



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 1.2 - Curvas em $\mathbb{R}^2$

Exercícios principais

Última atualização: 20 de abril de 2026.

P1. Em cada item, faça o gráfico da função e encontre duas parametrizações de orientações opostas cujos traços sejam o gráfico da função dada. Nas parametrizações escolhidas, indique os pontos inicial e final da curva.

(a) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$.

(b) $f(x) = 2x - 1$, $x \in [-1, 2]$.

P2. Em cada item, faça o gráfico da equação e encontre duas parametrizações de orientações opostas cujos traços sejam o gráfico da equação dada. Nas parametrizações escolhidas, indique os pontos inicial e final da curva. Quando a curva for fechada, indique o sentido da orientação.

(a) $y^2 - x = 0$, $x \in [0, 4]$.

(b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, $x \in [1, 4]$.

(d) $y^2 - x^2 = 1$, $y \in [1, \sqrt{2}]$.

P3. Em cada item, encontre uma parametrização do segmento de reta com pontos inicial e final dados de tal forma que o parâmetro varie no intervalo $[0, 1]$.

(a) Ponto inicial: $(1, 4)$; ponto final: $(3, 9)$.

(b) Ponto inicial: $(3, 9)$; ponto final: $(1, 4)$.

P4. Em cada item, faça o gráfico da curva dada pela equação em coordenadas polares. Para a variação de θ indicada, determine: (i) pontos inicial e final, (ii) se a curva é fechada, (iii) o sentido no caso de a curva ser fechada, (iv) se a curva possui autointerseções, (v) o número de regiões limitadas determinadas pela curva e (vi) uma parametrização para a curva.

(a) $r = 2$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

(b) $r = 2$, $\theta \in [0, 4\pi]$.

(c) $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r \in [-\sqrt{2}, 3]$.

(d) $r = 3 \cos \theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(e) $r = 1 - 2 \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

P5. Sejam A e B duas partículas cujas equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} x_A(t) = t \\ y_A(t) = t^2 \end{cases}, \quad t \in [-3, 3] \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_B(t) = 2t - 2 \\ y_B(t) = -4t^2 + 8t + 4 \end{cases}, \quad t \in [-2, 3].$$

(a) Determine todos os pontos de interseção entre as duas trajetórias.

(b) Determine todos os pontos de colisão entre as duas trajetórias.

P6. Considere as parametrizações

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos t \\ y_A(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi];$$

$$\begin{cases} x_C(t) = \cos t \\ y_C(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 3\pi];$$

$$\begin{cases} x_E(t) = \cos t \\ y_E(t) = -\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$\begin{cases} x_G(t) = \cos(2t) \\ y_G(t) = \sin(2t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi];$$

$$\begin{cases} x_I(t) = \cos t \\ y_I(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [-\pi, \pi];$$

$$\begin{cases} x_B(t) = \cos t \\ y_B(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$\begin{cases} x_D(t) = \cos t \\ y_D(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 4\pi];$$

$$\begin{cases} x_F(t) = \cos(2t) \\ y_F(t) = \sin(2t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$\begin{cases} x_H(t) = \cos(10t) \\ y_H(t) = \sin(10t) \end{cases}, \quad t \in [0, \frac{2\pi}{5}];$$

$$\begin{cases} x_J(t) = \cos(5t) \\ y_J(t) = \sin(5t) \end{cases}, \quad t \in [0, \frac{2\pi}{5}].$$

- (a) Quais parametrizações possuem o mesmo traço?
- (b) Quais parametrizações possuem traços fechados?
- (c) Quais parametrizações determinam curvas fechadas?
- (d) Dentre as curvas fechadas, quais possuem o mesmo sentido?
- (e) Dentre as curvas fechadas, quais possuem o mesmo ponto inicial?
- (f) Dentre as curvas fechadas, quais o mesmo número de voltas?
- (g) Quais parametrizações determinam a mesma curva?

P7. Considere a curva parametrizada

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = t^2 - 3e^t + 2 \end{cases}, \quad t \in [0, 5].$$

Escreva outras possíveis formas de notação para essa curva. *Observação.* Você não precisa fazer nenhuma conta aqui, apenas praticar as outras notações para não ter dificuldade caso elas apareçam no futuro.

P8. Em cada item, calcule $\alpha'(t)$, $\|\alpha'(t)\|$, $\alpha'(t_0)$ e $\|\alpha'(t_0)\|$.

- (a) $\alpha(t) = (2t^2, 3t + 1)$ e $t_0 = 1$.
- (b) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ e $t_0 = 0$.
- (c) $\alpha(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ e $t_0 = 0$.
- (d) $\alpha(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ e $t_0 = 0$.



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 1.2 - Curvas em $\mathbb{R}^2$

Exercícios complementares

C1. Faça o gráfico da curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, em que $x(t)$ e $y(t)$ são dados por

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi t), & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ -1 - \cos(\pi t), & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ 2t - 6, & \text{se } 2 \leq t \leq 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad y(t) = \begin{cases} \text{sen}(\pi t), & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ -\text{sen}(\pi t), & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ 4 - 2t, & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ 2t - 8, & \text{se } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}.$$

MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 1.2

Exercícios principais

P1.

(a) Duas possíveis parametrizações:

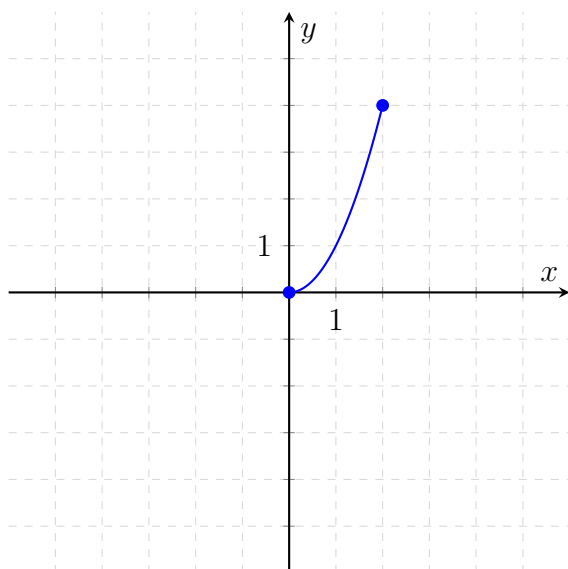
$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in [0, 2];$$

Ponto inicial: $(0, 0)$. Ponto final: $(2, 4)$.

$$\begin{cases} x(t) = 2 - t \\ y(t) = (2 - t)^2 \end{cases}, t \in [0, 2].$$

Ponto inicial: $(2, 4)$. Ponto final: $(0, 0)$.

Gráfico da função:



(b) Duas possíveis parametrizações:

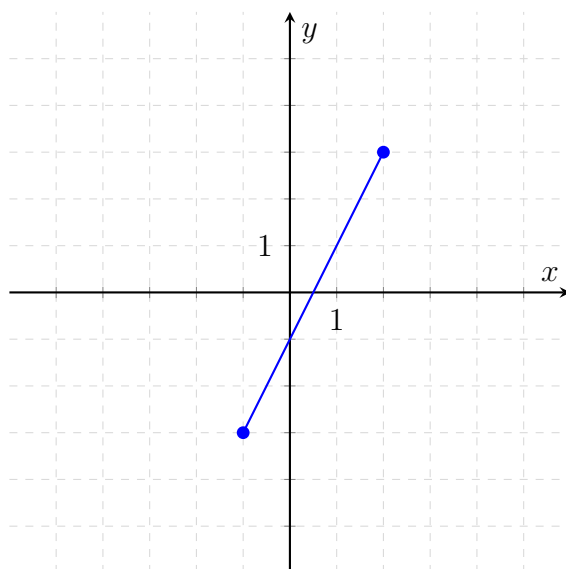
$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t - 1 \end{cases}, t \in [-1, 2];$$

Ponto inicial: $(-1, -3)$. Ponto final: $(2, 3)$.

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = -2t + 1 \end{cases}, t \in [-1, 2].$$

Ponto inicial: $(2, 3)$. Ponto final: $(-1, -3)$.

Gráfico da função:



P2.

(a) Duas possíveis parametrizações:

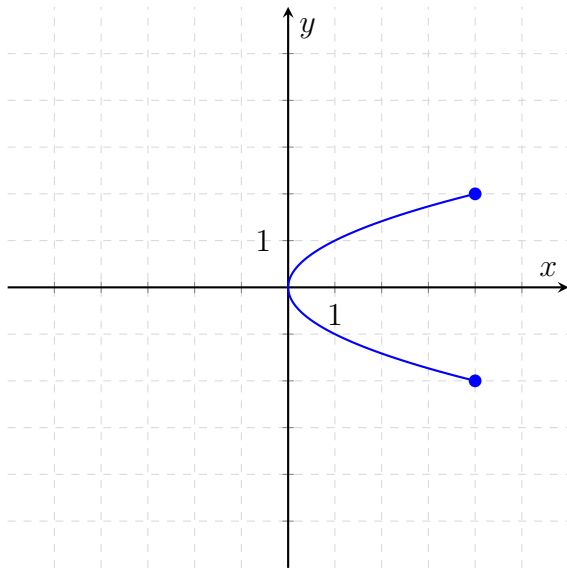
$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}, \quad t \in [-2, 2];$$

Ponto inicial: $(4, -2)$. Ponto final: $(4, 2)$.

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = -t \end{cases}, \quad t \in [-2, 2].$$

Ponto inicial: $(4, 2)$. Ponto final: $(4, -2)$.

Gráfico da equação:



(b) Duas possíveis parametrizações:

$$\begin{cases} x(t) = 4 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi];$$

Ponto inicial: $(4, 0)$. Ponto final: $(4, 0)$.

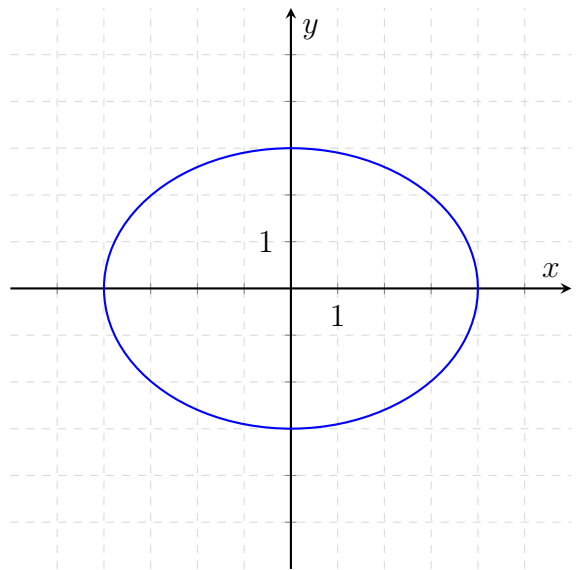
Sentido: anti-horário.

$$\begin{cases} x(t) = 4 \cos t \\ y(t) = -3 \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ponto inicial: $(4, 0)$. Ponto final: $(4, 0)$.

Sentido: horário.

Gráfico da equação:



(c) Duas possíveis parametrizações:

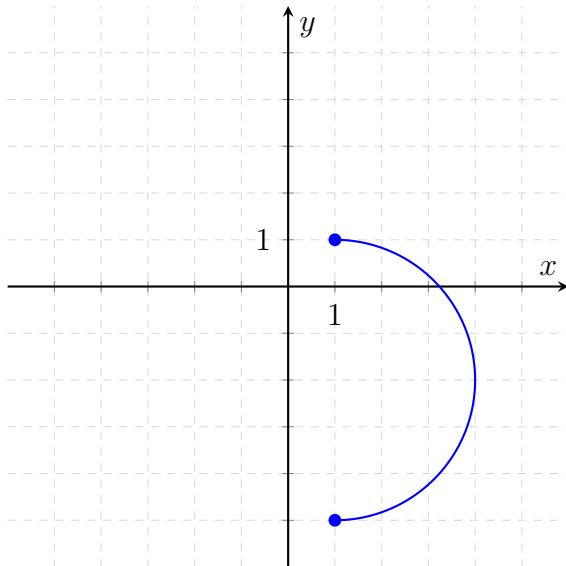
$$\begin{cases} x(t) = 1 + 3 \cos t \\ y(t) = -2 + 3 \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

Ponto inicial: $(1, -5)$. Ponto final: $(1, 1)$.

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 3 \cos t \\ y(t) = -2 - 3 \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ponto inicial: $(1, 1)$. Ponto final: $(1, -5)$.

Gráfico da equação:



(d) Duas possíveis parametrizações:

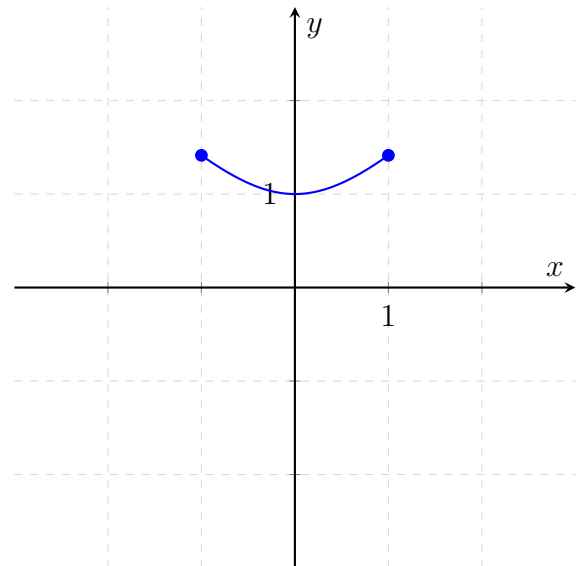
$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{tg} t \\ y(t) = \sec t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right];$$

Ponto inicial: $(-1, \sqrt{2})$. Ponto final: $(1, \sqrt{2})$.

$$\begin{cases} x(t) = -\operatorname{tg} t \\ y(t) = \sec t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Ponto inicial: $(1, \sqrt{2})$. Ponto final: $(-1, \sqrt{2})$.

Gráfico da equação:



P3.

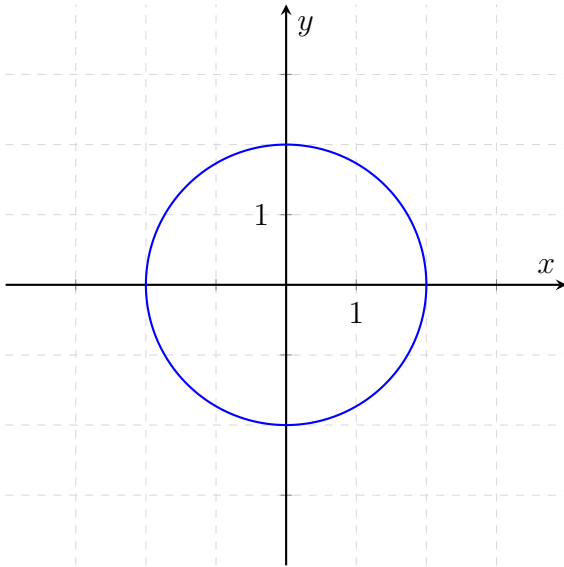
(a)
$$\begin{cases} x(t) = 1 + (3 - 1)t = 1 + 2t \\ y(t) = 4 + (9 - 4)t = 4 + 5t \end{cases}.$$

(b)
$$\begin{cases} x(t) = 3 + (1 - 3)t = 3 - 2t \\ y(t) = 9 + (4 - 9)t = 9 - 5t \end{cases}.$$

P4.

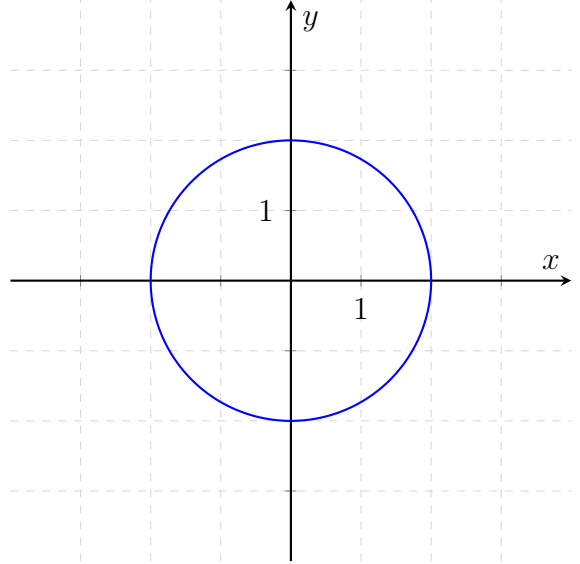
- (a) Ponto inicial: $(2, 0)$, ponto final: $(2, 0)$; curva fechada; sentido anti-horário; possui autointerseção apenas nos extremos da curva, no ponto $(2, 0)$; uma região limitada determinada pela curva.

$$\begin{cases} x(\theta) = 2 \cos \theta \\ y(\theta) = 2 \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi].$$



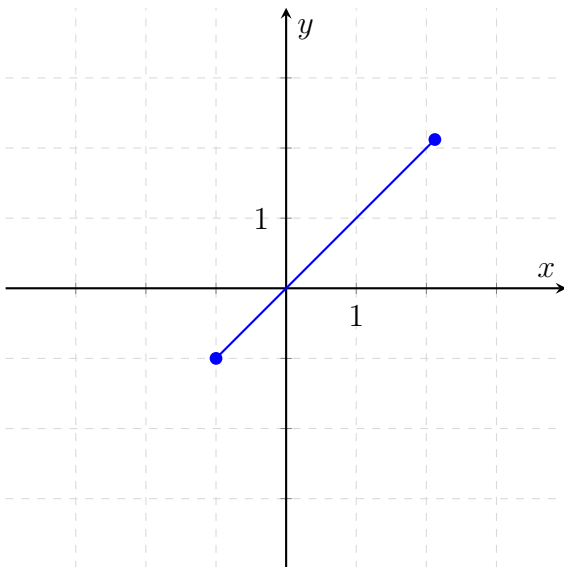
- (b) Ponto inicial: $(2, 0)$, ponto final: $(2, 0)$; curva fechada; sentido anti-horário; a curva dá duas voltas, tendo autointerseção em todos os pontos; uma região limitada determinada pela curva.

$$\begin{cases} x(\theta) = 2 \cos \theta \\ y(\theta) = 2 \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 4\pi].$$



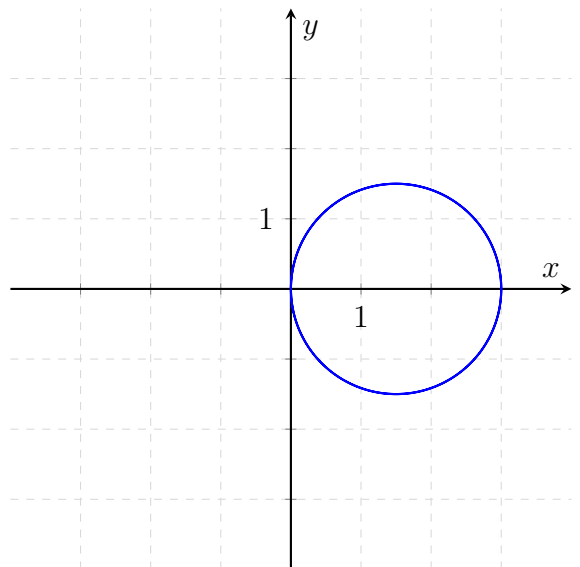
- (c) Ponto inicial: $(-1, -1)$, ponto final: $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$; curva aberta; a curva não possui autointerseção; nenhuma região limitada determinada pela curva.

$$\begin{cases} x(r) = \frac{r\sqrt{2}}{2} \\ y(r) = \frac{r\sqrt{2}}{2} \end{cases}, r \in [-\sqrt{2}, 3].$$



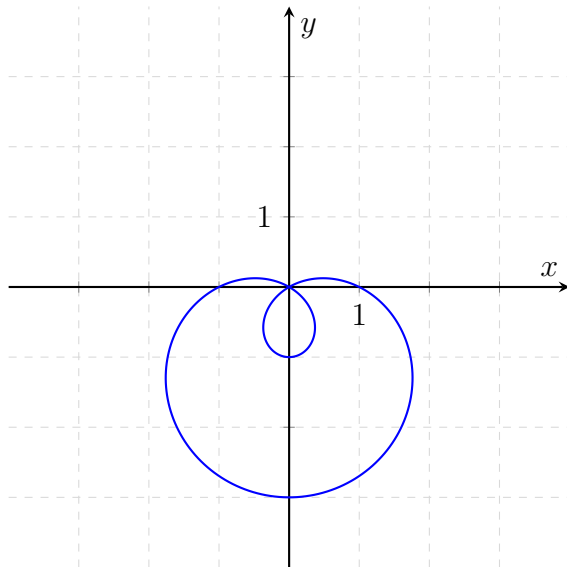
- (d) Ponto inicial: $(0, 0)$, ponto final: $(0, 0)$; curva fechada; sentido anti-horário; possui autointerseção apenas nos extremos da curva, no ponto $(0, 0)$; uma região limitada determinada pela curva.

$$\begin{cases} x(\theta) = 3 \cos^2 \theta \\ y(\theta) = 3 \sin \theta \cos \theta \end{cases}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$



- (e) Ponto inicial: $(1, 0)$, ponto final: $(1, 0)$; curva fechada; sentido anti-horário; possui autointerseção nos extremos da curva (ponto $(1, 0)$) e também no ponto $(0, 0)$; duas regiões limitadas determinadas pela curva.

$$\begin{cases} x(\theta) = (1 - 2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta \\ y(\theta) = (1 - 2 \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi].$$



P5.

- (a) Ambas as trajetórias de A e B passam pelos pontos $(-2, 4)$ e $(2, 4)$.
 (b) As trajetórias de A e B colidem no ponto $(2, 4)$.

P6.

- (a) Exceto A , todas as outras possuem o mesmo traço.
 (b) Exceto A , todas as outras possuem traço fechado.
 (c) Exceto A e C , todas as outras são curvas fechadas.
 (d) E possui sentido horário; B, D, F, G, H, I e J possuem sentido anti-horário.
 (e) B, D, E, F, G, H e J possuem ponto inicial $(1, 0)$ e I possui ponto inicial $(0, -1)$.
 (f) B, E, G, I e J dão uma volta; D, F e H dão duas voltas.
 (g) B, G e J são a mesma curva; D, F e H são a mesma curva.

P7. Abaixo, estão listadas algumas variações das escritas (em algumas delas foram usados nomes para as curvas α e $\mathbf{r}$, que são os nomes mais comuns).

- $\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = t^2 - 3e^t + 2 \end{cases}, 0 \leq t \leq 5.$
- $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t^2 - 3e^t + 2 \end{cases}, t \in [0, 5].$
- $\alpha: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t^2 - 3e^t + 2 \end{cases}, t \in [0, 5].$
- $x = 1 + 2t, y = t^2 - 3e^t + 2, t \in [0, 5].$
- $(x(t), y(t)) = (1 + 2t, t^2 - 3e^t + 2), t \in [0, 5].$

- $(x, y) = (1 + 2t, t^2 - 3e^t + 2), t \in [0, 5]$.
- $(1 + 2t, t^2 - 3e^t + 2), t \in [0, 5]$.
- $\langle 1 + 2t, t^2 - 3e^t + 2 \rangle, t \in [0, 5]$.
- $\alpha(t) = (1 + 2t, t^2 - 3e^t + 2), t \in [0, 5]$.
- $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 2t, t^2 - 3e^t + 2 \rangle, t \in [0, 5]$.
- $(1 + 2t)\vec{i} + (t^2 - 3e^t + 2)\vec{j}, t \in [0, 5]$.
- $\vec{\alpha}(t) = (1 + 2t)\vec{i} + (t^2 - 3e^t + 2)\vec{j}, t \in [0, 5]$.
- $\begin{array}{ccc} [0, 5] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (1 + 2t, t^2 - 3e^t + 2). \end{array}$
- $\begin{array}{ccc} \alpha : [0, 5] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (1 + 2t, t^2 - 3e^t + 2). \end{array}$
- $\begin{array}{ccc} \alpha : [0, 5] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \alpha(t) = (1 + 2t, t^2 - 3e^t + 2). \end{array}$

P8.

- (a) $\alpha'(t) = (4t, 3); \|\alpha'(t)\| = \sqrt{16t^2 + 9}; \alpha'(t_0) = (4, 3)$ e $\|\alpha'(t_0)\| = 5$.
- (b) $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t); \|\alpha'(t)\| = 1; \alpha'(t_0) = (0, 1)$ e $\|\alpha'(t_0)\| = 1$.
- (c) $\alpha'(t) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t)); \|\alpha'(t)\| = 2; \alpha'(t_0) = (0, 2)$ e $\|\alpha'(t_0)\| = 2$.
- (d) $\alpha'(t) = (-\omega \sin(\omega t), \omega \cos(\omega t)); \|\alpha'(t)\| = \omega; \alpha'(t_0) = (0, \omega)$ e $\|\alpha'(t_0)\| = \omega$.

MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 1.2

Exercícios complementares

C1.

