

MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 1.3 - Regiões em $\mathbb{R}^2$

Exercícios principais

Última atualização: 30 de março de 2026.

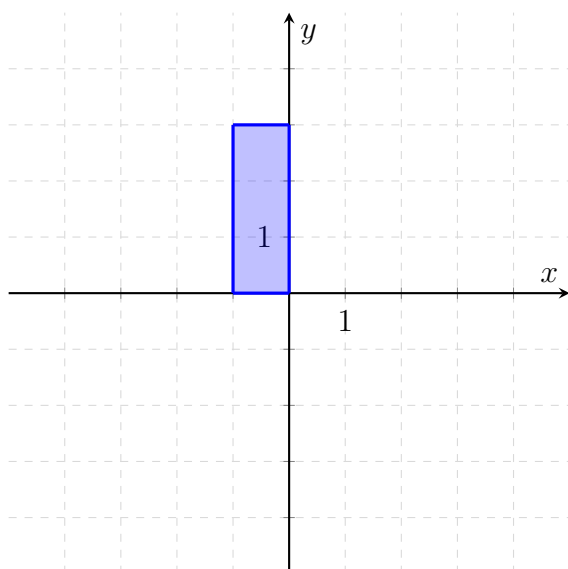
P1. Em cada item, descreva os produtos cartesianos de intervalos na forma gráfica e também como variação de dois parâmetros.

(a) $[1, 3] \times [2, 4]$.

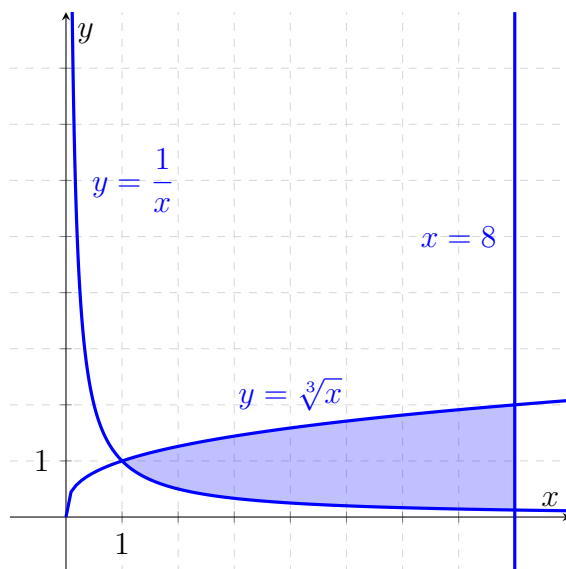
(b) $[-3, 2] \times [-2, 0]$.

P2. Em cada item, descreva a figura como variação de dois parâmetros e também, quando possível, como produto cartesiano de intervalos.

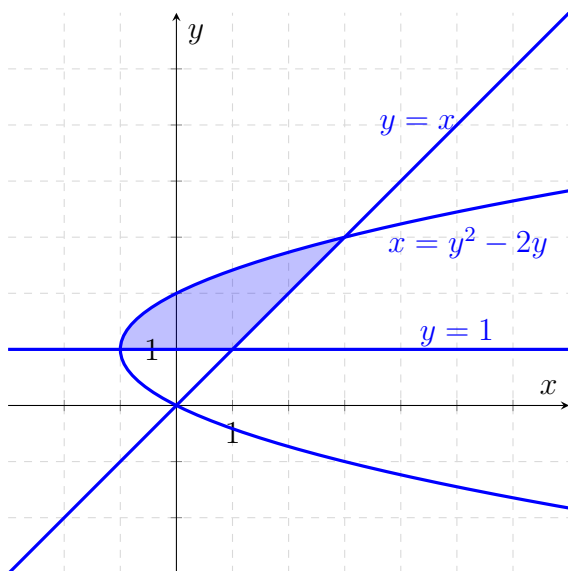
(a)



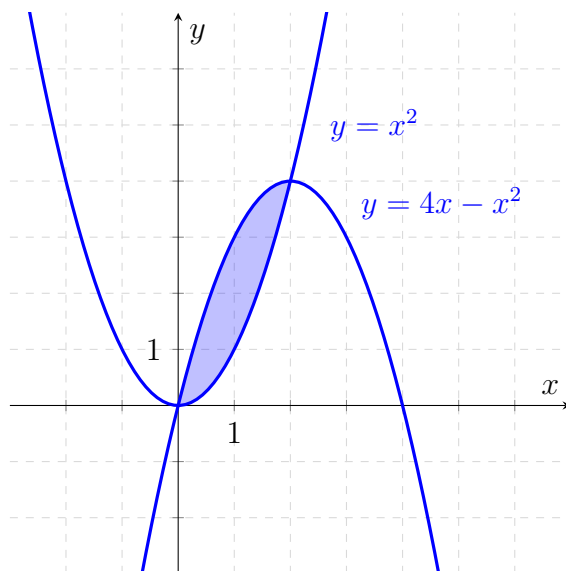
(b)



(c)



(d)



P3. Em cada item, descreva a variação dos dois parâmetros na forma gráfica.

(a) $-2 \leq y \leq 1$ e $y \leq x \leq 2 - y^2$.

(b) $-1 \leq x \leq 1$ e $x^2 \leq y \leq x^2 + 1$.

P4. Em cada item, encontre uma outra descrição para a região R invertendo a ordem dos parâmetros.

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ e } 3y \leq x \leq 3\}$. (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq 1\}$.

(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$. (d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ e } \frac{y}{2} \leq x \leq 1\}$.

(e) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ e } \sqrt{x} \leq y \leq 2\}$. (f) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x \leq y \leq 1\}$.

P5. Em cada item, descreva o conjunto solução da(s) inequação(ões) como variação de dois parâmetros.

(a) $y \leq x^2$, $x \geq 2$, $x \leq 4$ e $y \geq 0$.

(b) $x \geq 2y^2$ e $x \leq 4 + y^2$.

P6. Em cada item, descreva a região delimitada pelas curvas como variação de dois parâmetros.

(a) $y = \sin(2x)$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = 0$.

(b) $y = \sqrt{x-1}$ e $x - y = 1$.

P7. Em cada item, encontre a matriz jacobiana e calcule o jacobiano para a transformação dada.

(a) $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases}$.

(c) $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(d) $\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(e) $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(f) $\begin{cases} x = u^2 + uv \\ y = uv^2 \end{cases}$.

(g) $\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases}$.

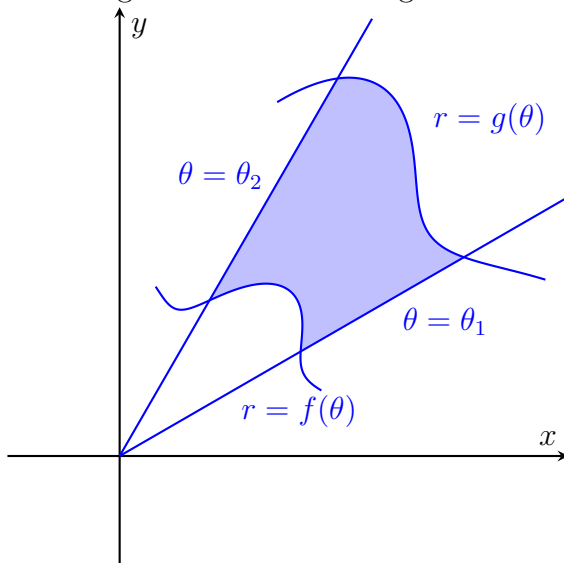
P8. Em cada item, utilize a transformação dada pelas coordenadas polares para descrever por variação de r e θ a região R do plano xy .

(a) R é a região interna à circunferência centrada na origem de raio a .

(b) R é o semicírculo centrado na origem de raio a nos quadrantes 1 e 2.

(c) R é a região acima do eixo x , externa à curva $x^2 + y^2 = a^2$ e interna à curva $x^2 + y^2 = b^2$. Considere $b > a$.

(d) R é a região sombreada da figura abaixo.



(e) R é a região interna à curva $r = 2 \cos \theta$.

P9. Em cada item, utilize a transformação dada para descrever por variação dos parâmetros a região do plano uv correspondente à região R do plano xy .

(a) $\begin{cases} x = 2u + 3v \\ y = 5u + v \end{cases}$ e R é o paralelogramo gerado pelos vetores $\vec{p} = (2, 5)$ e $\vec{q} = (3, 1)$.

(b) $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$ e R é a região do primeiro quadrante limitada pelas equações $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$ e $y = 4x$.

(c) $\begin{cases} x = au \cos v \\ y = bu \sin v \end{cases}$ e R é a região limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

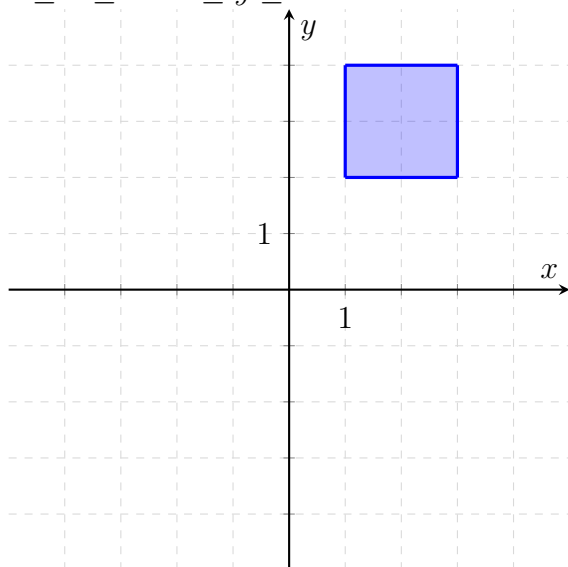
MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 1.3

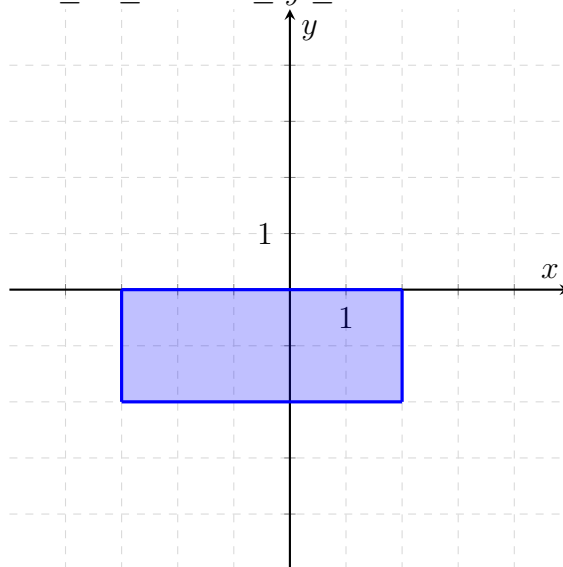
Exercícios principais

P1.

(a) $1 \leq x \leq 3$ e $2 \leq y \leq 4$.



(b) $-3 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 0$.



P2.

(a) $-1 \leq x \leq 0$ e $0 \leq y \leq 3$;
 $[-1, 0] \times [0, 3]$.

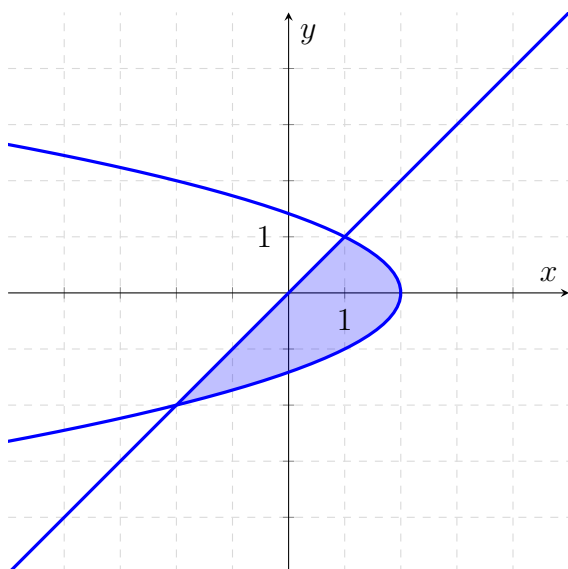
(c) $1 \leq y \leq 3$ e $y^2 - 2y \leq x \leq y$.

(b) $1 \leq x \leq 8$ e $\frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt[3]{x}$.

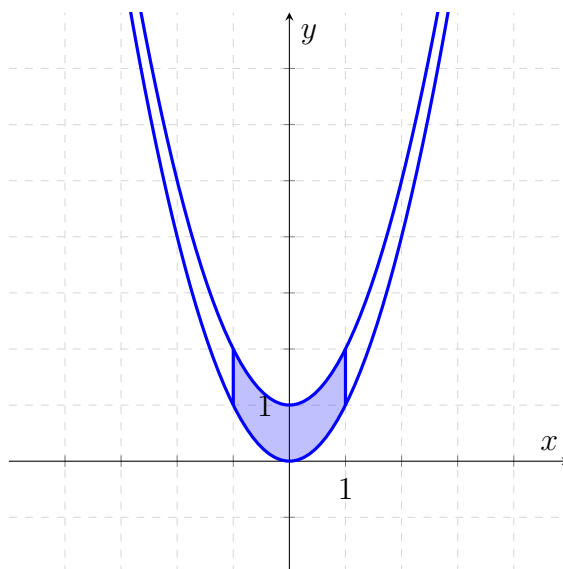
(d) $0 \leq x \leq 2$ e $x^2 \leq y \leq 4x - x^2$.

P3.

(a)



(b)



P4.

- (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{x}{3}\}$. (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$.
(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq x \leq y^2\}$. (d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2x\}$.
(e) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ e } 0 \leq x \leq y^2\}$. (f) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ e } 0 \leq x \leq y\}$.

P5.

- (a) $2 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq x^2$. (b) $-2 \leq y \leq 2 \text{ e } 2y^2 \leq x \leq 4 + y^2$.

P6.

- (a) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ e } 0 \leq y \leq \sin(2x)$. (b) $1 \leq x \leq 2 \text{ e } x - 1 \leq y \leq \sqrt{x - 1}$.

P7.

- (a) $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}, \quad J = r.$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{bmatrix}, \quad J = 4u^2 + 4v^2.$
(c) $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad J = ad - bc.$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad J = ab.$
(e) $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix}, \quad J = abr.$ (f) $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u + v & u \\ v^2 & 2uv \end{bmatrix}, \quad J = uv(4u + v).$
(g) $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{bmatrix}, \quad J = e^{2u}.$

P8.

- (a) $0 \leq r \leq a \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi$. (b) $0 \leq r \leq a \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi$.
(c) $a \leq r \leq b \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi$. (d) $f(\theta) \leq r \leq g(\theta) \text{ e } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.
(e) $0 \leq r \leq 2 \cos \theta \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

P9.

- (a) $0 \leq u \leq 1 \text{ e } 0 \leq v \leq 1$. (b) $1 \leq u \leq 4 \text{ e } 1 \leq v \leq 4$. (c) $0 \leq u \leq 1 \text{ e } 0 \leq v \leq 2\pi$.