



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 1.4 - Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Exercícios principais

Última atualização: 16 de abril de 2025.

P1. Em cada item, faça o gráfico da superfície dada pela equação.

- | | |
|---|--|
| (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. | (b) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$. |
| (c) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} - \frac{z^2}{4^2} = 1$. | (d) $-\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$. |
| (e) $z = x^2 + y^2$. | (f) $z^2 = x^2 + y^2$. |
| (g) $x^2 + y^2 = 9$. | (h) $y = x^2$. |
| (i) $z = 3$. | (j) $y = 3$. |
| (k) $x = 3$. | (l) $2x - 3z = 6$. |

P2. Em cada item, determine uma parametrização para a superfície descrita.

- (a) Plano que contém o ponto $(2, -1, 1)$ e é paralelo aos vetores $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -1)$.
- (b) A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante.
- (c) A parte da superfície $z = 1 + 3x + 3y^2$ cuja projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(2, 1, 0)$.
- (d) A parte da superfície $y = 4x + z^2$ que se encontra entre os planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.

P3. Em cada item, utilize coordenadas cilíndricas para determinar uma parametrização para a superfície descrita.

- (a) A parte do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ que está entre os planos $z = 0$ e $z = 5$.
- (b) A parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que está entre os planos $z = 0$ e $z = 1 + x$.
- (c) A parte do plano $z = x + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- (d) A parte do parabolóide $y = x^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + z^2 = 16$.
- (e) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
- (f) A parte do cone $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ que está entre os planos $y = 0$ e $y = 5$.

P4. Em cada item, utilize coordenadas esféricas para determinar uma parametrização para a superfície descrita.

- (a) A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
- (b) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está acima do plano xy .
- (c) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (d) A parte esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está entre os planos $y = 0$ e $y = x$ e com $x \geq 0$.

- (e) A parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
 (f) A parte do plano $z = 2$ que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

P5. Em cada item, calcule $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ e $||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||$ (ou seus correspondentes em itens nos quais os parâmetros não são u e v).

(a)
$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = -1 - u + v \\ z = 1 - v \end{cases}.$$

(b)
$$\begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \\ z = z \end{cases}.$$

(c)
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 3 + r \cos \theta \end{cases}.$$

(d)
$$\begin{cases} x = 3 \sin \phi \cos \theta \\ y = 3 \sin \phi \sin \theta \\ z = 3 \cos \phi \end{cases}.$$

(e)
$$\begin{cases} x = \frac{\rho\sqrt{2} \cos \theta}{2} \\ y = \frac{\rho\sqrt{2} \sin \theta}{2} \\ z = \frac{\rho\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

P6. Em cada item, parametrize a superfície, calcule $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ (ou equivalente no caso de parâmetros diferentes de u e v) e explique o sentido dos vetores $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ e $\vec{r}_v \times \vec{r}_u$. *Sugestão.* Use as parametrizações já feitas nos exercícios **P2.**, **P3.** e **P4.** e os vetores já calculados no exercício **P5.**.

- (a) Plano que contém o ponto $(2, -1, 1)$ e é paralelo aos vetores $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -1)$.
 (b) A parte do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ que está entre os planos $z = 0$ e $z = 5$.
 (c) A parte do plano $z = x + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
 (d) A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
 (e) A parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 1.4 - Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Exercícios complementares

C1. Em cada item, faça o gráfico da função. *Sugestão.* Use o exercício **P1**.

(a) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

(b) $f(x, y) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2}}$.

(c) $f(x, y) = 4\sqrt{\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} - 1}$.

(d) $f(x, y) = 2\sqrt{\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} + 1}$.

(e) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(g) $f(x, y) = \frac{2x}{3} - 2$.

C2. Em cada item, utilize coordenadas cilíndricas para determinar uma parametrização para a superfície descrita.

(a) A parte do cilindro $x^2 + z^2 = 9$ que está acima do plano xy e entre os planos $y = -4$ e $y = 4$.

(b) A parte do plano $x + 2y + 3z = 1$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 3$.

(c) A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(d) A parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

(e) A parte do hiperboloide de uma folha $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

(f) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

C3. Em cada item, utilize coordenadas esféricas para determinar uma parametrização para a superfície descrita.

(a) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está entre os planos $z = -2$ e $z = 2$.

(b) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(c) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

(d) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está no octante $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.

(e) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ em que $y \geq 0$.

(f) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está entre os planos $y = 0$ e $y = x$ e que está no octante $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.

(g) A parte do plano $x = y$ que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

C4. Em cada item, calcule $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ e $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ (ou seus correspondentes em itens nos quais os parâmetros não são u e v).

$$(a) \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 6 - 3u - 2v \end{cases}.$$

$$(b) \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 + 3u + 3v^2 \end{cases}.$$

$$(c) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 3 \end{cases}.$$

C5. Em cada item, faça o gráfico da superfície.

$$(a) \begin{cases} x = (1 + \cos \alpha) \cos \theta \\ y = (1 + \cos \alpha) \sin \theta \\ z = \sin \alpha \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

$$(b) \begin{cases} x = (2 + \cos \alpha) \cos \theta \\ y = (2 + \cos \alpha) \sin \theta \\ z = \sin \alpha \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

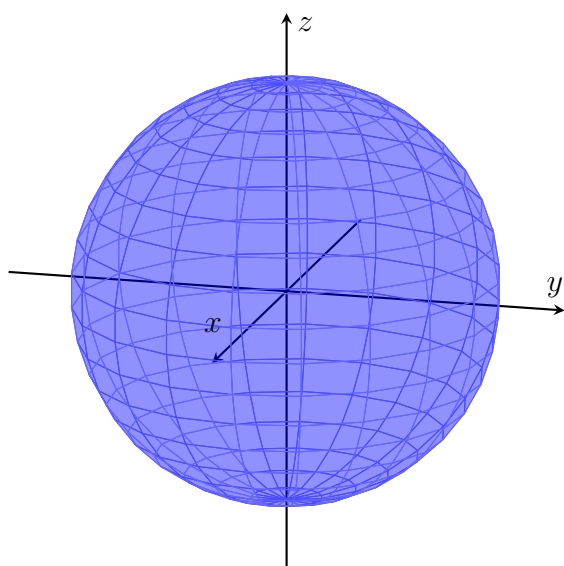
MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 1.4

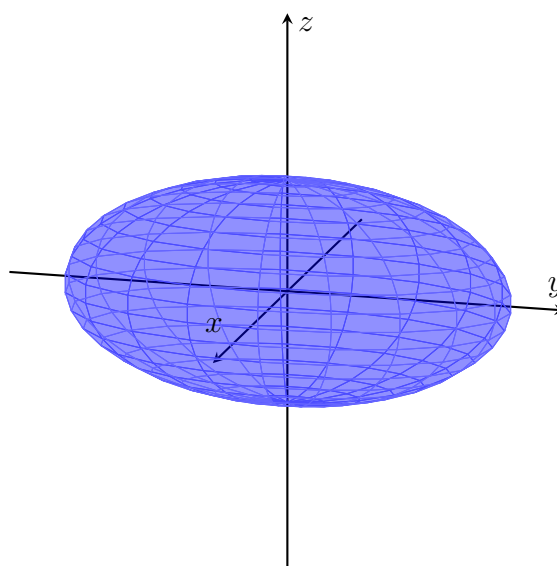
Exercícios principais

P1.

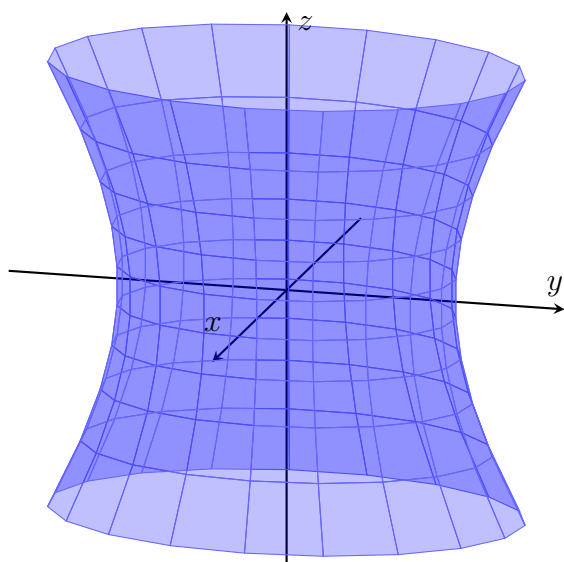
(a)



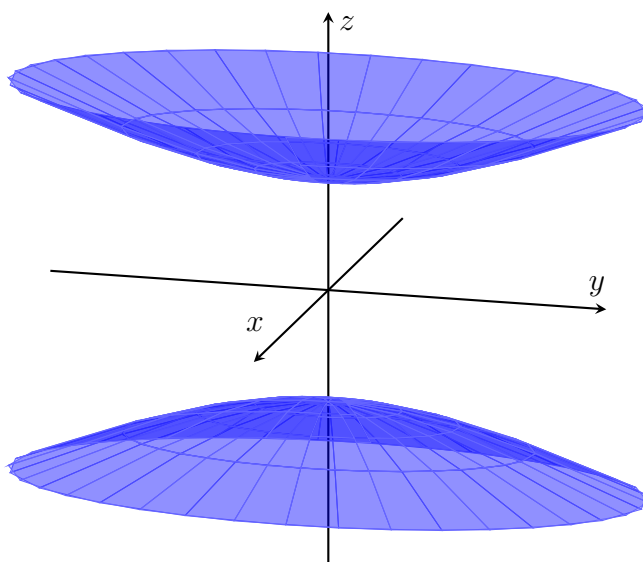
(b)



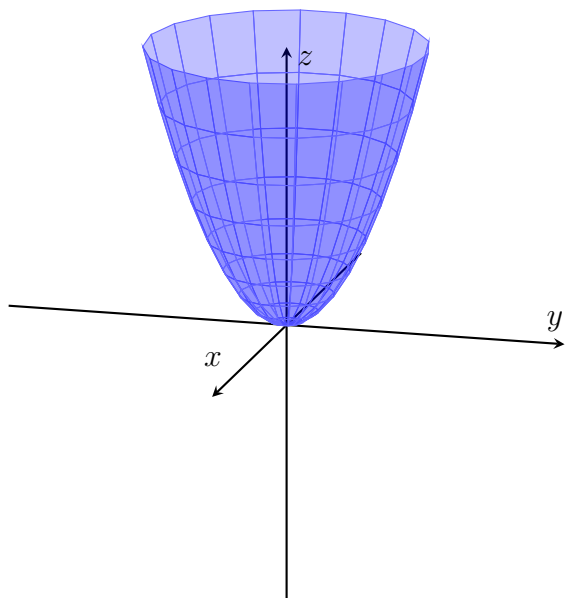
(c)



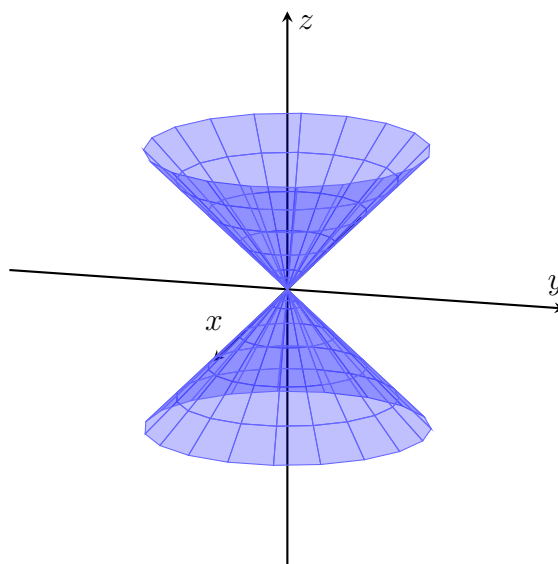
(d)



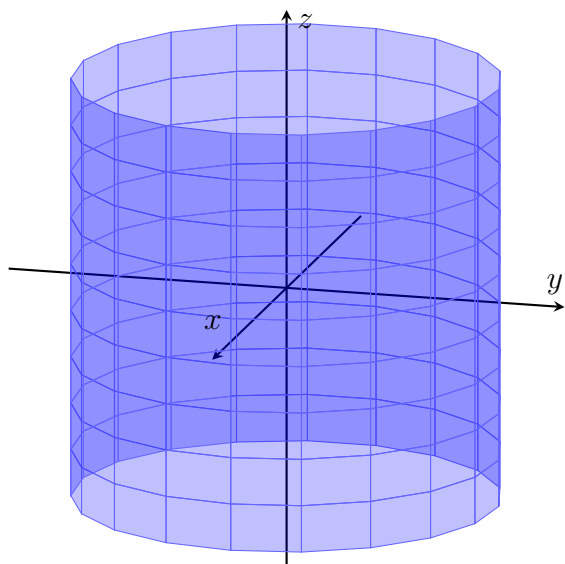
(e)



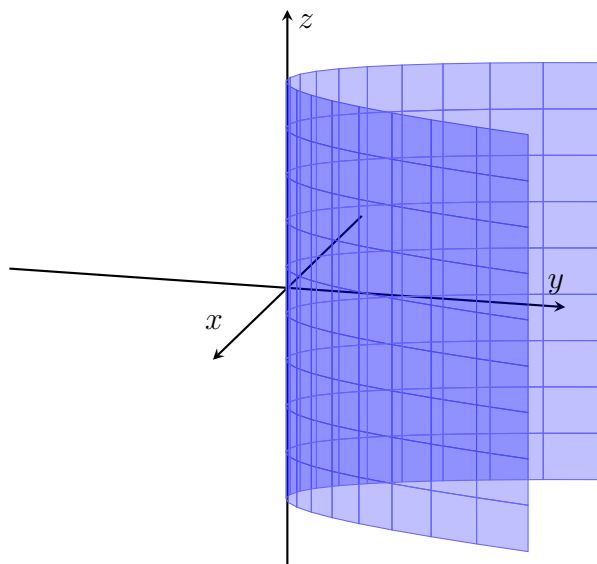
(f)



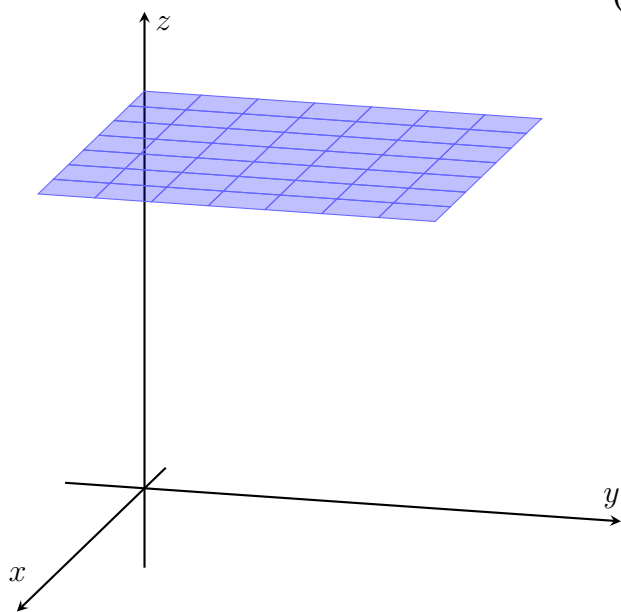
(g)



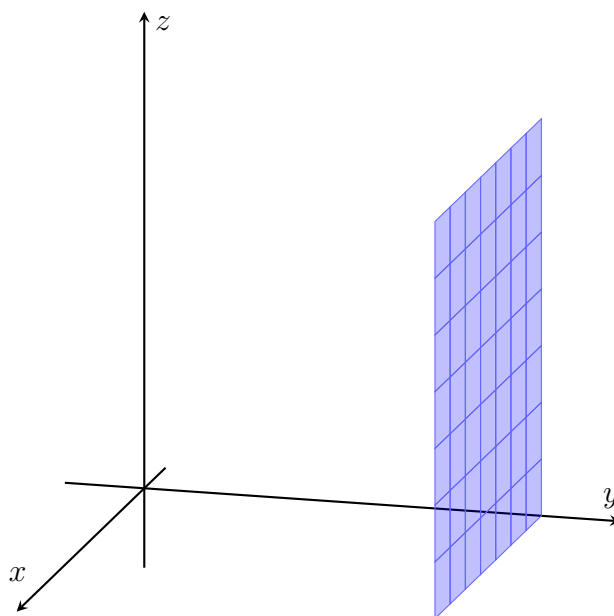
(h)



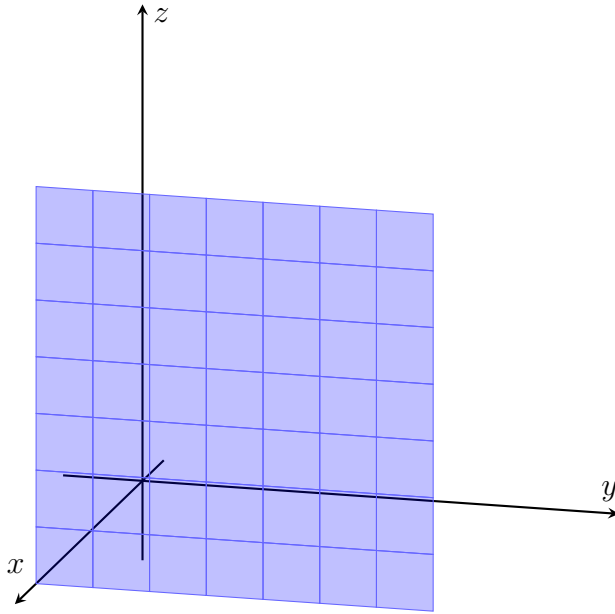
(i)



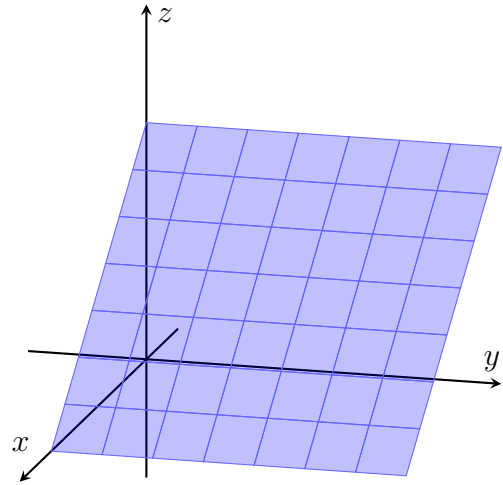
(j)



(k)



(l)

**P2.**

$$(a) \begin{cases} x = 2 + u \\ y = -1 - u + v \\ z = 1 - v \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 6 - 3u - 2v \end{cases}, \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 3 - \frac{3u}{2}$$

$$(c) \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 + 3u + 3v^2 \end{cases}, \quad 0 \leq v \leq 1, \quad 2v \leq u \leq v + 1$$

$$(d) \begin{cases} x = u \\ y = 4u + v^2 \\ z = v \end{cases}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

P3.

$$(a) \begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 5$$

$$(b) \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 + \cos \theta$$

$$(c) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 3 + r \cos \theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$(d) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r^2 \\ z = r \sin \theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 4$$

$$(e) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \sqrt{9 - r^2} \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2$$

$$(f) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \\ z = r \sin \theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 5$$

P4.

$$(a) \begin{cases} x = 3 \sin \phi \cos \theta \\ y = 3 \sin \phi \sin \theta \\ z = 3 \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$(b) \begin{cases} x = 3 \sin \phi \cos \theta \\ y = 3 \sin \phi \sin \theta \\ z = 3 \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$(c) \begin{cases} x = 2 \sin \phi \cos \theta \\ y = 2 \sin \phi \sin \theta \\ z = 2 \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$(d) \begin{cases} x = 3 \sin \phi \cos \theta \\ y = 3 \sin \phi \sin \theta \\ z = 3 \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$(e) \begin{cases} x = \frac{\rho \sqrt{2} \cos \theta}{2} \\ y = \frac{\rho \sqrt{2} \sin \theta}{2} \\ z = \frac{\rho \sqrt{2}}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2}$$

$$(f) \begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} \phi \cos \theta \\ y = 2 \operatorname{tg} \phi \sin \theta \\ z = 2 \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

P5.

(a) $\vec{r}_u = (1, -1, 0)$; $\vec{r}_v = (0, 1, -1)$;
 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (1, 1, 1)$; $||\vec{r}_u \times \vec{r}_v|| = \sqrt{3}$.

(b) $\vec{r}_\theta = (-4 \sin \theta, 4 \cos \theta, 0)$; $\vec{r}_z = (0, 0, 1)$;
 $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = (4 \cos \theta, 4 \sin \theta, 0)$; $||\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z|| = 4$.

(c) $\vec{r}_r = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta)$; $\vec{r}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, -r \sin \theta)$;
 $\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = (-r, 0, r)$; $||\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta|| = \sqrt{2}|r|$.

Observação. Como quase sempre usamos $r \geq 0$, podemos trocar $|r|$ por r .

(d) $\vec{r}_\phi = (3 \cos \phi \cos \theta, 3 \cos \phi \sin \theta, -3 \sin \phi)$; $\vec{r}_\theta = (-3 \sin \phi \sin \theta, 3 \sin \phi \cos \theta, 0)$;
 $\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = (9 \sin^2 \phi \cos \theta, 9 \sin^2 \phi \sin \theta, 9 \sin \phi \cos \phi)$; $||\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta|| = 9 \sin \phi$.

(e) $\vec{r}_\theta = (-\frac{\rho\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \frac{\rho\sqrt{2}\cos\theta}{2}, 0)$; $\vec{r}_\rho = (\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2}, \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$;
 $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\rho = (\frac{\rho\cos\theta}{2}, \frac{\rho\sin\theta}{2}, -\frac{\rho}{2})$; $||\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\rho|| = \frac{\sqrt{2}|\rho|}{2}$.

Observação. Como quase sempre usamos $\rho \geq 0$, podemos trocar $|\rho|$ por ρ .

P6.

(a)
$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = -1 - u + v \\ z = 1 - v \end{cases};$$

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (1, 1, 1)$ aponta para cima e $\vec{r}_v \times \vec{r}_u$ aponta para baixo.

(b)
$$\begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 5 \end{matrix};$$

$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = (4 \cos \theta, 4 \sin \theta, 0)$ aponta para fora do cilindro e $\vec{r}_z \times \vec{r}_\theta$ aponta para dentro.

(c)
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 3 + r \cos \theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{matrix};$$

$\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = (-r, 0, r)$ aponta para cima e $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_r$ aponta para baixo.

(d)
$$\begin{cases} x = 3 \sin \phi \cos \theta \\ y = 3 \sin \phi \sin \theta \\ z = 3 \cos \phi \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix};$$

$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = (9 \sin^2 \phi \cos \theta, 9 \sin^2 \phi \sin \theta, 9 \sin \phi \cos \phi)$ aponta para fora da esfera e $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi$ aponta para dentro.

(e)
$$\begin{cases} x = \frac{\rho\sqrt{2}\cos\theta}{2} \\ y = \frac{\rho\sqrt{2}\sin\theta}{2} \\ z = \frac{\rho\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2} \end{matrix};$$

$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\rho = (\frac{\rho\cos\theta}{2}, \frac{\rho\sin\theta}{2}, -\frac{\rho}{2})$ aponta para fora do cone e $\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta$ aponta para dentro.

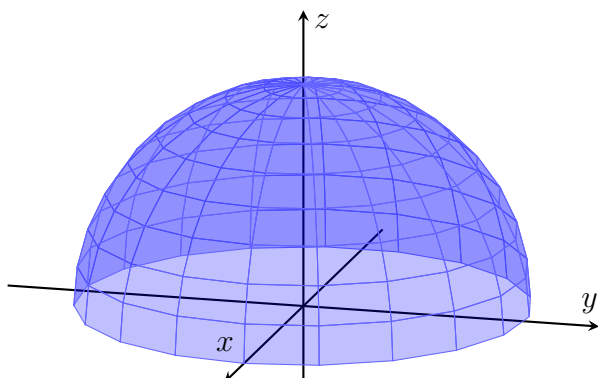
MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 1.4

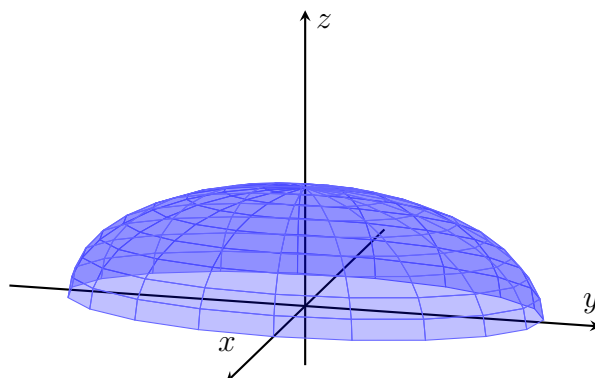
Exercícios complementares

C1.

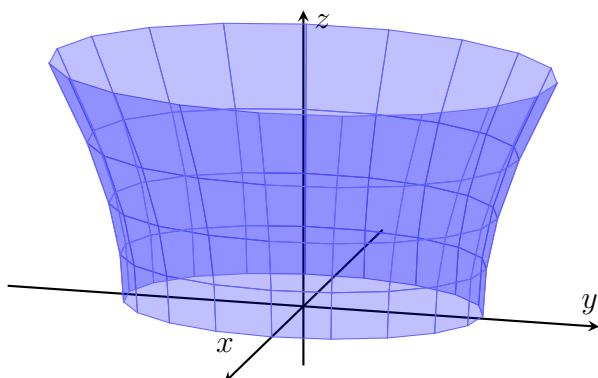
(a)



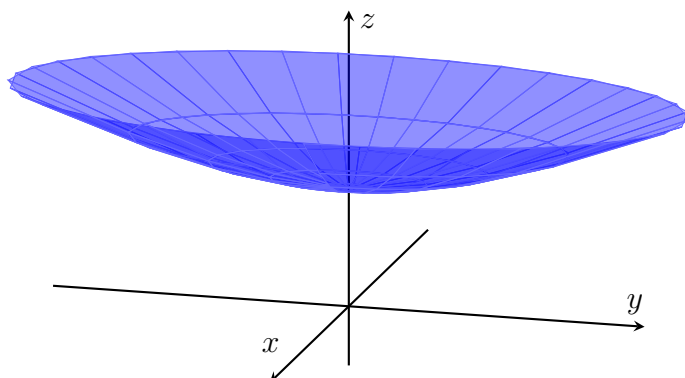
(b)



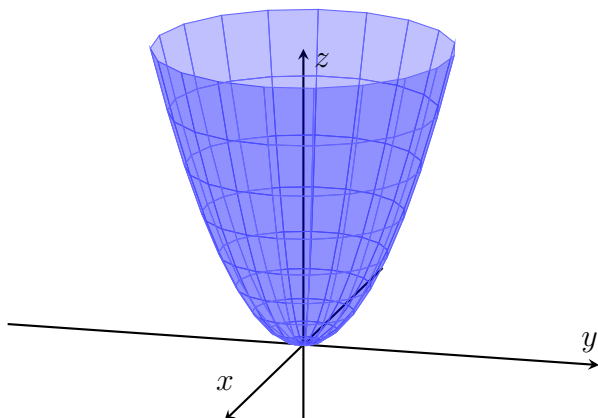
(c)



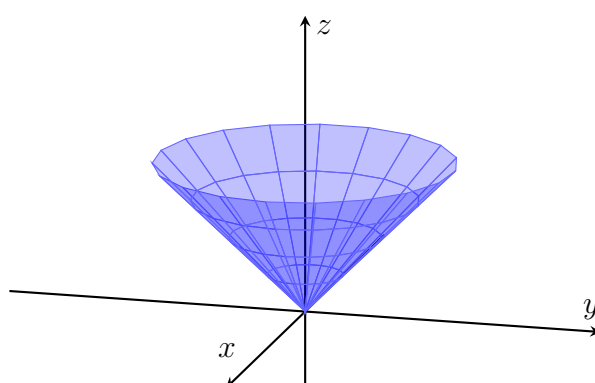
(d)



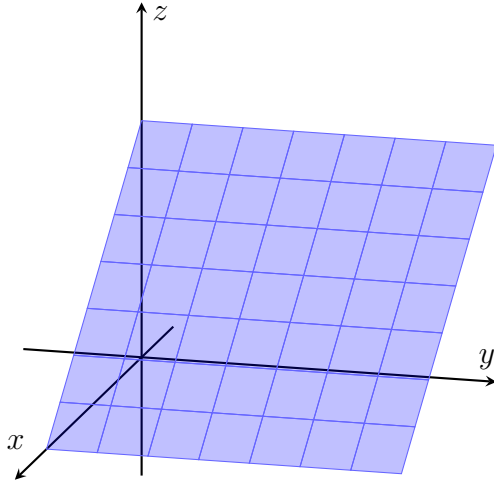
(e)



(f)



(g)



C2.

$$(a) \begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = y \\ z = 3 \sin \theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -4 \leq y \leq 4.$$

$$(c) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \frac{r^2 \sin(2\theta)}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

$$(e) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \sqrt{r^2 - 1} \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 1 \leq r \leq 3.$$

$$(b) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \frac{1 - r \cos \theta - 2r \sin \theta}{3} \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{3}.$$

$$(d) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 3.$$

$$(f) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \sqrt{4 - r^2} \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \theta.$$

C3.

$$(a) \begin{cases} x = 4 \sin \phi \cos \theta \\ y = 4 \sin \phi \sin \theta \\ z = 4 \cos \phi \end{cases}, \quad \frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$(c) \begin{cases} x = 2 \sin \phi \cos \theta \\ y = 2 \sin \phi \sin \theta \\ z = 2 \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} + \phi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \phi.$$

$$(e) \begin{cases} x = 3 \sin \phi \cos \theta \\ y = 3 \sin \phi \sin \theta \\ z = 3 \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

$$(g) \begin{cases} x = \frac{\rho \sqrt{2} \sin \phi}{2} \\ y = \frac{\rho \sqrt{2} \sin \phi}{2} \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad -4 \leq \rho \leq 4.$$

$$(b) \begin{cases} x = 2 \sin \phi \cos \theta \\ y = 2 \sin \phi \sin \theta \\ z = 2 \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$(d) \begin{cases} x = 3 \sin \phi \cos \theta \\ y = 3 \sin \phi \sin \theta \\ z = 3 \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$(f) \begin{cases} x = 3 \sin \phi \cos \theta \\ y = 3 \sin \phi \sin \theta \\ z = 3 \cos \phi \end{cases}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

C4.

(a) $\vec{r}_u = (1, 0, -3)$; $\vec{r}_v = (0, 1, -2)$;
 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (3, 2, 1)$; $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{14}$.

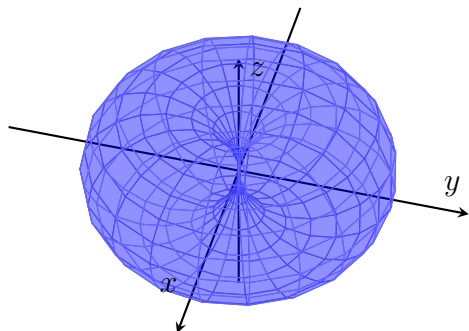
(b) $\vec{r}_u = (1, 0, 3)$; $\vec{r}_v = (0, 1, 6v)$;
 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-3, -6v, 1)$; $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{36v^2 + 10}$.

(c) $\vec{r}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$; $\vec{r}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$;
 $\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = (0, 0, r)$; $\|\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta\| = |r|$.

Observação. Como quase sempre usamos $r \geq 0$, podemos trocar $|r|$ por r .

C5.

(a)



(b)

