tipos de Homotopia atuam como noções indefiníveis e primitivas (Voevodsky, 2016), permitindo que estruturas contínuas e complexas — como o Tipo-Círculo (S^1) gerado simplesmente pelos construtores sintáticos base : S^1 e loop : base = base — existam como átomos conceituais indivisíveis, sem que seja necessário decompô-los em subconjuntos euclidianos ou sequências infinitas de números reais (*The Univalent Foundations Program*, 2013).

A grande revolução da HoTT reside na fusão isomórfica de três visões historicamente independentes em um único formalismo unificado: a visão lógica (*proposições como tipos*), a visão computacional (*provas como programas*) e a visão geométrica (*tipos como espaços topológicos*). Nesta semântica univalente, um tipo é tratado formalmente como um espaço topológico, enquanto os seus termos são pontos que habitam essa variedade contínua (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 59).

Essa equivalência conceitual permitiu a Voevodsky (2016) demonstrar que as grandes subdivisões da matemática clássica (lógica, álgebra e teoria de categorias) não são disciplinas isoladas por barreiras sintáticas, mas sim camadas estruturais de uma mesma hierarquia geométrica, governada indutivamente pelos **Níveis de Homotopia (*H-levels*)**:

- **H-level 1 (*Proposições/Lógica*):** Tipos nos quais o espaço de caminhos de identidade entre quaisquer dois pontos é um espaço contrátil (equivalente a um único ponto). Sob esta restrição de dimensão superior, só existem duas classes de equivalência topológica possíveis: o tipo vazio (**0**) e o tipo unidade (**1**), que correspondem aos valores de verdade da lógica clássica. A lógica formal é, portanto, a geometria dos tipos de nível 1 (Voevodsky, 2016).
- **H-level 2 (*Conjuntos/Álgebra*):** Tipos nos quais o espaço de caminhos entre quaisquer dois pontos cai na restrição do nível 1 (ou seja, as igualdades são meras proposições bi-valoradas). Geometricamente, esses espaços se comportam como uniões disjuntas de componentes contráteis discretos. É aqui que são gerados os conjuntos puros. A matemática estrutural clássica e a álgebra tradicional operam, fundamentalmente, sobre as leis dos tipos de nível 2 (Voevodsky, 2016).
- **H-level 3 (*Grupoides/Categorias*):** Tipos cujo espaço de caminhos atende aos critérios de nível 2. Estruturalmente, esses tipos correspondem aos nervos de

grupoides (categorias onde todos os morfismos são isomorfismos). É o nível geométrico que fundamenta a matemática de corte categorial e as grandes estruturas de Grothendieck — como as teorias de feixes e *stacks* algébricos —, nas quais as equivalências geométricas deixam de ser propriedades booleanas passivas e passam a carregar dados estruturais ricos e caminhos explícitos de isomorfismo (Voevodsky, 2016) .

Ao estender essa recursão ao infinito (∞-grupoides), a HoTT edifica uma fundação nativa onde o fluxo lógico e a deformação espacial contínua operam sob a mesma sintaxe computacional, redefinindo e ampliando a própria atividade matemática no século XXI (Voevodsky, 2016).

3. A construção fundacional intuicionista de HoTT

Como estabelecido anteriormente, o projeto da Teoria de Tipos de Homotopia (HoTT) visa mapear as dimensões lógicas, algébricas e geométricas numa única linguagem computacional nativa, fornecendo uma ferramenta que, de maneira simples e elegante, permite lidar com construções matemáticas diretamente por assistentes de provas computacionais (como *Coq, Agda* e *Lean*), facilitando, principalmente, o trabalho do cientista da computação (Grayson, 2018; Schreiber, 2023). A principal motivação para esta unificação provém de um diagnóstico prático feito por Vladimir Voevodsky: a complexidade das demonstrações matemáticas contemporâneas atingiu um patamar em que a revisão analógica, feita inteiramente pela agência humana, tornou-se suscetível a erros estruturais de difícil detecção (Voevodsky, 2012), assim tornando-se imperativa a adoção de assistentes de provas para garantir o rigor das fundações. No entanto, o sistema padrão da Teoria dos Conjuntos (ZFC) apresenta um grave bloqueio computacional. Máquinas operam nativamente por tipagem funcional, não por teoria de conjuntos. Emular as infinitas hierarquias de conjuntos vazios e as pesadas relações de equivalência analíticas exigidas pelo ZFC num verificador lógico resulta num código moroso, intratável e totalmente alheio à intuição topológica do matemático. Faz-se necessário que haja uma forma de construir os objetos matemáticos e suas demonstrações por assistentes de provas sem que haja quaisquer dificuldades de compilação ou de acompanhar extensos comandos, que seja intuitiva para o matemático padrão, e que não possibilite gerar tipagens inconsistentes (Voevodsky, 2012).

Para transpor essa barreira e garantir que o computador consiga compilar a geometria de forma fluida e livre de paradoxos, a HoTT adota uma estrutura lógico-matemática estritamente *intuicionista* (ou construtivista), herdeira da tradição de Brouwer, Heyting e Martin-Löf. Na matemática clássica subjacente ao ZFC, o uso indiscriminado do Princípio do

Terceiro Excluído e das provas por redução ao absurdo é padronizado. Contudo, sob a correspondência de Curry-Howard — o motor lógico da HoTT, no qual proposições são tipos e provas são programas executáveis —, provar que a falsidade de um termo é falsa (a dupla negação $\sim\sim a$) não fornece à máquina as instruções algorítmicas necessárias para *construir* esse objeto na memória. Para que um teorema seja aceito e um espaço geométrico seja gerado no computador, o sistema exige uma evidência direta, isto é, o algoritmo construtor daquele objeto.

Essa intuição construtivista não é apenas uma escolha filosófica, mas uma salvaguarda arquitetônica essencial para a topologia. Se a lógica clássica fosse assumida globalmente no sistema, toda a relação de igualdade entre dois pontos colapsaria numa resposta booleana estática – ou são o mesmo ponto, ou são diferentes. Esse colapso destruiria a continuidade e a riqueza homotópica dos caminhos que interligam os espaços. Aliado a leis rigorosas de codificação — como a "positividade estrita", que impede que os tipos topológicos entrem em *loops* paradoxais de autorreferência (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 166) —, o construtivismo computacional é a base que limpa o terreno clássico. Sob essa nova perspectiva sintática, os espaços de mapeamento infinito-dimensionais deixam de ser anomalias topológicas intratáveis, permitindo a formulação fluida e irrestrita da geometria homotópico-funcional sobre espaços de caminhos superiores (Schreiber, 2023; Twagirayezu, 2025). É sobre esta base limpa que se erguem os pilares da teoria: os seus termos primitivos e axiomas.

3.1. Introdução Axiomática de HoTT

A estruturação formal de HoTT afasta-se da rigidez dedutiva de primeira ordem do sistema ZFC ao erigir uma fundação baseada em regras sintáticas de tipagem e julgamentos estruturais. Em vez de postular uma vasta coleção de axiomas existenciais sobre conjuntos puros, a gramática da HoTT assenta-se sobre três termos primitivos e irredutíveis que compõem o ambiente matemático: o Universo ($\mathcal{U}$), o Tipo (A) e o Termo (a). Sob o Isomorfismo de Curry-Howard e a reinterpretação geométrica de Voevodsky , a atribuição de um habitante a um tipo, denotada pelo julgamento primitivo $a : A$, sintetiza uma tríade fundacional indissociável. Computacionalmente, a é um dado pertencente ao tipo de dado A; logicamente, a é a prova testemunhal da proposição A; e, geometricamente, a representa um ponto cravado no espaço topológico A. Para evitar paradoxos autorreferenciais clássicos, esses mundos geométricos organizam-se em uma hierarquia cumulativa de universos indefiníveis, onde $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1 : \mathcal{U}_3 : ...$, garantindo a consistência lógica do sistema (The Univalent Foundations Program, 2013).

O núcleo da novidade fundacional da HoTT manifesta-se no estatuto de seu quarto e mais crucial termo primitivo: o Tipo de Identidade (*Identity Type*). No formalismo de conjuntos tradicional, a igualdade entre dois elementos é uma afirmação estática externa, desprovida de estrutura interna. Inversamente, na abordagem intensional de Martin-Löf estendida pela univalência, dados dois termos x, y : A, a igualdade formaliza-se como um novo tipo próprio, denotado por ($x =_A y$), o qual passa a ser interpretado geometricamente como o Espaço de Caminhos contínuos ligando os pontos x e y (Grayson, 2018; Homotopy, 2025). Um habitante desse tipo, sob a assinatura p : x = y, é um caminho físico irredutível — uma evidência computacional e geométrica de conexão estrutural. Como o Tipo de Identidade é, em si mesmo, um espaço topológico primitivo, o sistema permite a aplicação recursiva da própria igualdade sobre os caminhos, gerando de forma inteiramente sintática os caminhos entre caminhos (α : p = q, as homotopias) e pavimentando o terreno para os ∞-grupoides sem a necessidade de adicionar novos axiomas gramaticais.

A partir dessa arquitetura de termos indefiníveis, o fluxo de construções e demonstrações matemáticas passa a ser governado por dois axiomas fundantes puramente geométricos, que ditam as leis de movimento e identificação no espaço. O primeiro é o *Axioma da Indução de Caminhos* (também conhecido como *Regra J*), que funciona como o motor indutivo do contínuo: ele decreta que, *para provar que uma propriedade é válida para todos os caminhos contínuos de um tipo, basta demonstrá-la para o caso trivial do construtor de reflexividade* (*refl*), isto é, o caminho estático e constante sobre um ponto.

O segundo é o *Axioma da Univalência* de Voevodsky, que eleva essa dinâmica geométrica ao nível dos universos ao ditar que *o espaço de equivalências estruturais entre dois tipos é homotopicamente idêntico ao espaço de caminhos de igualdade entre eles, ou seja, (A≃B) ≃ (A = B)* (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 4). Sob essa perspectiva, a aplicação canônica *idtoeqv* — que transporta uma igualdade a uma equivalência estrutural — torna-se, ela própria, uma equivalência de tipos. Como salientado por Grayson (2018, p. 441-443), esse axioma legitima matematicamente a conduta prática dos pesquisadores que o rigor literal do ZFC historicamente proibia, ao decretar que tipos equivalentes são idênticos e, portanto, intersubstituíveis em qualquer teorema. Desse modo, o isomorfismo deixa de ser uma mera analogia externa e ascende ao estatuto de identidade matemática formal e computável.

Juntos, esses dois pilares axiomáticos fornecem as regras de simetria e transporte necessárias para que o edifício da matemática contemporânea seja integralmente reconstruído de forma sintática, servindo de alicerce para as propriedades operacionais que sustentam, por exemplo,

o continuum quântico e computacional.

3.2. Os Construtores Universais: Tipos Dependentes Π e Σ

A extensão do aparato fundacional da Teoria de Tipos de Homotopia (HoTT), além das estruturas booleanas ou discretas, exige a introdução de famílias de tipos parametrizadas. Formalmente, uma família de tipos consiste em um mapeamento $P : A \to \mathcal{U}$, que atribui a cada termo $x : A$ um tipo específico $P(x)$ pertencente a um universo determinado. Enquanto na teoria clássica dos conjuntos (ZFC) essa estrutura é reduzida a uma coleção indexada de conjuntos disjuntos organizados por uma união arbitrária, na HoTT a interpretação assume uma natureza intrinsecamente topológica. Uma família de tipos P sobre um tipo base A é tratada como uma *fibração* (ou fibrado de Grothendieck), na qual o tipo base A atua como o espaço geométrico de base (o "chão" do sistema) e o tipo dependente P(x) representa a *fibra* local que paira verticalmente acima do ponto cravado x. A partir dessa concepção de feixe geométrico, a linguagem edifica os seus dois construtores dependentes universais primitivos: o Tipo-Σ e o Tipo-Π (Homotopy, 2025).

O Tipo-Σ, denotado sintaticamente por $\Sigma(x : A)P(x)$, constitui a generalização dependente do produto cartesiano clássico e atua como o operador existencial estrutural no eixo lógico ($\exists x : A, P(x)$). Computacionalmente, o Tipo-Σ é a coleção de todos os pares dependentes da forma (x,u), onde o primeiro componente é um termo $x : A$ e o segundo componente é um termo $u : P(x)$ cujo tipo é estritamente determinado pelo valor de x (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 30; Homotopy, 2025). Geometricamente, este construtor é o operador que edifica o *espaço total* (E) da fibração, fundindo a base e as infinitas fibras locais em uma única variedade topológica unificada. O Tipo-Σ é governado por duas funções de eliminação canônicas conhecidas como projeções: a primeira projeção, $pr_1 : (\Sigma(x : A)P(x)) \to A$, mapeia o par dependente de volta ao ponto base correspondente ($pr_1(x, u) :\equiv x$), funcionando topologicamente como a projeção canônica do fibrado $\pi : E \to A$; a segunda projeção, $\pi\rho_2 : \Pi(w : \Sigma(x : A)P(x))P(pr_1(w))$, resgata a evidência interna contida na fibra sobre aquele ponto específico. Essa estrutura do espaço total é o alicerce sintático que viabiliza, por exemplo, a construção de *pullbacks* e a formalização do espaço de medição quântica homotópica, operando como um limitador restritivo de trajetórias.

Inversamente, o Tipo-Π, denotado por $\Pi(x : A)P(x)$, representa a generalização dependente do espaço de funções e codifica a quantificação universal no eixo lógico ($\forall x : A, P(x)$). Os habitantes desse tipo são funções dependentes f que recebem como entrada um ponto arbitrário $x : A$ e devolvem um elemento estritamente restrito à fibra daquele input, de modo que o julgamento de aplicação resulta em $f(x) : P(x)$ (The Univalent Foundations Program,

2013, p. 25; Homotopy, 2025). Geometricamente, uma função dependente transcende a noção conjuntista de um gráfico de pares ordenados discretos: ela se manifesta como uma *seção global* ($\Gamma(A, P)$) do espaço total. Uma seção é uma aplicação contínua que associa a cada ponto da base um ponto da fibra vertical correspondente, satisfazendo a identidade $pr_1(f(x)) \equiv x$, o que equivale a desenhar uma "superfície-teto" estável acima do chão geométrico.

A importância metodológica dos tipos Π e Σ reside no fato de que eles não operam isolados, mas interagem recursivamente com o Tipo de Identidade para gerar as propriedades estruturais derivadas que serão mobilizadas na resolução dos teoremas complexos. A ação de uma seção global do Tipo-Π mapeando caminhos da base para caminhos na fibra estabelece a propriedade de *functorialidade dependente*, enquanto a manipulação do espaço total do Tipo-Σ sob o Axioma da Univalência dita a lei de *Igualdade de Pares Dependentes*. Desse modo, o encadeamento desses dois construtores universais primitivos com as regras de Martin-Löf fornece a densidade linguística necessária para que o contínuo geométrico seja inteiramente controlado por checagem de tipos computacionais, abolindo a necessidade de quocientes conjuntistas artificiais do formalismo clássico.

3.3. A Geometria da Igualdade: Intensionalidade, Caminhos e Estruturas Derivadas

Se os construtores dependentes Π e Σ estruturam o ambiente topológico da HoTT, é o aspecto intensional (i. é, de definição interna, sintático-computacional) do Tipo de Identidade que dita as leis geométricas da sua dinâmica interna. Na matemática clássica regida pelo sistema ZFC, a igualdade é uma proposição puramente extensional e binária: dois elementos ou são idênticos ou não são, colapsando qualquer investigação sobre *como* ou *por que* essa relação se estabelece. Inversamente, na HoTT, dados dois termos $x, y : A$, a sua igualdade gera um Tipo de Identidade próprio, denotado por $(x =_A y)$, cuja conceituação univalente reinterpreta os seus habitantes não como meras asserções abstratas, mas como *Caminhos Contínuos* ($p : x = y$) que ligam o ponto de origem x ao ponto de destino y dentro do espaço A (Ladyman; Presnell, 2016, s. 3.5). Como essa especificação é recursiva, o Tipo de Identidade pode ser reaplicado sobre si mesmo de forma contínua: dados dois caminhos paralelos $p, q : x = y$, o tipo $(p =_{x=y} q)$ abriga as igualdades superiores, geometricamente interpretadas como superfícies contínuas bidimensionais (*homotopias*) que deformam a trajetória p na trajetória q. Esse encadeamento infinito dota a HoTT da estrutura nativa de um ∞-grupoide, sepultando a rigidez unidimensional do atomismo conjuntista clássico (The Univalent Foundations Program, 2013).

A emergência dessa estrutura de ∞-grupoide não decorre de postulados ad hoc, mas sim da

fecundidade matemática do Axioma da Indução de Caminhos (Regra J), a partir do qual as operações algébricas fundamentais sobre caminhos são rigorosamente derivadas como teoremas lógicos. A primeira dessas propriedades estruturais é a *Inversa de um Caminho* (ou Reversibilidade), que formaliza a simetria da igualdade. Dado um caminho $p : x = y$, o Axioma J permite contrair essa trajetória até ao construtor de reflexividade contínuo ($refl_x : x = x$), cujo caminho inverso é trivialmente ele próprio; a generalização indutiva estende essa propriedade para todo o espaço, derivando um termo $p^{-1} : y = x$, que geometricamente representa o ato de rebobinar ou percorrer a curva no sentido oposto (Grayson, 2018; Homotopy, 2025). Da mesma forma, a transitividade da igualdade resolve-se através da *Composição Vertical de Caminhos* (ou Concatenação), denotada por $(p \cdot q) : x = z$, construída ao induzir sobre o caminho p e avaliar o comportamento quando este colapsa em $refl_x$, unindo de forma contínua o ponto final de uma trajetória ao ponto inicial da seguinte. Crucialmente, devido à natureza construtiva do sistema, as leis de identidade ($p \cdot p^{-1} = refl$) e de associatividade ($p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$) não se aplicam como identidades estritas e automáticas, mas são válidas *apenas até um caminho de ordem superior*. É precisamente essa flexibilidade sintática que define a HoTT como um grupoide fraco, mapeando computacionalmente as propriedades topológicas do espaço físico.

Adicionalmente, a interação desses caminhos com funções e famílias dependentes faz surgir duas propriedades operacionais que constituem o motor de cálculo dos teoremas complexos das seções posteriores: a *Functorialidade das Funções* (ap) e o *Transporte* (transport). A functorialidade, expressa pela aplicação canônica $ap_f : (x =_A y) \rightarrow (f(x) =_B f(y))$, dita que toda e qualquer função $f : A \rightarrow B$ formulada dentro da HoTT é intrinsecamente um mapeamento contínuo (um functor topológico). O termo $ap_f(p)$ prova que f não se limita a mover os pontos isolados x e y, mas estica e preserva o caminho p inteiro, mapeando-o coesamente como uma nova trajetória no espaço de destino B (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 71; Homotopy, 2026). Já o Transporte, denotado por $transport^P(p, u) : P(y)$, atua diretamente sobre as fibrações de famílias dependentes $P : A \rightarrow \mathcal{U}$: dado um caminho $p : x = y$ no espaço base, a função transport desliza suavemente um habitante $u : P(x)$ contido na fibra de origem até à fibra de destino P(y). Esta operação assegura que propriedades lógicas e geométricas sejam preservadas ao longo de fluxos de movimento. A articulação coordenada entre a inversão, a concatenação, a ação de ap_f e o deslizamento por *transport* constitui a maquinaria sintática exata que viabiliza, por exemplo, o cálculo algébrico imediato do Grupo Fundamental do Círculo ($\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$) e a resolução determinística do pullback homotópico na mecânica quântica, operando sem qualquer dependência dos limites analíticos do contínuo euclidiano tradicional.

3.4. Tipos Indutivos Superiores (HITs) e mais algumas construções topológicas

A sintaxe da HoTT atinge sua plenitude geométrica com a introdução dos Tipos Indutivos Superiores (*Higher Inductive Types*, ou HITs). Na Teoria de Tipos tradicional, a definição de um tipo indutivo (como os números naturais) é feita postulando unicamente construtores de pontos (termos básicos). A ruptura epistemológica dos HITs consiste em permitir que o matemático postule não apenas construtores de pontos, mas também construtores de *caminhos* e de *homotopias* de ordem superior na própria matriz da linguagem (The Univalent Foundations Program, 2013, cap. 6). Sintaticamente, os HITs funcionam como o equivalente rigoroso aos Complexos-CW da topologia algébrica clássica, dotando a teoria da capacidade de colar, dobrar e preencher espaços através de puro código formal, sem necessitar de os modelar analiticamente como subconjuntos do espaço contínuo euclidiano ($\mathbb{R}^n$).

É a partir destas ferramentas indutivas, combinadas com os construtores universais Π e Σ, e governadas pelos axiomas fundantes, que derivamos o aparato topológico final exigido para a formulação de teoremas complexos. Destacam-se as seguintes construções estruturais basilares:

A *Contratibilidade* (isContr): Formalizada pela fusão dos construtores dependentes como isContr(A) := Σ(x : A)Π(y : A)(x = y), esta propriedade descreve o esmagamento topológico total de uma variedade. Um tipo é estritamente contrátil se existe um único "centro de massa" (x) e se todos os outros pontos do espaço (y) podem ser deformados contínua e inevitavelmente até ele através de um caminho de igualdade formal. Topologicamente equivalente a um único ponto estático (o Nível-0 de homotopia), a contratibilidade é o mecanismo central na definição rigorosa de equivalência e será a restrição geométrica responsável por modelar, de forma determinística, o evento de colapso da função de onda na Mecânica Quântica Homotópica (HQM).

O *Pushout* (Soma Colada ou Amálgama): Sendo o expoente máximo de um HIT de colimite, o pushout ($A +_c B$) funde dois espaços independentes (A e B) unindo-os irreversivelmente ao longo de um espaço fronteira comum (C). A sua construção instancial exige construtores de injeção de pontos e, de forma revolucionária, um construtor indutivo superior (o caminho *glue*) que força a costura homotópica (The Univalent Foundations Program, 2013, s. 6.8; Homotopy, 2026, p. 5-6). Esta ferramenta sintática dissolve a necessidade das exaustivas aproximações combinatórias no ZFC, permitindo que teoremas densos de excisão topológica — como o Teorema de Blakers-Massey — sejam reduzidos a uma manipulação de rotinas de colagem curtas e completamente verificáveis pelo computador.

O *Pullback* (Produto Fibrado): Contrastando frontalmente com o pushout, o pullback ($A \times_C$

B) não necessita da maquinaria indutiva superior (não é um HIT), consistindo numa construção derivada de limite. Ele é gerado pela mera restrição de um Tipo-Σ aplicado sobre um produto cartesiano: $\Sigma(x : A)\Sigma(y : B)(f(x) =_C g(y))$. Atua como um filtro rigoroso que interseta as trajetórias de dois espaços diferentes que convergem para um alvo comum. É no epicentro restritivo deste pullback que a topologia univalente posicionará a interação entre o sistema físico e o instrumento de medição.

O *Truncamento Proposicional* (||A||): Consiste numa drástica compactação topológica que oblitera toda a dimensão geométrica superior de um espaço, esmagando-o sintaticamente até que as suas infinitas dimensões se reduzam a uma mera proposição booleana bruta ("Sim" ou "Não"). Esta construção é a salvaguarda metodológica essencial para incorporar propriedades oriundas do Axioma da Escolha clássico num paradigma puramente construtivista, permitindo aos matemáticos raciocinar sobre a "existência" de uma ligação sem serem forçados a exibir o seu intrincado algoritmo de construção no espaço geométrico (The Univalent Foundations Program, 2013).

3.5. O Dicionário Estrutural: Comparativo HoTT vs. ZFC

A consolidação de um sistema fundacional alternativo como HoTT é melhor elucidada na organização de um catálogo operacional que funcione como uma caixa de ferramentas unificada para as construções topológicas que analisaremos adiante. Na Teoria de Tipos de Homotopia, as regras de tipagem, leis geométricas e extensões indutivas operam em conjunto para substituir a fragmentação estrutural do ZFC clássico. No ZFC, a validação de propriedades contínuas depende de fatiar objetos num agregado de conjuntos discretos e postular axiomas artificiais de vizinhança. Inversamente, a HoTT opera através de fluxos geométricos nativos, nos quais cada operador lógico ou feixe dependente carrega na sua própria sintaxe a sua matriz computável.

Para pavimentar o terreno formal das construções topológicas que se seguirão, a Tabela 1 organiza a taxonomia das principais ferramentas da HoTT — desde os seus axiomas e construtores dependentes até aos Tipos Indutivos Superiores (HITs) —, contrastando-as diretamente com as suas contrapartes analíticas (e com os seus respectivos limites) no formalismo conjuntista de ZFC.

Tabela 1: *Glossário Comparativo de Construções Fundacionais (HoTT vs. ZFC)*

Construção / Conceito	**Notação Formal (HoTT)**	**Interpretação Geométrica na HoTT**	**Contraparte / Abordagem no ZFC**
Tipo de Identidade	$x =_A y$	Espaço de caminhos contínuos a ligar x e y. Pode ser iterado infinitamente (homotopias).	Igualdade puramente estática e estrita (Booleana). Não possui estrutura interna.
Axioma da Indução (Regra J)	$\mathrm{ind}_{=_A}(C, c, x, y, p)$	Motor indutivo do contínuo: para provar C para todos os caminhos, basta provar para o caminho estático (reflexividade).	Não possui equivalente topológico. Usa-se a substituição formal de Leibniz.
Axioma da Univalência	$(A = B) \simeq (A \simeq B)$	Tipos estruturalmente equivalentes (isomorfos) são idênticos e unidos por um caminho no Universo.	Proibido. O isomorfismo não garante igualdade literal dos elementos dos conjuntos.

Tipo-Σ (Par Dependente)	$\Sigma(x : A)P(x)$	*Espaço Total* de uma fibração. Codifica a generalização dependente do produto cartesiano e o quantificador existencial ($\exists$).	União disjunta de uma família indexada de conjuntos.
Tipo-Π (Função Dependente)	$\Pi(x : A)P(x)$	*Seção Global* contínua do espaço de base para a fibra. Codifica a restrição de funções e o quantificador universal ($\forall$).	Produto cartesiano infinito ou coleção extensional de funções clássicas.
Functorialidade	$ap_f(p)$	Prova de que toda a função é contínua e transporta trajetórias, mapeando o caminho $\underline{p}$ do domínio para a imagem.	Exige a formulação externa de preservação de continuidade via topologia de limites (ε-δ).
Contratibilidade	isContr(A)	Esmagamento topológico total: o espaço possui um centro de massa e todo o espaço é deformável até ele.	Subconjunto *Singleton* (com exatamente um elemento). A deformação analítica exige equações externas.

Pullback	$A \times_C B$	Restrição fibrada de trajetórias (derivada a partir do Tipo-Σ) que viajam para um espaço alvo comum *C*.	Subconjunto restrito por uma equação analítica no produto cartesiano $A \times B$.
Pushout	$A +_C B$	Tipo Indutivo Superior (HIT). Colagem geométrica irredutível que gera novos caminhos na fronteira.	Espaço Quociente altamente complexo construído a partir de Relações de Equivalência sobre a união.
Truncamento Proposicional	$\|\|A\|\|$	Compactação drástica de uma variedade contínua para uma proposição lógica (usada para simular o Axioma da Escolha).	Desnecessário. Em ZFC, as construções já não possuem as dimensões homotópicas superiores da HoTT.

4. A Revolução dos Tipos Indutivos Superiores (HITs)

Na Teoria de Tipos Martin-Löf (MLTT) convencional, a formulação de tipos indutivos (como os números naturais $\mathbb{N}$ ou estruturas de listas) restringe-se estritamente à especificação de construtores de termos primários, isto é, geradores de pontos isolados (ou 0-células). A caracterização indutiva clássica determina como os elementos de um tipo são criados, mas a igualdade entre esses elementos permanece vinculada à identidade reflexiva automática. A grande expansão conceitual que viabilizou o nascimento da topologia sintática foi a introdução dos Tipos Indutivos Superiores (*Higher Inductive Types* — HITs) (The Univalent Foundations Program, 2013, 177). Os HITs alteram radicalmente a gramática do sistema ao

estenderem o princípio indutivo: eles permitem que definamos tipos especificando não apenas construtores de pontos, mas também construtores livres de caminhos de identidade (1-células) e igualdades de ordem superior (2-células ou homotopias).

Essa inovação sintática dota a HoTT de uma capacidade construtiva abstrata que espelha perfeitamente a teoria dos complexos celulares (Complexos-CW) introduzida por J. H. C. Whitehead na topologia algébrica clássica. No formalismo tradicional, a colagem de espaços exige o manuseio de aplicações de anexação (*attaching maps*) e subconjuntos contínuos de espaços euclidianos dotados de uma topologia de conjuntos abertos. Na HoTT, os espaços são gerados nativamente por meio de geradores combinatórios discretos que o algoritmo de checagem de tipos (*type checking*) do computador consegue compilar e validar diretamente (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 178). A geometria deixa de ser um objeto analítico passivo a ser descrito por limites e aproximações, ascendendo ao estatuto de um tipo de dado indutivo cujas propriedades geométricas superiores são capturadas pelas próprias regras de computação e eliminação do sistema.

4.1. Exemplo 1: O Tipo-Círculo (S^1)

O exemplo paradigmático e baluarte dos HITs é o círculo unitário, denotado por S^1. Na abordagem clássica fundamentada no ZFC, o círculo não possui existência formal independente; ele é definido de maneira reducionista como um subconjunto imerso no plano euclidiano, $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, ou como o espaço quociente topológico do intervalo real [0,1] sob a relação de equivalência que funde as extremidades ($0 \sim 1$). Essa formulação analítica impõe um fardo metodológico severo: exige a construção prévia do contínuo dos números reais ($\mathbb{R}$), a definição de métricas de distância e o quocientamento de conjuntos infinitos. No domínio dos assistentes de prova computacionais, as construções de quocientes clássicos impõem um severo fardo extensional ao matemático, uma vez que toda e qualquer função definida a partir de uma estrutura quociente deve ser acompanhada por provas manuais exaustivas de boa definição (*well-definedness*) para atestar que a aplicação preserva estritamente a relação de equivalência abstrata estabelecida (Coquand, 2014; Grayson, 2018).

Inversamente, na Teoria de Tipos de Homotopia, o círculo S^1 é edificado a partir "do nada" como um Tipo Indutivo Superior atômico e independente, definido estritamente pelos seus dois geradores sintáticos internos (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 180):

$$\text{base} : S^1$$

$$\text{loop} : \text{base} =_{S^1} \text{base}$$

O termo base declara um ponto no espaço, enquanto loop gera uma auto-igualdade intensional não-trivial, funcionando geometricamente como um caminho contínuo que sai da base e retorna a ela mesma. Para mapear funções para fora deste espaço sem recorrer a imersões euclidianas, a HoTT aplica o *Princípio de Recursão de S^1* (S^1-rec). Este princípio estabelece que, para construir uma aplicação $f : S^1 \to B$ para um tipo destino qualquer B, basta que o matemático forneça um ponto de ancoragem $b : B$ e um caminho de identidade interno $\ell : b =_B b$. O compilador assegura automaticamente a existência da função contínua f tal que o julgamento de computação em pontos resulta em $f(base) :\equiv b$, e a sua ação funtorial no espaço de caminhos satisfaz a igualdade proposicional $ap_f(loop) = \ell$ (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 181).

O fechamento do rigor topológico ocorre na formulação do *Princípio de Indução de S^1* (S^1-ind), que dita a regra de eliminação dependente do tipo. Para uma família de tipos parametrizada sobre o círculo, $P : S^1 \to \mathcal{U}$, a construção de uma seção global $\Pi(x : S^1)P(x)$ exige o fornecimento de um ponto inicial na fibra de origem, $b : P(base)$, e de um caminho dependente $\ell : b =^P_{loop} b$. Esta última assinatura equivale a demonstrar uma identidade na fibra de destino mediada pelo operador de deslizamento: $transport^P(loop, b) = b$. Essa regra de eliminação dependente é o mecanismo que força qualquer propriedade lógica ou algébrica formulada sobre o círculo a respeitar a continuidade intrínseca do espaço. O computador calcula e valida a coerência geométrica do círculo checando a tipagem dessas duas componentes, eliminando por completo a necessidade de limites ε-δ ou malhas de triangulação euclidianas.

4.2. Exemplo 2: O Tipo-Toro (T^2)

A transição para espaços de dimensões superiores traz à tona a elegância com que a Teoria de Tipos de Homotopia manipula geradores multidimensionais através de caminhos de identidade de ordem superior. O exemplo paradigmático deste salto bidimensional é o toro geométrico (T^2). Na abordagem clássica do ZFC, o toro é comumente formalizado como o espaço quociente topológico do quadrado unitário $[0,1] \times [0,1] \in \mathbb{R}^2$ submetido a uma relação de equivalência que costura as suas arestas opostas de forma independente: $(x, 0) \sim (x, 1)$ e $(0, y) \sim (1, y)$ para todos os $x, y \in [0,1]$. Alternativamente, ele pode ser descrito analiticamente por meio de parametrizações trigonométricas imersas no espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$. Ambas as abordagens conjuntistas transferem para o formalismo uma opacidade computacional severa; provar teoremas sobre o toro quocientado exige mapear continuamente funções sobre classes de equivalência infinitas, gerando um emaranhado de

verificações de coerência e transportes estruturais redundantes no ambiente computacional clássico (Coquand, 2014).

Inversamente, na HoTT, o toro é definido como um Tipo Indutivo Superior atômico e independente, estruturado por quatro construtores simultâneos e geometricamente interdependentes (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 191):

$$b : T^2$$
$$p : b =_{T^2} b$$
$$q : b =_{T^2} b$$
$$surf : p \cdot q =_{b=b} q \cdot p$$

Os termos p e q atuam como construtores unidimensionais livres de caminhos (1-células) que geram, respectivamente, as revoluções horizontal (o equador) e vertical (o meridiano) ancoradas no ponto base b. O diferencial estrutural, aqui, reside no estatuto do construtor bidimensional *surf*, que consiste em uma igualdade de dimensão superior (2-célula ou homotopia). O termo *surf* estabelece um caminho contínuo *entre* as composições de caminhos, forçando a concatenação $p \cdot q$ a ser homotopicamente equivalente a $q \cdot p$. Geometricamente, esta relação de comutatividade sintática equivale a esticar e colar uma membrana ou película bidimensional que preenche o interior oco do esqueleto em formato de "oito" produzido apenas por *p* e *q,* forçando o confinamento topológico da rosquinha.

A fertilidade matemática desta construção sintática manifesta-se na dispensa de teoremas homológicos complexos (como Seifert-van Kampen) para o cálculo de invariantes geométricos básicos. Por meio da aplicação direta dos princípios de eliminação indutiva do HIT combinados com a álgebra de caminhos intencionais, demonstra-se de forma puramente lógica que o espaço de loops do toro é homotopicamente equivalente ao produto cartesiano de dois grupos discretos de inteiros: $\Omega(T^2, b) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (The Univalent Foundations Program, 2013; Homotopy, 2026).

4.3. Exemplo 3: A Suspensão Topológica e Esferas Superiores (susp(S^n))

O terceiro exemplo delimita o mecanismo recursivo e altamente generalizável pelo qual a topologia univalente constrói hiperesferas de dimensões arbitrárias através de um operador abstrato conhecido como Suspensão Topológica (susp). Na geometria conjuntista clássica (ZFC), a suspensão de um espaço topológico X é formalizada pelo quociente do produto cartesiano do espaço pelo intervalo real contínuo, $\Sigma X = (X \times [-1, 1]) / \sim$, sob uma relação de equivalência que esmaga e colapsa a tampa superior ($X \times \{1\}$) e a base inferior ($X \times \{-1\}$) em dois pontos isolados correspondentes aos pólos. Esta construção exige o aparato contínuo

de [-1,1] e o colapso infinito de coordenadas pontuais, tornando-se computacionalmente intratável em assistentes de provas tradicionais.

Na HoTT, a suspensão é introduzida como um operador indutivo universal (um functor de tipos) que recebe um tipo qualquer A e devolve um novo tipo susp(A) estruturado unicamente por três construtores sintáticos (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 187; Homotopy, 2026):

$$N : \mathrm{susp}(A)$$
$$S : \mathrm{susp}(A)$$
$$\mathrm{merid} : A \to (N =_{\mathrm{susp}(A)} S)$$

Os construtores de pontos N e S postulam o Pólo Norte e o Pólo Sul como as novas âncoras geométricas do espaço (as extremidades). A função dependente *merid* atua como a ponte dimensional: ela toma cada elemento x pertencente ao espaço base de origem A e lança de forma automática um caminho contínuo de identidade (um meridiano) que conecta o Pólo Norte ao Pólo Sul passando por x. Este operador funciona como um elevador dimensional recursivo de alta precisão:

- Se aplicarmos a suspensão ao tipo discreto booleano de dois pontos (2, que representa a 0-esfera discreta S^0), a função merid gera exatamente dois caminhos ligando os pólos, criando um anel oco e validando a equivalência univalente $\mathrm{susp}(2) \simeq S^1$ (The Univalent Foundations Program, 2013; Homotopy, 2026).
- Se aplicarmos o operador ao círculo, $\mathrm{susp}(S^1)$, a ação functorial da função de meridianos sobre o caminho interno do círculo ($\mathrm{ap}_{\mathrm{merid}}(\mathrm{loop})$) gera uma membrana contínua de ordem superior que infla o espaço, gerando a esfera bidimensional clássica: $\mathrm{susp}(S^1) \simeq S^2$.

Por meio de uma recursão indutiva infinita, estabelece-se a lei de transição dimensional uniforme para qualquer hiperesfera: $\mathrm{susp}(S^n) \simeq S^{n+1}$. O desfecho desta construção ocorre ao intersectar este resultado com o Axioma da Univalência. Como a univalência dita que toda equivalência estrutural ($\simeq$) induz um caminho de igualdade literal (=) no Universo de Tipos $\mathcal{U}$, a relação de esferas ascende ao estatuto de uma igualdade proposicional exata:

$$\mathrm{susp}(S^n) =_{\mathcal{U}} S^{n+1}$$

Esta identidade sintática pura faculta uma flexibilidade operacional inédita e impossível de ser replicada no ZFC: qualquer teorema, invariante homotópico ou propriedade lógica demonstrada e validada para uma hiperesfera de dimensão n é automática e imediatamente

herdada pela hiperesfera de dimensão superior através do operador de transporte computacional (transport), operando inteiramente livre de remendos analíticos externos.

5. HoTT no desenvolvimento da matemática e da física contemporânea

A consolidação dos HITs e o estabelecimento de uma taxonomia operacional estável, conforme delineado nas seções anteriores, não constituem um mero exercício de refinamento lógico ou um formalismo estético alternativo. O verdadeiro potencial fundacional da HoTT manifesta-se quando suas engrenagens sintáticas são mobilizadas para além das formas geométricas básicas, adentrando o domínio de teoremas complexos da matemática pura contemporânea. Ao recusar o reducionismo conjuntista do ZFC — que exige o fatiamento de variedades contínuas em agregados discretos de pontos —, a HoTT demonstra a sua superioridade metodológica na topologia algébrica. Através da internalização de caminhos de identidade de alta dimensionalidade e do uso do método *Encode-Decode*, o sistema ascende à capacidade de calcular invariantes topológicos exatos e provar teoremas estruturais densos diretamente em assistentes de provas. O que outrora demandava malhas infinitas de aproximações analíticas e quocientes intratáveis no ambiente clássico converte-se, sob a égide da univalência, em rotinas de código elegantes, cujas simetrias geométricas são chanceladas nativamente pelo algoritmo de checagem de tipos (*type checking*).

Contudo, o alcance da revolução univalente proposta por Vladimir Voevodsky expande-se de maneira ainda mais surpreendente ao romper as barreiras da matemática abstrata e estender-se ao âmago da física quântica fundamental. Historicamente, a modelagem de fenômenos quânticos e teorias de campos viu-se confinada à rigidez da linguagem de conjuntos de primeira ordem, operando sob o fardo de espaços de Hilbert discretizados e transformações de calibre (*gauge*) tratadas como redundâncias externas artificiais. A HoTT altera esse cenário ao revelar-se como a sintaxe nativa para a descrição do universo físico contínuo. Ao fundir lógica, computação e geometria, a teoria fornece o estofo matemático necessário para desmistificar o Problema da Medição por meio de contrações geométricas determinísticas (Mecânica Quântica Homotópica) e para domar a complexidade bidimensional de tranças de *anyons* na Computação Quântica Topológica (*Higher Gauge Theories*). Esta seção dedica-se a detalhar e comentar esses quatro desdobramentos contemporâneos, demonstrando como as propriedades derivadas dos ∞-grupoides operam como o motor unificador definitivo entre o fluxo do pensamento lógico e a tessitura contínua da realidade física (Twagirayezu, 2025).

5.1 Avanços na Matemática Pura: O Caso de Blakers-Massey

Na topologia algébrica clássica fundamentada na teoria dos conjuntos de ZFC, o Teorema de Blakers-Massey opera como um pilar essencial para o cálculo de invariantes geométricos, ditando as condições precisas sob as quais o mapeamento de inclusão de uma colagem topológica (um *pushout*) induz um isomorfismo nos grupos de homotopia em dimensões baixas. Tradicionalmente, as demonstrações conjuntistas deste teorema impunham um maquinário analítico massivo, imensamente longo e dependente de teoremas complexos de excisão geométrica e aproximações simpliciais densas (The Univalent Foundations Program, 2013). Avaliar e comprovar o comportamento de infinitas malhas de triângulos euclidianos deformando-se continuamente exige um esforço cognitivo colossal e resulta numa estrutura formal praticamente incomputável para métodos de verificação algorítmica.

Um dos principais marcos no desenvolvimento da Teoria de Tipos de Homotopia (HoTT) foi a descoberta de uma demonstração puramente sintática e computável para este teorema, detalhada no Capítulo 8 de *Homotopy Type Theory* (2013). O fulcro desta revolução arquitetônica assenta na recusa de modelar o problema através de espaços de conjuntos de pontos infinitos (aproximações de conjuntos contínuos), mobilizando em seu lugar a construção estrutural do *pushout* ($A +_C B$) como um Tipo Indutivo Superior (HIT). Na sintaxe univalente, a intersecção e união geométrica entre os espaços A e B ao longo de uma fronteira de origem C converte-se num amálgama finito gerado diretamente pela linguagem, governado de forma estrita pelo construtor de caminhos homotópicos glue. Ou seja, a HoTT formula a premissa geométrica estritamente como um diagrama de *pushout* definido sobre um *span* de espaços $A \leftarrow C \rightarrow B$ – isto é, um diagrama de bifurcação estruturado por duas aplicações com domínio comum.

A formulação rigorosa do teorema dentro da sintaxe univalente depende do conceito de *Tipos n-conectados* (*n-connected types*), que designam espaços cujos grupos de homotopia até a dimensão n são triviais. O enunciado formal demonstrado nativamente na HoTT estabelece que (The Univalent Foundations Program, 2013, p. 299):

> ***Teorema (Blakers-Massey em HoTT):*** *Seja $A \leftarrow C \rightarrow B$ um span onde a função $C \rightarrow A$ é n-conectada e a função $C \rightarrow B$ é m-conectada. Se considerarmos o pushout $X := A +_C B$, a função canónica induzida que vai do espaço de fronteira original C para o pullback homotópico das injeções $A \times_X B$ é $(n + m)$-conectada.*

Em notação tipológica, isso significa que a fibra da função induzida $C \rightarrow (A \times_X B)$ possui a

propriedade de contratibilidade de alta dimensão (isContr) para os níveis de homotopia exigidos.

A demonstração deste enunciado processa-se abandonando a topologia métrica e homológica clássica. A prova formalizada em HoTT opera através do método *Encode-Decode* para fibrados. O matemático não deduz sequências exatas a partir de limites espaciais; ele computa o resultado definindo famílias mutuamente recursivas que atuam diretamente sobre o construtor sintático glue do HIT *pushout*. A "excisão" geométrica traduz-se numa mera aplicação do operador de *transporte* ao longo de caminhos induzidos, provando a conectividade do espaço colado por checagem direta de tipos. A elegância computacional desta demonstração validou o escopo prático do programa univalente perante a topologia clássica, demonstrando que as dimensões superiores (os ∞-grupoides) já se encontram inerentemente mapeadas e domadas pelas regras primitivas da Teoria de Tipos de Martin-Löf (Grayson, 2018).

5.2. O Grupo Fundamental do Círculo ($\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$)

Na topologia geométrica tradicional construída sobre o ZFC, o cálculo do primeiro grupo de homotopia do círculo exige a edificação de uma complexa maquinaria analítica baseada na teoria dos espaços de recobrimento. O matemático clássico é obrigado a postular a reta real $\mathbb{R}$ como o recobrimento universal do círculo por meio da aplicação contínua de projeção $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. A partir daí, a demonstração de que $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ requer a validação analítica do Teorema do Levantamento de Caminhos (*Path Lifting Theorem*) e da Propriedade de Levantamento de Homotopias, medindo o comportamento geométrico de caminhos contínuos através de números de enrolamento (*winding numbers*) reais discretizados por partições topológicas. No ambiente computacional clássico, a necessidade de processar quocientes infinitos sobre o domínio contínuo de $\mathbb{R}$ torna essa demonstração um artefato de extrema opacidade e exaustão formal.

Na Teoria de Tipos de Homotopia (HoTT), a unificação isomórfica entre espaços de caminhos e tipos de identidade intensionais permite resolver esse cenário de forma inteiramente sintática e puramente algébrica, sem qualquer dependência da reta real métrica (The Univalent Foundations Program, 2013, s. 8.1). O cálculo do espaço de loops baseado na base, denotado por $\Omega(S^1, \text{base}) :\equiv (\text{base} =_{S^1} \text{base})$, é executado por meio do método *Encode-Decode*, estruturado formalmente em três etapas dedutivas:

1. Definição da Fibração de Recobrimento (code):
Em vez de um espaço de recobrimento geométrico imerso, constrói-se uma família de tipos

parametrizada sobre o círculo, code : $S^1 \to \mathcal{U}$, que atribui a cada ponto de S^1 um tipo discreto correspondente à sua fibra. Através do princípio de recursão do HIT círculo (S^1-rec), essa fibração universal é univocamente determinada por dois julgamentos sintáticos:

- code(base) :≡ $\mathbb{Z}$
- ap_{code}(loop) := ua(succ)

Onde succ : $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ é a equivalência autoevidente de sucessão numérica no tipo dos inteiros ($n \mapsto n + 1$) e ua é o mapeamento canônico do Axioma da Univalência que converte essa equivalência estrutural em um caminho de igualdade literal dentro do Universo de Tipos $\mathcal{U}$.

2. A Maquinaria de Codificação (encode e decode):
Com a fibração code estabelecida, introduzem-se duas funções dependentes globais responsáveis por transladar a geometria dos caminhos para a aritmética discreta:

- A função *encode* : $\Pi(x : S^1)(\text{base} =_{S^1} x) \to \text{code}(x)$ é definida pela aplicação direta do operador de deslizamento: encode(x, p) :≡ $\text{transport}^{code}(p, 0_{\mathbb{Z}})$. Quando avaliada na âncora geométrica x ≡ base, ela recebe um loop topológico e devolve um número inteiro puro.
- A função inverso-functorial *decode* : $\Pi(x : S^1)\text{code}(x) \to (\text{base} =_{S^1} x)$ é construída por indução sobre S^1. No ponto base, ela mapeia cada inteiro n : $\mathbb{Z}$ para uma potência de composição de caminhos: decode(base, n) :≡ loop^n, onde loop^n representa a concatenação vertical sucessiva de *n* trajetórias do construtor loop.

3. O Estabelecimento da Equivalência Homotópica:
O fechamento rigoroso da prova se dá ao aplicar o Axioma da Indução de Caminhos sobre a composição das duas aplicações, demonstrando por checagem de tipos computacional as duas identidades proposicionais para todo ponto x : S^1:

$$\forall (p : \text{base} = x), \text{decode}(x, \text{encode}(x, p)) = p$$

$$\forall (z : \text{code}(x)), \text{encode}(x, \text{decode}(x, z)) = z$$

Ao especializar essa equivalência global para o ponto base, o sistema valida o teorema fundacional da topologia sintática:

$$\Omega(S^1, \text{base}) \simeq \mathbb{Z}$$

A igualdade geométrica de caminhos contínuos superiores colapsa, por estrita simetria lógica, na estrutura aritmética interna e discreta dos números inteiros. O computador checa e

chancela o grupo fundamental do círculo verificando simplesmente a coerência gramatical do transporte de $0_{\mathbb{Z}}$ através do caminho univalente ua(succ), destituindo a matemática de qualquer necessidade de remendos analíticos ou limites euclidianos.

5.3. A Fronteira Física: Mecânica Quântica Homotópica (HQM) e o Colapso Contratível

A aplicação mais radical da Teoria de Tipos de Homotopia fora do escopo da matemática pura ocorre na física quântica fundamental, especificamente na resolução do infame Problema da Medição. Na formulação de Copenhague — estruturada sobre a matemática conjuntista de espaços de Hilbert —, o estado quântico evolui de forma contínua e determinística por meio da Equação de Schrödinger até o exato instante em que interage com um instrumento macroscópico. Nesse momento, a teoria clássica é forçada a injetar um postulado externo e *ad hoc*: o Colapso Estocástico da Função de Onda (a atualização de von Neumann-Lüders). A matemática clássica de ZFC demonstra-se incapaz de derivar o colapso a partir da dinâmica interna do sistema, tratando-o como uma quebra probabilística abrupta da realidade.

A formulação da Mecânica Quântica Homotópica (HQM), desenvolvida por Fidele Twagirayezu (2025), elimina a necessidade de axiomas estocásticos ao reescrever o formalismo quântico na linguagem dos ∞-grupoides. Na HQM, o estado de pré-medição de um sistema não é um vetor colapsável isolado, mas é modelado rigorosamente como uma classe de homotopia de caminhos contínuos habitando um ∞-topos. Todos os caminhos (representantes) dentro dessa classe são fisicamente equivalentes e capazes de gerar interferência quântica. O ato da medição é expurgado de qualquer misticismo externo: a interação informacional entre o Sistema Quântico (S) e o Aparelho de Medida (O) dentro de um ambiente compartilhado (E) é formulada estritamente como um *pullback homotópico.*

Como estabelecido no catálogo fundacional (Seção 3.5), o pullback atua como um filtro topológico sobre o espaço total de trajetórias, descrito pelo tipo derivado:

$$S \times_E O := \Sigma(s : S)\Sigma(o : O)(f(s) =_E g(o))$$

Onde reside o rigor resolutivo desta fundação? Twagirayezu (2025) demonstra que, à medida que a interação prossegue, a entropia de emaranhamento entre o sistema e o aparelho aumenta de forma contínua. Quando essa entropia ultrapassa um limiar crítico de distinguibilidade operacional (S_{crit}), a topologia do pullback ativa um funtor limitante que transforma a classe de homotopia aberta em um *tipo contrátil*. Evocando a propriedade

topológica derivada dos tipos dependentes:

$$\text{isContr}(S \times_E O) := \Sigma(c : S \times_E O)\Pi(x : S \times_E O)(c = x)$$

A mecânica desta tipagem dita que o espaço do pullback adquire um único centro de massa exato (c), e todas as outras trajetórias superpostas (x) são contínua e inevitavelmente estranguladas em direção a ele através de caminhos de identidade. Assim, o colapso quântico probabilístico clássico é formalmente substituído pela contração topológica determinística de um tipo no computador. A HQM assegura que essa retração geométrica mapeia de forma exata para a atualização de Lüders e respeita integralmente a Regra de Born (via Teorema de Busch-Gleason), unificando observador e sistema sob uma mesma gramática contínua e computável.

5.4. Teoria de Calibre Superior e *Anyons* na Computação Quântica

A capacidade da HoTT de mapear os fundamentos da física teórica estende-se também à Computação Quântica Topológica, conforme elucidado pelos trabalhos do físico matemático Urs Schreiber. Para a construção de computadores quânticos tolerantes a falhas, a pesquisa contemporânea em física baseia-se na manipulação de quasipartículas bidimensionais denominadas *anyons*. Ao contrário de bósons ou férmions clássicos, a troca de posições espaciais entre dois *anyons* não devolve o sistema ao seu estado original. As suas trajetórias entrelaçam-se no espaço-tempo, gerando complexos nós topológicos descritos por uma estrutura algébrica não-comutativa conhecida como Grupo de Tranças (*Braid Group*).

Para descrever o emaranhamento destas tranças, a física tradicional recorre a "Transformações de Calibre" (*Gauge Transformations*) formuladas sobre fibrados diferenciais clássicos em ZFC. Contudo, ao escalar o sistema para dimensões topológicas superiores, a abordagem conjuntista fratura-se, exigindo a injeção iterativa e artificial de infinitas correções de calibre para manter a consistência matemática. Schreiber (2023) argumenta que a Teoria de Tipos de Homotopia atua como a sintaxe nativa do universo para a *Higher Gauge Theory* (Teoria de Calibre Superior), precisamente porque internaliza estas transformações na base lógica da sua linguagem.

Na HoTT, uma transformação de calibre que relaciona dois estados físicos não é uma função analítica externa; ela é, por definição, o habitante primitivo do Tipo de Identidade: um caminho físico $(p : x = y)$. Consequentemente, quando os modelos quânticos exigem transformações de calibre de ordem superior (transformações *entre* transformações para desfazer nós topológicos), o ZFC entra em colapso analítico, mas a HoTT resolve o problema recursivamente. Uma transformação de calibre superior é tratada trivialmente pelo sistema

como uma homotopia bidimensional, isto é, um caminho entre caminhos ($\alpha : p =_{x=y} q$), habitando o espaço de loops iterado $\Omega^2(A, x)$.

O impacto deste isomorfismo sintático é monumental: ao expressar a física teórica na linguagem de ∞-grupoides legada por Voevodsky, o comportamento de quasipartículas e a sua topologia de calibre superior podem ser integralmente transcritos para assistentes de provas algorítmicos. O computador, liberto das infinitas fatias do conjunto euclidiano, deixa de ser uma mera calculadora de teoremas. Por meio do simples ato de checar tipagens (*type checking*), a máquina passa a simular, validar e compilar as leis do contínuo quântico.

6. Discussão

A análise das diferenças paradigmáticas e das aplicações contemporâneas da Teoria de Tipos de Homotopia (HoTT) descortina um amplo panorama de discussões epistemológicas, filosóficas e sociológicas sobre os fundamentos das ciências exatas. Sob o prisma da filosofia da ciência, destaca-se a possibilidade de realização do critério de *perspicuidade*, tal como delineado na epistemologia de J. D. North. Enquanto o sistema clássico ZFC reduz a realidade matemática a uma ontologia (ou formalismo) reducionista — na qual objetos contínuos são artificialmente fatiados em agregados discretos de conjuntos vazios recursivos (vide a codificação de von Neumann) —, a HoTT preserva a continuidade intrínseca dos espaços através de construtores de caminhos. Ao tratar o caminho contínuo como um termo primitivo intensional irredutível, o paradigma univalente demonstra uma transparência cognitiva superior para a computação quântica (e até mesmo para a topológica, levando em conta sua linguagem computacional nativa), estabelecendo um isomorfismo direto entre a sintaxe formal e a topologia dos objetos representados. Essa perspicuidade estende-se, por simetria estrutural, à física teórica contemporânea: fenômenos macroscópicos como as teorias de calibre superior (*Higher Gauge*) e o emaranhamento em topologia quântica encontram nos ∞-grupoides da HoTT a sua língua materna nativa, substituindo os remendos analíticos euclidianos por fluxos sintáticos intrínsecos de caminhos.

Esse alinhamento conceitual profundo justifica o recente fenômeno de migração acadêmica que vem reconfigurando as fronteiras da comunidade científica. Historicamente, as teorias de tipos e os assistentes de provas eram encarados como ferramentas acessórias e restritas ao domínio da ciência da computação teórica, dada a sua inclinação natural para a lógica construtiva. Contudo, matemáticos e físicos teóricos têm adotado o paradigma da univalência não por adesão estética, mas por uma exigência técnica decorrente da inadequação do formalismo conjuntista tradicional em lidar com estruturas de dimensão superior. Enquanto a fundamentação clássica impõe limites à verificação de provas complexas e exige

intervenções *ad hoc* para tratar de equivalências homotópicas, a Teoria de Tipos de Homotopia oferece uma arquitetura na qual tais estruturas são internalizadas nativamente, eliminando a dependência de remendos analíticos externos (Voevodsky, 2012; Ladyman; Presnell, 2018; Schreiber, 2023). Como o próprio Voevodsky (2010) diagnosticou após deparar-se com erros estruturais indetectáveis em suas publicações de geometria algébrica, a extensão e a complexidade das demonstrações contemporâneas superaram o limite da revisão por pares analógica. Na física, o imperativo de domar a não-comutatividade de *anyons* e o problema da medição quântica empurrou os pesquisadores rumo a um formalismo unificado, no qual os morfismos geométricos superiores operam sob o rigor de um sistema de tipagem executável, transformando a atividade matemática clássica em um exercício de engenharia de software de alta precisão.

As implicações filosóficas dessa transição reformatam as bases da ontologia e da pragmática da descoberta matemática. Sob o Isomorfismo de Curry-Howard, que unifica proposições a tipos e provas a programas, a verdade matemática transcende o dualismo entre a descoberta platônica de universos abstratos e a manipulação formalista de símbolos, passando a ser atestada pela testemunha computacional (o *habitante* ou construtor) do sistema. A automação da verificação de teoremas por meio de linguagens dependentes (Lean, Agda, Coq) ressignifica o conceito de demonstração: uma prova deixa de ser um texto argumentativo em prosa corrida, sujeito a falhas de interpretação e lacunas cognitivas humanas, e ascende à condição de um objeto computável e autoevidente chancelado pelo compilador (*type checking*). Essa virada ontológica adota necessariamente uma postura intuicionista (construtivista), na qual a asserção de existência de uma estrutura está indissociavelmente ligada à exibição do algoritmo exato capaz de a gerar, fornecendo um ambiente fundacional estruturalmente protegido contra paradoxos de autorreferência e inconsistências circulares.

Por outro lado, a consolidação da HoTT como fundação autônoma de substituição ao ZFC enfrenta severas limitações técnicas e um forte atrito cultural. O primeiro grande entrave manifesta-se na *supercomplicação* de conceitos matemáticos que são triviais e intuitivos na abordagem conjuntista clássica. Operar aritmética elementar, estruturas discretas ou álgebra linear de matrizes finitas em HoTT impõe o fardo de carregar dados homotópicos e caminhos de igualdade de dimensões superiores indesejadas, obrigando o pesquisador a recorrer constantemente ao artifício do truncamento proposicional para "esmagar" a geometria do espaço e simular a simplicidade bi-valorada dos conjuntos puros do H-level 2. Adicionalmente, a renúncia ao uso irrestrito do Princípio do Terceiro Excluído e do Axioma da Escolha clássico colide frontalmente com séculos de intuição em análise funcional e topologia geral, exigindo uma reescrita hercúlea e contra-intuitiva de teoremas consolidados.

Soma-se a isso o bloqueio computacional da formulação original de Voevodsky, na qual a univalência foi introduzida como um axioma opaco que interrompia a computabilidade direta das provas (provocando o "emperramento" do algoritmo de normalização na máquina), limitação que desencadeou a transição contemporânea em direção à complexa maquinaria da *Cubical Type Theory*. Finalmente, a severa curva de aprendizagem e a fusão de papéis entre o provar e o programar impõem uma barreira psicológica institucional severa sobre o matemático tradicional, sinalizando que o triunfo definitivo das fundações univalentes depende da formação de uma nova geração de cientistas, cuja intuição geométrica seja nativamente indissociável da gramática dos computadores.

Claro está que a perceção desta última problemática desenvolve-se sob uma perspetiva puramente monista (ou fundacionalista estrita) da matemática, pressupondo que a disciplina exige uma única matriz unificadora. Esta premissa vai de encontro ao pluralismo pragmático frequentemente adotado no discurso do matemático tradicional contemporâneo, que perceciona os objetos matemáticos e os seus sistemas construtivos como enquadramentos coerentes e consistentes pertinentes estritamente aos alvos práticos a que se destinam. Neste sentido, o critério de perspicuidade supramencionado é relativizado: ele realiza-se a partir do alinhamento específico entre o sistema formal escolhido e o objeto visado. Se o objetivo é modelar ordinais transfinitos de alta cardinalidade ou espaços funcionais clássicos de equações diferenciais, a teoria de conjuntos analítica do ZFC demonstra ser a linguagem mais perspícua e intuitiva; em contrapartida, se o alvo é o cálculo de invariantes em topologia algébrica, colagens celulares ou a mecânica de tranças de quasipartículas, a HoTT revela-se estruturalmente mais alinhada. Será, desta forma, esta nova fundamentação construtivista tratada sociologicamente da mesma maneira como encaramos o latim e o grego antigo na filosofia e nas ciências históricas? Ou seja, consistirá a HoTT num domínio técnico de nicho que apenas uma elite especializada de programadores passará a carreira a estudar, com o fito exclusivo de dar suporte de tradução e certificação em assistentes de provas para a comunidade padrão de matemáticos e físicos que continuarão, intuitivamente, a esboçar as suas obras brutas na intuição conjuntista de ZFC?

7. Conclusão

A panorâmica fundacional e histórica traçada ao longo deste trabalho estipula que a transição da Teoria dos Conjuntos (ZFC) para a Teoria de Tipos de Homotopia (HoTT) transcende o estatuto de uma mera disputa de linguagens, configurando uma autêntica ruptura ontológica e pragmática na atividade científica contemporânea. O esgotamento do modelo conjuntista clássico — diagnosticado por Vladimir Voevodsky diante da intratabilidade computacional de quocientes infinitos e da opacidade analítica do fatiamento de objetos contínuos num

agregado de conjuntos vazios — encontrou na univalência uma resposta metodológica perspícua. Ao internalizar o conceito de caminho contínuo como um termo intensional primitivo e fundir, sob o isomorfismo de Curry-Howard, a lógica, a geometria e a computação, a HoTT devolveu a dignidade conceitual ao *continuum*, permitindo que a alta dimensionalidade dos ∞-grupoides seja domada nativamente através de regras estritas de checagem de tipos (*type checking*).

A fertilidade prática deste novo paradigma demonstrou-se irrefutável na resolução de questões complexas nas fronteiras da investigação tanto na matemática pura quanto na física teórica. A maquinaria sintática dos Tipos Indutivos Superiores (HITs), operada recursivamente por meio do método *Encode-Decode*, facultou uma brevidade e clareza inéditas para a formalização do Teorema de Blakers-Massey e para o cálculo imediato do Grupo Fundamental do Círculo ($\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$), libertando o investigador da necessidade hercúlea de gerir e provar manualmente relações de equivalência externas e transportes de isomorfismos complexos. No flanco da física matemática, a HoTT revelou-se uma sintaxe adequada para descodificar o universo quântico: o Problema da Medição foi purgado de axiomas estocásticos externos ao modelar o colapso como uma retração geométrica determinística de um tipo contrátil em um pullback homotópico, enquanto as tranças de *anyons* na computação quântica topológica foram nativamente absorvidas pelas 2-células de uma Teoria de Calibre Superior (*Higher Gauge Theory*).

Em última análise, o destino histórico da HoTT não parece inclinar-se para um monismo revolucionário que decrete a aniquilação absoluta do ZFC, mas sim para a consolidação de um pluralismo pragmático e bilíngue (ou poliglota). O sistema conjuntista tradicional preserva a sua perspicuidade e intuição direta sobre domínios discretos ou na análise funcional clássica; em contrapartida, a HoTT assume uma centralidade insubstituível na topologia de alta dimensionalidade e na certificação automatizada de sistemas complexos (Schreiber, 2023). À luz da analogia sociológica proposta nesta discussão, a HoTT desponta como o "latim" ou o "grego antigo" da era digital: uma linguagem fundacional rigorosa e exaustiva, cultivada por uma elite de engenheiros de verificação e lógicos formais, cujo propósito exclusivo será traduzir, codificar e conferir imunidade a paradoxos às obras brutas e intuitivas esboçadas pela maioria dos matemáticos e físicos na tradicional linguagem dos conjuntos. No século XXI, o fluxo do pensamento lógico e a deformação espacial contínua operam, formalmente, sob a mesma chancela algorítmica.

O que unifica esta longa jornada — da definição de um ponto base nos tipos indutivos até a estrutura de categorias — é a percepção de que a HoTT não é apenas uma nova linguagem para fazer matemática, mas a descoberta de que a sintaxe lógica é, em si, um corpo

geométrico. Ao codificarmos uma prova, não estamos apenas verificando a verdade de uma afirmação; estamos 'esculpindo' o espaço onde essa verdade habita. Assim, a Teoria de Tipos de Homotopia é, de certa maneira, o sistema onde o provar e o construir tornam-se um único gesto indivisível.

8. Referências

COQUAND, Thierry. **Voevodsky's Univalent Foundation of Mathematics**. [S. l.: s. n.], 2014. Notas de aula/Slides de apresentação.

GRAYSON, Daniel R. An introduction to univalent foundations for mathematicians. **Bulletin of the American Mathematical Society**, Providence, v. 55, n. 4, p. 427-450, 2018.

HOMOTOPY Type Theory Explained: A New Foundation for Mathematics. [S. l.: s. n.], 2025-. 1 playlist de vídeos. YouTube. Disponível em: https://www.youtube.com/playlist?list=PLFMMwXV6jh1QZhEgJE-LhlmHQWzyP0GPe. Acesso em: 23 jun. 2026.

LADYMAN, James; PRESNELL, Stuart. Does Homotopy Type Theory Provide a Foundation for Mathematics? **The British Journal for the Philosophy of Science**, Oxford, v. 69, n. 2, p. 377-420, 2018.

NORTH, Jill. *On Perspicuous Representation on Physics*. In: Journal for General Philosophy of Science, 2026.

SCHREIBER, Urs. Urs Schreiber – Quantum (Physics, Computing), Topos & Homotopy Theory. Entrevistadores: About Logic Podcast. *In*: **About Logic Podcast**, [S. l.], ep. 12, 2023. Podcast. Disponível em: Urs Schreiber – Quantum (Physics, Computing), Topos & Homotopy Theory | #12 aboutlogic. Acesso em: 26 jun. 2026.

THE UNIVALENT FOUNDATIONS PROGRAM. **Homotopy Type Theory**: Univalent Foundations of Mathematics. Princeton: Institute for Advanced Study, 2013.

TWAGIRAYEZU, Fidele. **The Theory of Homotopical Quantum Mechanics and the Measurement Problem**. Los Angeles: UCLA, Qeios, Preprint, 13 ago. 2025. DOI: https://doi.org/10.32388/KVZUDB. Disponível em: https://www.qeios.com/read/KVZUDB. Acesso em: 26 jun. 2026.

VOEVODSKY, Vladimir. **Univalent Foundations of Mathematics**. [S. l.: s. n.], 2012. Palestra gravada. Disponível em: https://youtu.be/9f4pS9s-X2A?si=b6Dyuiu75NLWn7if.

Acesso em: 25 jun. 2026.

VOEVODSKY, Vladimir. **What if Current Foundations of Mathematics are Inconsistent?** Princeton: Institute for Advanced Study (IAS), 2016. Palestra gravada em 2010. Disponível em: https://youtu.be/O45LaFsaqMA?si=7Va_mza53NBfI94v. Acesso em: 25 jun. 2026.