



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 2 - Qual é a função de uma função?

Exercícios principais

Última atualização: 14 de janeiro de 2025.

- P1.** Em cada item, descreva uma ou mais circunstâncias nas quais a forma de ver uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  é recomendada. Descreva, também, a notação usual nas circunstâncias apresentadas.
- (a) Recomenda-se ver o gráfico da função no plano  $xy$ .
  - (b) Recomenda-se desenhar o contradomínio e atribuir etiquetas em alguns pontos com o valor do domínio associado.
  - (c) Recomenda-se desenhar o domínio e fazer um mapa de calor com os valores associados.
  - (d) Recomenda-se desenhar o domínio e a imagem separadamente.
- P2.** Funções cujo contradomínio é  $\mathbb{R}$ , na maioria dos casos, têm dois usos específicos. Que usos são esses? Quais dessas funções usamos? Qual é a melhor forma de ver essas funções? Quais são as notações usuais?
- P3.** Funções cujo domínio tem dimensão igual à do contradomínio, na maioria dos casos, têm dois usos específicos. Que usos são esses? Quais dessas funções usamos? Qual é a melhor forma de ver essas funções? Quais são as notações usuais?
- P4.** Funções cujo domínio tem dimensão menor que o contradomínio, na maioria dos casos, têm dois usos específicos. Que usos são esses? Quais dessas funções usamos? Qual é a melhor forma de ver essas funções? Quais são as notações usuais?
- P5.** Em cada item, desenhe o campo vetorial nos pontos  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, -2)$ ,  $(-2, 2)$  e  $(-2, -2)$ .
- (a)  $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ .
  - (b)  $\vec{F}(x, y) = (-x, -y)$ .
  - (c)  $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ .
- P6.** Em cada item, faça a composição da função com a mudança de variável.
- (a)  $\begin{cases} x(u, v) = u + v \\ y(u, v) = u - v \end{cases}$  e  $f(x, y) = 2xy - 3x$ .
  - (b)  $\begin{cases} x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases}$  e  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ .
  - (c)  $\begin{cases} x(r, \theta, z) = r \cos \theta \\ y(r, \theta, z) = r \sin \theta \\ z(r, \theta, z) = z \end{cases}$  e  $f(x, y, z) = 2x - y + z$ .
  - (d)  $\begin{cases} x(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z(\rho, \phi, \theta) = \rho \cos \phi \end{cases}$  e  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ .

**P7.** Em cada item, faça a composição do campo com a parametrização.

$$(a) \begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = t^2 - 2 \end{cases} \text{ e } f(x, y) = 2x - y.$$

$$(b) \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \text{ e } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$(c) \begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = t^2 - 2 \end{cases} \text{ e } \vec{F}(x, y) = (x - y, x^2).$$

$$(d) \begin{cases} x(t) = 3 \\ y(t) = t \\ z(t) = t^2 \end{cases} \text{ e } f(x, y, z) = xy + yz + xz.$$

$$(e) \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 2 \sin t \\ z(t) = 2 \cos t \end{cases} \text{ e } \vec{F}(x, y, z) = (x^2 + 1, y^2 + z^2, y).$$

$$(f) \begin{cases} x(u, v) = u + v \\ y(u, v) = u - v \\ z(u, v) = uv \end{cases} \text{ e } f(x, y, z) = xy + yz + xz.$$

$$(g) \begin{cases} x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y(r, \theta) = r \sin \theta \\ z(r, \theta) = r \end{cases} \text{ e } \vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2, z, z^2 - 1).$$



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 2

Exercícios principais

P1.

- (a) **Situação 1.** Quando o gráfico da função representa um objeto com posição definida. Por exemplo, considere a região do plano delimitada pelas equações  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  e  $y = x^2$ . A função  $y = x^2$  tem seu gráfico usado concretamente para descrever o limite de uma região do plano. Observe que, nessas situações, a notação mais comum é não criar um “nome” pra função (como  $f$ ,  $g$ , etc.), mas simplesmente usar os nomes das letras dos eixos:  $y = x^2$ .

**Situação 2.** Quando domínio e contradomínio são quantidades não espaciais. Um possível exemplo dessa situação é a função velocidade de um objeto. Tanto velocidade quanto tempo não são grandezas espaciais, portanto não há uma preferência em desenhar somente domínio ou somente contradomínio. Assim, a forma mais adequada de ver essa função é desenhar o gráfico no plano  $xy$  usando o eixo  $x$  para representar o tempo e o eixo  $y$  para representar a velocidade. Nesta situação, a notação mais comum é usar as letras que abreviam as grandezas como nome da variável e como nome da função:  $v(t)$ .

- (b) Essa representação é útil quando a função em questão mede uma posição em função de alguma quantidade. O exemplo mais comum é a função posição de um objeto em função do tempo. Desenhamos o trajeto do objeto (que é a imagem da função) e colocamos algumas marcações do tempo associado para entender como o movimento está acontecendo. A notação mais comum é usar  $t$  como variável e  $x$  ou  $s$  como função:  $x(t)$  ou  $s(t)$ .
- (c) Essa representação é útil quando a função em questão tem em seu domínio um objeto com posição fixa. Os exemplos mais comuns ocorrem quando queremos atribuir uma medida a cada ponto sobre uma barra; por exemplo, a temperatura em cada ponto de uma barra. A notação mais comum é usar  $x$  como variável que representa a posição da barra e dar algum nome pra função:  $T(x)$  para temperatura na posição  $x$ .
- (d) Essa representação é útil em mudanças de variável. Por exemplo, numa integral em  $x$  de 0 a 2 com a mudança  $x = \sqrt{u}$ , o importante é saber que a variação correspondente em  $u$  é de 0 a 4. Note que, nesse caso, a variável inicial  $x$  é o nome da função e a nova variável é o nome da variável da função:  $x(u)$ .

**P2.** Essas funções são usadas, na maioria dos casos, para descrever superfícies, limitações de regiões ou campos escalares. Nos exemplos abaixo, não vamos citar o caso de domínio igual a  $\mathbb{R}$ , pois já tratamos esse caso no exercício **P1.** Assim, trataremos apenas as funções de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  e de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}$ .

**Superfícies ou limitação de uma região.** Considere a região do  $\mathbb{R}^3$  limitada pelas superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 3$ . Neste exemplo, a superfície  $z = x^2 + y^2$  é uma função de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  que “empresta” seu gráfico para definir as limitações de uma região em  $\mathbb{R}^3$ . Nestas situações, o gráfico é a forma mais comum de ver essa função. A notação mais comum é não criar um “nome” pra função (como  $f$ ,  $g$ , etc.), mas simplesmente usar os nomes das letras dos eixos:  $z = x^2 + y^2$ . Nesta situação, consideramos apenas funções de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$ .

**Campos escalares.** Imagine uma placa de ferro que possui pontos de aquecimento não uniformes. Neste caso, em cada ponto da placa, há uma temperatura associada. Em outras palavras, a cada ponto da placa representado por um par  $(x, y)$ , há um número  $T(x, y)$  associado que representa a temperatura daquele ponto da placa. De forma similar, se ao invés de uma placa, tivéssemos um objeto tridimensional, teríamos uma temperatura  $T(x, y, z)$  associada a cada ponto  $(x, y, z)$  do sólido. Nestes dois exemplos,  $T(x, y)$  é uma função de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  e  $T(x, y, z)$  é uma função de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}$ . Uma boa forma de ver essas funções é através de um mapa de calor desenhado sobre o domínio. As notações mais comuns para campos escalares são:  $f(x, y)$ ,  $f(x, y, z)$  ou  $T(x, y)$ ,  $T(x, y, z)$  quando a função mede uma quantidade física conhecida (no nosso exemplo, a temperatura).

**P3.** Essas funções são usadas, na maioria dos casos, para descrever mudanças de variáveis ou campos vetoriais. Nos exemplos abaixo, não vamos citar o caso de domínio e contradomínio iguais a  $\mathbb{R}$ , pois já tratamos esse caso no exercício **P1.**. Assim, trataremos apenas as funções de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  e de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^3$ .

**Mudanças de variáveis.** Imagine a situação em que queremos descrever, no plano  $xy$ , a região delimitada pelo círculo de raio 2 com centro na origem. A descrição dessa região pela variação de  $x$  e  $y$  pode levar a integrais difíceis de resolver. Neste caso, fazemos a mudança de variável  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  e a região passa a ser descrita pelas variações  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq r \leq 2$ . Neste exemplo, temos uma função de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  que tem como variáveis de entrada  $r$  e  $\theta$  e como saída  $x(r, \theta)$  e  $y(r, \theta)$ . Por ser uma mudança de variável, a melhor forma de ver essa função é desenhar domínio e imagem separadamente. O retângulo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq r \leq 2$  do plano  $r\theta$  é levado no círculo centrado na origem de raio 2 no plano  $xy$ . Note que, nesse caso, a forma mais comum de denotar essa função é por  $x$  e  $y$  em termos das novas variáveis. De maneira análoga, também temos a mudança de variável em  $\mathbb{R}^3$ . Um exemplo seria o de descrever a região delimitada pela esfera de raio 3 centra na origem. Usando a mudança de variável  $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \phi \sin \theta$  e  $z = \rho \cos \phi$ , a região é descrita por  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$  e  $0 \leq \rho \leq 3$ .

**Campos vetoriais.** Imagine uma mesa de sinuca cuja superfície não está completamente nivelada. Neste caso, em cada ponto da mesa, há uma tendência a se descolar para algum sentido. Em outras palavras, em cada ponto da mesa, há um vetor força atuando sobre o objeto que ali está. Esta situação pode ser representada matematicamente por uma função que, a cada ponto da mesa (que pode ser descrito por um par  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ ), associa um vetor no plano (que também pode ser descrito por um par em  $\mathbb{R}^2$ ). Logo, esta é uma função de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . A forma mais comum de ver essa função é desenhar o domínio (no nosso caso, a mesa de sinuca) e em alguns pontos desenhar o vetor correspondente (em nosso caso, desenhar o vetor força em alguns pontos da mesa). A notação usual de um campo vetorial é  $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}$ . Por exemplo,  $\vec{F}(x, y) = (2x^2 + xy, x \cos y)$ . De maneira análoga, também existem os campos vetoriais em  $\mathbb{R}^3$ , denotados por  $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$ . Um situação concreta útil para pensar nesse caso é imaginar uma sala com ventiladores ligados. Em cada ponto da sala, a velocidade do vento pode variar em intensidade, direção e sentido. Logo, em cada ponto da sala, há um vetor velocidade do vento associado.

**P4.** Essas funções são usadas, na maioria dos casos, para parametrizar objetos de dimensão menor do que a dimensão do espaço no qual moram; por exemplo, para descrever curvas e superfícies. Uma segunda situação em que usamos essas funções é para descrever campos vetoriais que já foram compostos com uma parametrização. As funções que usamos aqui são as de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$  e de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$ .

**Curva em  $\mathbb{R}^2$ .** Uma curva é um objeto de dimensão 1. Se esta curva está no plano  $xy$ , precisamos de uma função de  $\mathbb{R}$  (pois a curva tem dimensão 1) para  $\mathbb{R}^2$  (pois a curva mora em  $\mathbb{R}^2$ ). A notação usual nesse caso é chamar a variável de  $t$  e representar o resultado pelo par  $x(t)$  e  $y(t)$ .

Outra forma é juntar  $x(t)$  e  $y(t)$  em um par e dar um nome para a função:  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ . Em relação à forma de ver essa função, a forma mais adequada é desenhar apenas a imagem e, se preciso, atribuir algumas etiquetas associadas aos parâmetros.

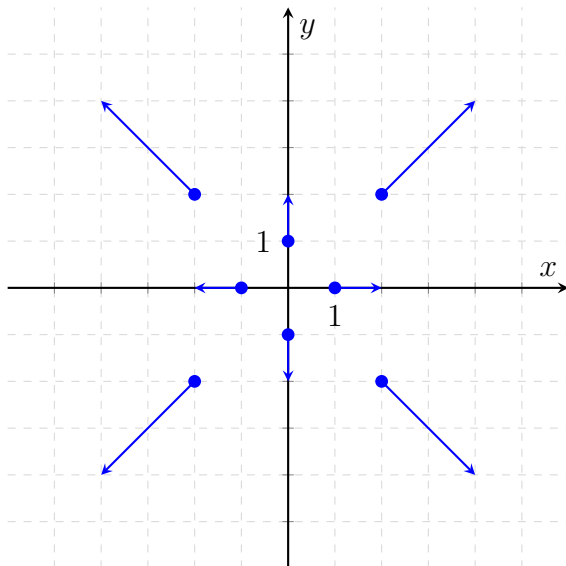
**Curva em  $\mathbb{R}^3$ .** Análogo ao caso anterior, exceto pelo fato de que agora teremos  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ .

**Superfície em  $\mathbb{R}^3$ .** Uma superfície é um objeto de dimensão 2 que está contido em  $\mathbb{R}^3$ . Neste caso, precisamos de uma função de  $\mathbb{R}^2$  (pois a superfície tem dimensão 2) para  $\mathbb{R}^3$  (pois a superfície mora em  $\mathbb{R}^3$ ). A notação usual nesse caso é chamar as variáveis de  $u$  e  $v$  e representar o resultado por par  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e  $z(u, v)$ . Outra forma é juntar  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e  $z(u, v)$  em uma tripla e dar um nome para a função:  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . Em relação à forma de ver essa função, a forma mais adequada é desenhar apenas a imagem e, se preciso, atribuir algumas etiquetas associadas aos parâmetros.

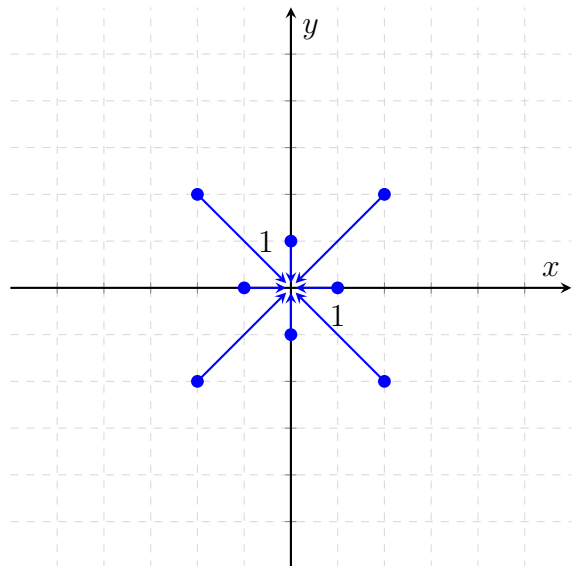
**Campo vetorial composto com parametrização.** Imagine uma curva em  $\mathbb{R}^2$  parametrizada por  $x(t)$  e  $y(t)$ . Para exemplificar, consideremos  $x(t) = \cos t$  e  $y(t) = \sin t$ . Imagine um campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$ , por exemplo,  $\vec{F}(x, y) = (2x + y, x^2)$ . Este campo está definido em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ , em particular nos pontos da curva. Quando fazemos a composição  $\vec{F}(x(t), y(t)) = (2\cos t + \sin t, \cos^2 t)$ , obtemos uma função de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}^2$ . Esta função deve ser interpretada da seguinte forma: cada  $t$  define um ponto da curva  $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$  e também define um vetor  $\vec{F}(x(t), y(t)) = (2\cos t + \sin t, \cos^2 t)$ . Este vetor deve ser entendido como o vetor do campo vetorial  $\vec{F}$  que atua no ponto  $(x(t), y(t))$  da curva. Assim, a melhor forma de ver a função  $\vec{F}(x(t), y(t)) = (2\cos t + \sin t, \cos^2 t)$ , é primeiro desenhar a curva  $(x(t), y(t))$  em  $\mathbb{R}^2$  e, em alguns pontos da curva, desenhar o vetor  $\vec{F}(x(t), y(t))$  associado. Às vezes, a notação dessas funções é mantida sob a forma de composição, como  $\vec{F}(x(t), y(t))$ ; às vezes, omite-se a composição e escreve-se diretamente  $\vec{F}(t)$ . Esta mesma ideia se aplica a curvas em  $\mathbb{R}^3$  e a superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

**P5.**

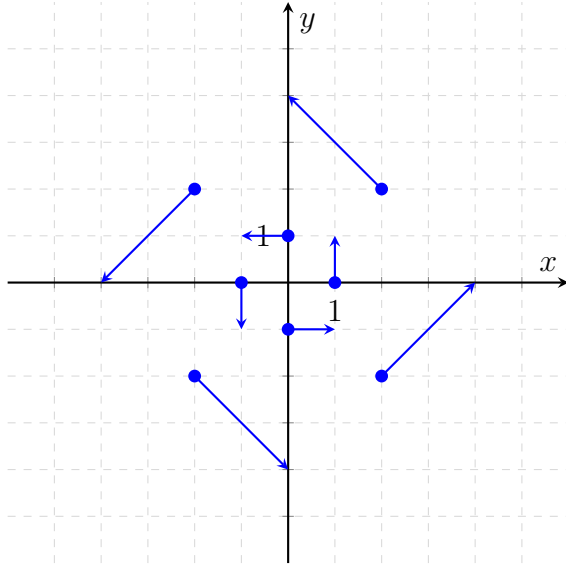
(a)



(b)



(c)



**P6.**

(a)  $f(x(u, v), y(u, v)) = 2(u + v)(u - v) - 3(u + v) = 2u^2 - 2v^2 - 3u - 3v.$

(b)  $f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = \frac{1}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \frac{1}{r^2}.$

(c)  $f(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) = 2r \cos \theta - r \sin \theta + z.$

(d)  $f(x(\rho, \phi, \theta), y(\rho, \phi, \theta), z(\rho, \phi, \theta)) = (\rho \sin \phi \cos \theta)^2 + (\rho \sin \phi \sin \theta)^2 + 2(\rho \cos \phi)^2 = \rho^2 + \rho^2 \cos^2 \phi.$

**P7.**

(a)  $f(x(t), y(t)) = 2(2t - 1) - (t^2 - 2) = -t^2 + 4t.$

(b)  $f(x(t), y(t)) = \sqrt{(2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2} = 2.$

(c)  $\vec{F}(x(t), y(t)) = (2t - 1 - (t^2 - 2), (2t - 1)^2) = (-t^2 + 2t + 1, 4t^2 - 4t + 1).$

(d)  $f(x(t), y(t), z(t)) = 3t + t \cdot t^2 + 3t^2 = 3t + 3t^2 + t^3.$

(e)  $\vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = (0^2 + 1, (2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2, 2 \sin t) = (1, 4, 2 \sin t).$

(f)  $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u + v)(u - v) + (u - v)uv + (u + v)uv = 2u^2v + u^2 - v^2.$

(g)  $\vec{F}(x(r, \theta), y(r, \theta), z(r, \theta)) = ((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2, r, r^2 - 1) = (r^2, r, r^2 - 1).$