



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 3 - Derivadas

Exercícios principais

Última atualização: 14 de janeiro de 2025.

P1. Em cada item, calcule as derivadas.

- (a) $\frac{d}{dt}(\sin(2t)e^{3t})$.
- (b) $\frac{d}{dt}\left(2t - 1, t \cos(2t), \frac{t}{t^2 + 1}\right)$.
- (c) $\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - 3x \sin(xyz) - e^{yz})$.
- (d) $\frac{\partial}{\partial y}(y^4 - 2xyz, x^2 \cos(z), 3x - 2y^2z + (z + 3y)^5)$.

P2. Em cada item, calcule o gradiente de f .

- (a) $f(x, y) = 2x^2y - 3xy^3 + 7y^5$.
- (b) $f(x, y) = \sin(3x)e^{4y}$.
- (c) $f(x, y, z) = 2 - 4 \ln(x^2 + y^2 + z^2) - x^2y^2e^{xyz} + 2z$.

P3. Em cada item, calcule o divergente de $\vec{F}$.

- (a) $\vec{F}(x, y) = (2xy - 3x^2y^2 + 7, x^2 + y^2)$.
- (b) $\vec{F}(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$.
- (c) $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, xy + xz + yz, x + y + z)$.
- (d) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$.

P4. Em cada item, calcule o rotacional de $\vec{F}$.

- (a) $\vec{F}(x, y) = (2xy - 3x^2y^2 + 7, x^2 + y^2)$.
- (b) $\vec{F}(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$.
- (c) $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, xy + xz + yz, x + y + z)$.
- (d) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$.

P5. Como a derivada pode ser útil em mudanças de variáveis? Dê um exemplo.

P6. Como a derivada pode ser útil em parametrização de curvas? Dê um exemplo.

P7. Como a derivada pode ser útil em parametrização de superfícies? Dê um exemplo.

- P8.** Como a derivada pode ser útil em campos escalares? Dê um exemplo.
- P9.** Como a derivada pode ser útil em campos vetoriais? Dê um exemplo.
- P10.** O que é um campo conservativo? Dê um exemplo de um campo conservativo e outro que não é.
- P11.** É verdade que se $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, então $\vec{F}$ é conservativo?



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 3 - Derivadas

Exercícios complementares

C1. Considere $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ e $\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$.

- (a) Mostre que $\nabla f = \vec{F}$.
- (b) Mostre que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.
- (c) Verifique que $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$.
- (d) Verifique que $\text{Dom } \vec{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$.
- (e) Conclua que f não é uma função potencial de $\vec{F}$ em $\text{Dom } \vec{F}$, mas é uma função potencial de $\vec{F}$ em $\text{Dom } f$.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 3

Exercícios principais

P1.

- (a) $\frac{d}{dt}(\sin(2t)e^{3t}) = (2\cos(2t) + 3\sin(2t))e^{3t}.$
- (b) $\frac{d}{dt}\left(2t - 1, t\cos(2t), \frac{t}{t^2 + 1}\right) = \left(2, \cos(2t) - 2t\sin(2t), \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}\right).$
- (c) $\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - 3x\sin(xyz) - e^{yz}) = 4xy - 3\sin(xyz) - 3xyz\cos(xyz).$
- (d) $\frac{\partial}{\partial y}(y^4 - 2xyz, x^2\cos(z), 3x - 2y^2z + (z + 3y)^5) = (4y^3 - 2xz, 0, -2yz + 15(z + 3y)^4).$

P2.

- (a) $\nabla f(x, y) = (4xy - 3y^3, 2x^2 - 9xy^2 + 35y^4).$
- (b) $\nabla f(x, y) = (3\cos(3x)e^{4y}, 4\sin(3x)e^{4y}).$
- (c) $\nabla f(x, y, z) = \left(-\frac{8x}{x^2 + y^2 + z^2} - xy^2(2 + xyz)e^{xyz}, -\frac{8y}{x^2 + y^2 + z^2} - x^2y(2 + xyz)e^{xyz}, -\frac{8z}{x^2 + y^2 + z^2} - x^3y^3e^{xyz} + 2\right).$

P3.

- (a) $\nabla \cdot \vec{F}(x, y) = 4y - 6xy^2.$
- (b) $\nabla \cdot \vec{F}(x, y) = 0.$
- (c) $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = yz + x + z + 1.$
- (d) $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

P4.

- (a) $\nabla \times \vec{F}(x, y) = 6x^2y.$
- (b) $\nabla \times \vec{F}(x, y) = 0.$
- (c) $\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = (1 - x - y, xy - 1, y + z - xz).$
- (d) $\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \vec{0}.$

P5. A derivada é útil na mudança de variáveis através do jacobiano. Por exemplo, na mudança de variáveis para coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi, \end{cases}$$

o jacobiano é igual a

$$\det \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\phi} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\phi} & \frac{dy}{d\theta} \\ \frac{dz}{d\rho} & \frac{dz}{d\phi} & \frac{dz}{d\theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{bmatrix} = \rho^2 \sin \phi.$$

O módulo do jacobiano é o elemento extra que aparece em uma integral ao fazer uma mudança de variável.

P6. A derivada é útil na parametrização de curvas pois a derivada do vetor de parametrização $\vec{r}(t)$ é o vetor velocidade da curva. Por exemplo, na curva $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, e^t)$, o vetor velocidade é $\vec{r}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, e^t)$ e seu módulo é igual a $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 + e^{2t}}$. $\vec{r}'(t)$ ou $\|\vec{r}'(t)\|$ são usados em integrais sobre curvas.

P7. A derivada é útil na parametrização de superfícies pois as derivadas parciais $\vec{r}_u(u, v)$ e $\vec{r}_v(u, v)$ do vetor de parametrização $\vec{r}(u, v)$ são tangentes à superfície. Assim, o produto vetorial $\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)$ é normal à superfície. Por exemplo, na superfície $\vec{r}(u, v) = (u, v, 1 + 3u + 3v^2)$, após calcular as derivadas parciais e fazer o produto vetorial, obtemos $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-3, -6v, 1)$. Seu módulo é igual a $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{36v^2 + 10}$. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ ou $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ são usados em integrais sobre superfícies.

P8. A derivada é útil em campos escalares através do gradiente. O gradiente de um campo escalar f é um campo vetorial ∇f que, em cada ponto, aponta para o sentido de maior crescimento do campo escalar f . Veja exemplos de gradientes no exercício **P2**.

P9. A derivada é útil em campos vetoriais através do rotacional e do divergente. O rotacional de um campo vetorial $\vec{F}$ é um novo campo vetorial $\nabla \times \vec{F}$ que, em cada ponto, mede a tendência de as linhas de campo rotacionarem ao redor do ponto calculado. A direção do vetor $\nabla \times \vec{F}$ é normal ao plano de rotação, o sentido de $\nabla \times \vec{F}$ indica para qual lado do plano a rotação ocorre e o módulo de $\nabla \times \vec{F}$ mede a intensidade da rotação. Veja exemplos de rotacionais no exercício **P4**. O divergente de um campo vetorial $\vec{F}$ é um campo escalar $\nabla \cdot \vec{F}$ que, em cada ponto, mede a capacidade deste ponto de absorver ou produzir linhas de campo. Veja exemplos de divergentes no exercício **P3**.

P10. Um campo vetorial $\vec{F}$ é denominado conservativo se existe um campo escalar f , definido no domínio de $\vec{F}$, tal que $\vec{F} = \nabla f$. O campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ é conservativo pois $\vec{F} = \nabla f$, em que $f(x, y, z) = xyz$. O campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, x, x)$ não é conservativo. Uma forma de garantir que $\vec{F}$ não é conservativo é mostrar que seu rotacional não é o vetor nulo (porque existe um teorema que diz que todo campo vetorial conservativo possui rotacional igual ao vetor nulo). Como $\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = (0, -1, 1)$, então $\vec{F}(x, y, z) = (x, x, x)$ não é conservativo.

P11. Não. Com certeza, se $\vec{F}$ é conservativo, então $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. A afirmação contrária exige uma hipótese adicional. Com certeza, se $\vec{F}$ está definido em um domínio simplesmente conexo e $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, então $\vec{F}$ é conservativo.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 3

Exercícios complementares

C1.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)