



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 1.6 - Regiões em $\mathbb{R}^3$

Exercícios principais

Última atualização: 20 de abril de 2026.

- P1.** Em cada item, descreva os produtos cartesianos de intervalos na como variação de três parâmetros.
- (a) $[1, 3] \times [2, 4] \times [-1, 1]$. (b) $[-3, 2] \times [-2, 0] \times [4, 5]$.
- P2.** Em cada item, faça um esboço da região determinada pelas variações dos parâmetros indicadas.
- (a) $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y$ e $0 \leq z \leq 1 - x - y$.
(b) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x$ e $0 \leq y \leq 2 - 2z$.
(c) $0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - y$ e $0 \leq x \leq 4 - y^2$.
- P3.** Em cada item, encontre todas as outras possíveis ordens para as variações dos parâmetros que definem a mesma região (apenas as ordens que não necessitem dividir a região em partes). *Sugestão.* Talvez os esboços do exercício anterior ajudem.
- (a) $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y$ e $0 \leq z \leq 1 - x - y$.
(b) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x$ e $0 \leq y \leq 2 - 2z$.
(c) $0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - y$ e $0 \leq x \leq 4 - y^2$.
- P4.** Em cada item, descreva a região em todas as seis possíveis ordens de variações dos parâmetros.
- (a) Região delimitada pelas superfícies $x = 2, y = 2, z = 0$ e $x + y - 2z = 2$.
(b) Região delimitada pelas superfícies $y = x^2, z = 0$ e $y + 2z = 4$.
- P5.** Em cada item, utilize coordenadas cilíndricas para descrever a região.
- (a) Região dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.
(b) Região limitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.
(c) Região do primeiro octante abaixo do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$.
(d) Região que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 16$, acima do plano xy e abaixo do plano $z = y + 4$.
- P6.** Em cada item, utilize coordenadas esféricas para descrever a região.
- (a) Região interna à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.
(b) Região acima do cone $\phi = \frac{\pi}{3}$ e abaixo da esfera $\rho = 1$.
(c) Região do primeiro octante dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
(d) Região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

P7. Em cada item, encontre a matriz jacobiana e calcule o jacobiano para a transformação dada.

$$\textbf{(a)} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} .$$

$$\textbf{(b)} \quad \begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} .$$

$$\textbf{(c)} \quad \begin{cases} x = uv \\ y = vw \\ z = wu \end{cases} .$$

$$\textbf{(d)} \quad \begin{cases} x = u + vw \\ y = v + wu \\ z = w + uv \end{cases} .$$



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 1.6 - Regiões em $\mathbb{R}^3$

Exercícios complementares

- C1.** Em cada item, faça um esboço da região determinada pelas variações dos parâmetros indicadas.
- (a) $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x \leq 1$ e $0 \leq z \leq y$.
 - (b) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1 - x^2$ e $0 \leq y \leq 1 - x$.
- C2.** Em cada item, encontre todas as outras possíveis ordens para as variações dos parâmetros que definem a mesma região (apenas as ordens que não necessitem dividir a região em partes). *Sugestão.* Talvez os esboços do exercício anterior ajudem.
- (a) $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x \leq 1$ e $0 \leq z \leq y$.
 - (b) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1 - x^2$ e $0 \leq y \leq 1 - x$.
- C3.** Em cada item, descreva a região em todas as seis possíveis ordens de variações dos parâmetros.
- (a) Região delimitada pelas superfícies $y^2 + z^2 = 9$, $x = -2$ e $x = 2$.
 - (b) Região delimitada pelas superfícies $y = 4 - x^2 - 4z^2$ e $y = 0$.
- C4.** Em cada item, utilize coordenadas cilíndricas para descrever a região.
- (a) Região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.
 - (b) Região limitada pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.
 - (c) Região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
 - (d) Região acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
- C5.** Em cada item, utilize coordenadas esféricas para descrever a região.
- (a) Região entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
 - (b) Região dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e acima do plano $z = 0$.
 - (c) Região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
 - (d) Região dentro da esfera $\rho = 4$ que está acima do plano xy e entre os cones $\phi = \frac{\pi}{6}$ e $\phi = \frac{\pi}{3}$.

MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 1.6

Exercícios principais

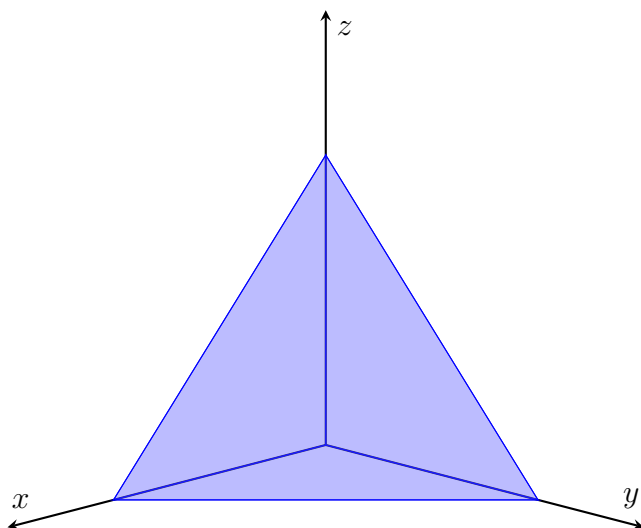
P1.

(a) $1 \leq x \leq 3$, $2 \leq y \leq 4$ e $-1 \leq z \leq 1$.

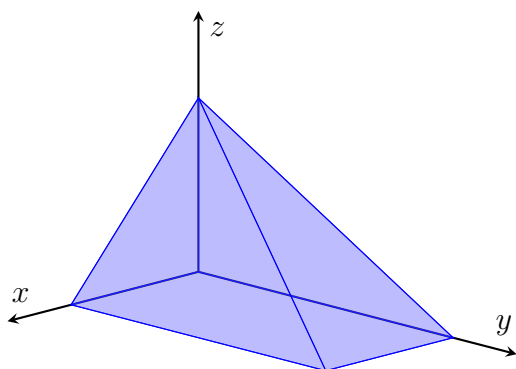
(b) $-3 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 0$ e $4 \leq z \leq 5$.

P2.

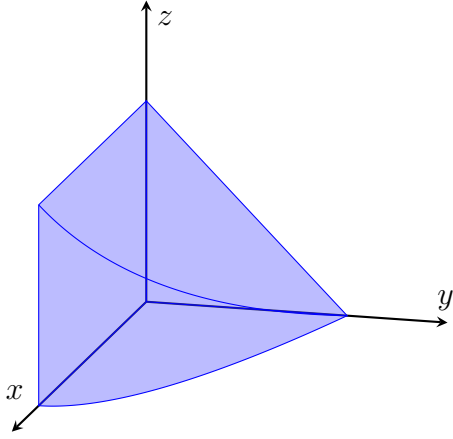
(a)



(b)



(c)



P3.

(a)

- (i) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \text{ e } 0 \leq z \leq 1 - x - y.$
- (ii) $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y \text{ e } 0 \leq x \leq 1 - z - y.$
- (iii) $0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - z \text{ e } 0 \leq x \leq 1 - z - y.$
- (iv) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x \text{ e } 0 \leq y \leq 1 - x - z.$
- (v) $0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - z \text{ e } 0 \leq y \leq 1 - x - z.$

(b)

- (i) $0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - z \text{ e } 0 \leq y \leq 2 - 2z.$
- (ii) $0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2z \text{ e } 0 \leq x \leq 1 - z.$
- (iii) $0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1 - \frac{y}{2} \text{ e } 0 \leq x \leq 1 - z.$

(c)

- (i) $0 \leq z \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - z \text{ e } 0 \leq x \leq 4 - y^2.$
- (ii) $0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 4 - y^2 \text{ e } 0 \leq z \leq 2 - y.$
- (iii) $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x} \text{ e } 0 \leq z \leq 2 - y.$

P4.

(a)

- (i) $0 \leq x \leq 2, 2 - x \leq y \leq 2 \text{ e } 0 \leq z \leq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 1.$
- (ii) $0 \leq y \leq 2, 2 - y \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq z \leq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 1.$
- (iii) $0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \frac{y}{2} \text{ e } 2 + 2z - y \leq x \leq 2.$
- (iv) $0 \leq z \leq 1, 2z \leq y \leq 2 \text{ e } 2 + 2z - y \leq x \leq 2.$
- (v) $0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq \frac{x}{2} \text{ e } 2 + 2z - x \leq y \leq 2.$
- (vi) $0 \leq z \leq 1, 2z \leq x \leq 2 \text{ e } 2 + 2z - x \leq y \leq 2.$

(b)

- (i) $-2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4 \text{ e } 0 \leq z \leq 2 - \frac{y}{2}.$
- (ii) $0 \leq y \leq 4, -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \text{ e } 0 \leq z \leq 2 - \frac{y}{2}.$
- (iii) $0 \leq z \leq 2, -\sqrt{4 - 2z} \leq x \leq \sqrt{4 - 2z} \text{ e } x^2 \leq y \leq 4 - 2z.$
- (iv) $-2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - \frac{x^2}{2} \text{ e } x^2 \leq y \leq 4 - 2z.$

- (v) $0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2 - \frac{y}{2} \text{ e } -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}.$
(vi) $0 \leq z \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - 2z \text{ e } -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}.$

P5.

- (a) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 4 \text{ e } -5 \leq z \leq 4.$
(b) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2 \text{ e } r^2 \leq z \leq 4.$
(c) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \text{ e } 0 \leq z \leq 4 - r^2.$
(d) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq 4 \text{ e } 0 \leq z \leq r \sin \theta + 4.$

P6.

- (a) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \rho \leq 5.$
(b) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3} \text{ e } 0 \leq \rho \leq 1.$
(c) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 \leq \rho \leq 1.$
(d) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \text{ e } 0 \leq \rho \leq \cos \phi.$

P7.

- (a)
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = r.$$
- (b)
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \rho^2 \sin \phi.$$
- (c)
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & u & 0 \\ 0 & w & v \\ w & 0 & u \end{bmatrix}, \quad J = 2uvw.$$
- (d)
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w & v \\ w & 1 & u \\ v & u & 1 \end{bmatrix}, \quad J = 1 + 2uvw - u^2 - v^2 - w^2.$$

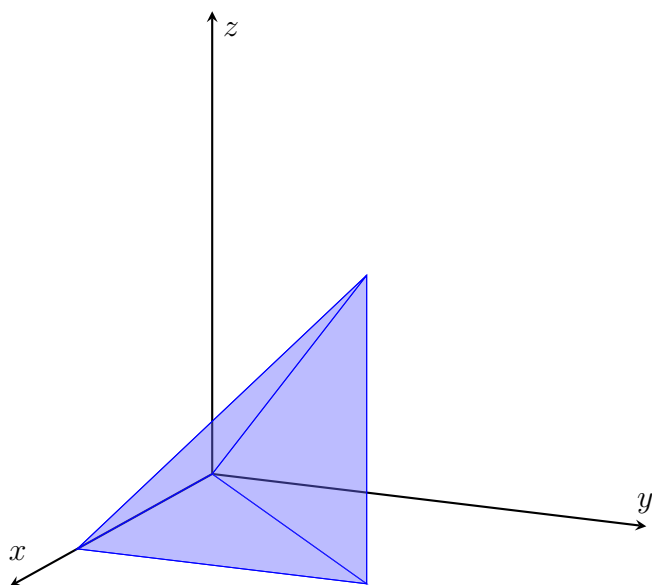
MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 1.6

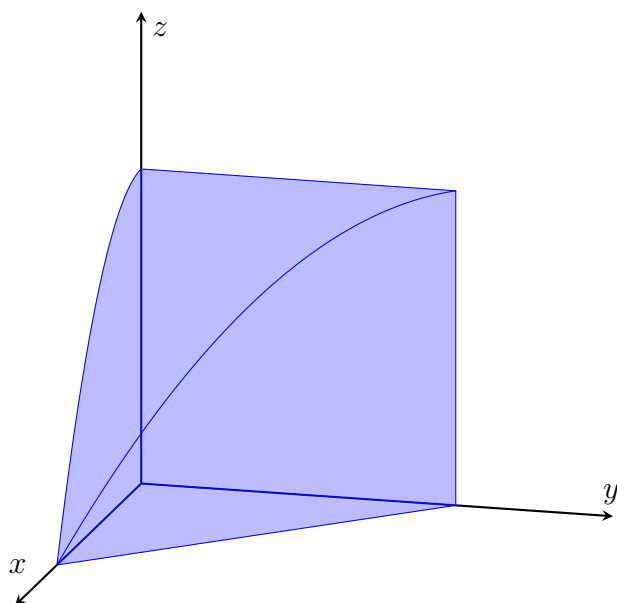
Exercícios complementares

C1.

(a)



(b)



C2.

(a)

(i) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq y$.

- (ii) $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y \text{ e } y \leq x \leq 1.$
- (iii) $0 \leq z \leq 1, z \leq y \leq 1 \text{ e } y \leq x \leq 1.$
- (iv) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x \text{ e } z \leq y \leq x.$
- (v) $0 \leq z \leq 1, z \leq x \leq 1 \text{ e } z \leq y \leq x.$

(b)

- (i) $0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-z} \text{ e } 0 \leq y \leq 1-x.$
- (ii) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \text{ e } 0 \leq z \leq 1-x^2$
- (iii) $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1-y \text{ e } 0 \leq z \leq 1-x^2$

C3.

(a)

- (i) $-2 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3 \text{ e } -\sqrt{9-y^2} \leq z \leq \sqrt{9-y^2}.$
- (ii) $-3 \leq y \leq 3, -2 \leq x \leq 2 \text{ e } -\sqrt{9-y^2} \leq z \leq \sqrt{9-y^2}.$
- (iii) $-2 \leq x \leq 2, -3 \leq z \leq 3 \text{ e } -\sqrt{9-z^2} \leq y \leq \sqrt{9-z^2}.$
- (iv) $-3 \leq z \leq 3, -2 \leq x \leq 2 \text{ e } -\sqrt{9-z^2} \leq y \leq \sqrt{9-z^2}.$
- (v) $-3 \leq y \leq 3, -\sqrt{9-y^2} \leq z \leq \sqrt{9-y^2} \text{ e } -2 \leq x \leq 2.$
- (vi) $-3 \leq z \leq 3, -\sqrt{9-z^2} \leq y \leq \sqrt{9-z^2} \text{ e } -2 \leq x \leq 2.$

(b)

- (i) $-2 \leq x \leq 2, -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \leq z \leq \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \text{ e } 0 \leq y \leq 4-x^2-4z^2.$
- (ii) $-1 \leq z \leq 1, -2\sqrt{1-z^2} \leq x \leq 2\sqrt{1-z^2} \text{ e } 0 \leq y \leq 4-x^2-4z^2.$
- (iii) $-1 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 4-4z^2 \text{ e } -\sqrt{4-4z^2-y} \leq x \leq \sqrt{4-4z^2-y}.$
- (iv) $0 \leq y \leq 4, -\sqrt{1-\frac{y}{4}} \leq z \leq \sqrt{1-\frac{y}{4}} \text{ e } -\sqrt{4-4z^2-y} \leq x \leq \sqrt{4-4z^2-y}.$
- (v) $0 \leq y \leq 4, -\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y} \text{ e } -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y}{4}} \leq z \leq \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y}{4}}.$
- (vi) $-2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4-x^2 \text{ e } -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y}{4}} \leq z \leq \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y}{4}}.$

C4.

- (a) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 2r.$
- (b) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 2 \leq r \leq 3 \text{ e } 0 \leq z \leq r \cos \theta + r \sin \theta + 5.$
- (c) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \text{ e } r \leq z \leq \sqrt{2-r^2}.$
- (d) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 \text{ e } r^2 \leq z \leq \sqrt{2-r^2}.$

C5.

- (a) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi \text{ e } 2 \leq \rho \leq 3.$
- (b) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 \leq \rho \leq 3.$
- (c) $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \text{ e } 1 \leq \rho \leq 2.$
- (d) $0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3} \text{ e } 0 \leq \rho \leq 4.$