



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 4.1 - Integrais iteradas

Exercícios principais

Última atualização: 28 de maio de 2025.

P1. Em cada item, calcule a integral.

(a) $\int_0^2 \left(z^4 - \frac{z^5}{2} \right) dz.$

(b) $\int_0^1 23y^4 dy.$

(c) $\int_0^{z^2} (z^2 - zy) dy.$

(d) $\int_y^{2y} 6xy(x + y) dx.$

(e) $\int_0^{y-z} (2x - y) dx.$

(f) $\int_0^{x+y} 6xy dz.$

P2. Em cada item, calcule a integral iterada. *Sugestão.* Se você usar os resultados do exercício **P1.**, não precisará resolver nenhuma integral aqui.

(a) $\int_0^2 \int_0^{z^2} (z^2 - zy) dy dz.$

(b) $\int_0^1 \int_y^{2y} 6xy(x + y) dx dy.$

(c) $\int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y) dx dy.$

(d) $\int_y^{2y} \int_0^{x+y} 6xy dz dx.$

P3. Em cada item, calcule a integral iterada. *Sugestão.* Se você usar os resultados dos exercícios **P1.** e **P2.**, não precisará resolver nenhuma integral aqui.

(a) $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y) dx dy dz.$

(b) $\int_0^1 \int_y^{2y} \int_0^{x+y} 6xy dz dx dy.$

P4. Em cada item, reescreva a integral iterada trocando a ordem de integração (não precisa resolver a integral). *Sugestão.* Consulte o exercício **P4** da lista de exercícios 1.3 e você não precisará fazer nenhuma conta aqui.

(a) $\int_0^3 \int_1^5 2xy \sin(x^2 - y) dx dy.$

(b) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy.$

(c) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y} \sin(\pi y) dy dx.$

(d) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3 + 1} dy dx.$

P5. Em cada item, reescreva a integral iterada em todas as possíveis ordens de integração (não precisa resolver a integral). *Sugestão.* Consulte os exercícios **P3** e **C2** da lista de exercícios 1.6 e você não precisará fazer nenhuma conta aqui.

(a) $\int_{-2}^1 \int_1^3 \int_0^1 (x \sin(yz) + y \sin(xz) + z \sin(xy)) dx dy dz.$

(b) $\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} (2xy^2 - zx) dz dx dy.$

(c) $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) dz dx dy.$

P6. Em cada item, tente resolver as integral iterada diretamente e veja que a primeira integral é muito difícil. Após isso, faça a troca de ordem e resolva a integral iterada. *Sugestão.* Use o exercício **P4**.

(a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy.$

(b) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y} \sin(\pi y) dy dx.$

(c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3 + 1} dy dx.$

P7. Em cada item, determine se $\vec{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se sim, determine um campo escalar f tal que $\vec{F} = \nabla f$.

(a) $\vec{F}(x, y) = (xy + y^2, x^2 + 2xy).$

(b) $\vec{F}(x, y) = (ye^x, e^x + e^y).$

(c) $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy^2, 2x^2y).$

(d) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2yz, x + y - z, z^2 - y^2).$

(e) $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy + 2z).$

(f) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2z + 2xz^2, 2xyz, xy^2 + 2x^2z).$



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 4.1 - Integrais iteradas

Exercícios complementares

C1. Em cada item, calcule a integral.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(2y) - \frac{\cos(3y)}{2} - \frac{\cos y}{2} \right) dy.$

(b) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3} dx.$

(c) $\int_0^y (\sin(2x + y) - \sin(x + y)) dx.$

(d) $\int_0^1 z \sqrt{1 - z^2} \sin x dz.$

(e) $\int_0^x \cos(x + y + z) dz.$

(f) $\int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \sin x dy.$

C2. Em cada item, calcule a integral iterada. *Sugestão.* Se você usar os resultados do exercício **C1.**, não precisará resolver nenhuma integral aqui.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y (\sin(2x + y) - \sin(x + y)) dx dy.$

(b) $\int_0^{\pi} \int_0^1 z \sqrt{1 - z^2} \sin x dz dx.$

(c) $\int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z) dz dx.$

(d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \sin x dy dz.$

C3. Em cada item, calcule a integral iterada. *Sugestão.* Se você usar os resultados dos exercícios **C1.** e **C2.**, não precisará resolver nenhuma integral aqui.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z) dz dx dy.$

(b) $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \sin x dy dz dx.$



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 4.1

Exercícios principais

P1.

(a) $\int_0^2 \left(z^4 - \frac{z^5}{2} \right) dz = \frac{16}{15}.$

(b) $\int_0^1 23y^4 dy = \frac{23}{5}.$

(c) $\int_0^{z^2} (z^2 - zy) dy = z^4 - \frac{z^5}{2}.$

(d) $\int_y^{2y} 6xy(x + y) dx = 23y^4.$

(e) $\int_0^{y-z} (2x - y) dx = z^2 - zy.$

(f) $\int_0^{x+y} 6xy dz = 6xy(x + y).$

P2.

(a) $\int_0^2 \int_0^{z^2} (z^2 - zy) dy dz = \frac{16}{15}.$

(b) $\int_0^1 \int_y^{2y} 6xy(x + y) dx dy = \frac{23}{5}.$

(c) $\int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y) dx dy = z^4 - \frac{z^5}{2}.$

(d) $\int_y^{2y} \int_0^{x+y} 6xy dz dx = 23y^4.$

P3.

(a) $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y) dx dy dz = \frac{16}{15}.$

(b) $\int_0^1 \int_y^{2y} \int_0^{x+y} 6xy dz dx dy = \frac{23}{5}.$

P4.

(a) $\int_0^3 \int_1^5 2xy \sin(x^2 - y) dx dy = \int_1^5 \int_0^3 2xy \sin(x^2 - y) dy dx.$

(b) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy = \int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} dy dx.$

(c) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y} \sin(\pi y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{y} \sin(\pi y) dx dy.$

(d) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3 + 1} dy dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} \sqrt{y^3 + 1} dx dy.$

P5.

(a)

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^1 \int_{-1}^3 \int_0^1 (x \operatorname{sen}(yz) + y \operatorname{sen}(xz) + z \operatorname{sen}(xy)) dx dy dz = \\ & \int_{-2}^1 \int_0^1 \int_{-1}^3 (x \operatorname{sen}(yz) + y \operatorname{sen}(xz) + z \operatorname{sen}(xy)) dy dx dz = \\ & \int_{-1}^3 \int_{-2}^1 \int_0^1 (x \operatorname{sen}(yz) + y \operatorname{sen}(xz) + z \operatorname{sen}(xy)) dx dz dy = \\ & \int_{-1}^3 \int_0^1 \int_{-2}^1 (x \operatorname{sen}(yz) + y \operatorname{sen}(xz) + z \operatorname{sen}(xy)) dz dx dy = \\ & \int_0^1 \int_{-2}^1 \int_{-1}^3 (x \operatorname{sen}(yz) + y \operatorname{sen}(xz) + z \operatorname{sen}(xy)) dy dz dx = \\ & \int_0^1 \int_{-1}^3 \int_{-2}^1 (x \operatorname{sen}(yz) + y \operatorname{sen}(xz) + z \operatorname{sen}(xy)) dz dy dx. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} (2xy^2 - zx) dz dx dy = \\ & \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (2xy^2 - zx) dz dy dx = \\ & \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-z-y} (2xy^2 - zx) dx dz dy = \\ & \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} (2xy^2 - zx) dx dy dz = \\ & \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-z} (2xy^2 - zx) dy dz dx = \\ & \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} (2xy^2 - zx) dy dx dz. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_y^1 \int_0^y \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) dz dx dy = \\ & \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) dz dy dx = \\ & \int_0^1 \int_0^y \int_y^1 \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) dx dz dy = \\ & \int_0^1 \int_y^1 \int_y^1 \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) dx dy dz = \\ & \int_0^1 \int_0^z \int_z^x \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) dy dz dx = \\ & \int_0^1 \int_z^1 \int_z^x \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) dy dx dz. \end{aligned}$$

P6.

(a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy = \int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} dy dx = \frac{e^9 - 1}{6}.$

(b) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y} \operatorname{sen}(\pi y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{y} \operatorname{sen}(\pi y) dx dy = \frac{1}{\pi}.$

(c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3 + 1} dy dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} \sqrt{y^3 + 1} dx dy = \frac{4\sqrt{2} - 2}{9}.$

P7.

(a) $\vec{F}$ não é conservativo.

(c) $f(x, y) = 3x + x^2y^2 + C$.

(e) $f(x, y, z) = xyz + z^2 + C$.

(b) $f(x, y) = ye^x + e^y + C$.

(d) $\vec{F}$ não é conservativo.

(f) $f(x, y, z) = xy^2z + x^2z^2 + C$.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 4.1

Exercícios complementares

C1.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(2y) - \frac{\cos(3y)}{2} - \frac{\cos y}{2} \right) dy = -\frac{1}{3}.$

(b) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3} dx = \frac{2}{3}.$

(c) $\int_0^y (\sin(2x + y) - \sin(x + y)) dx = \cos(2y) - \frac{\cos(3y)}{2} - \frac{\cos y}{2}.$

(d) $\int_0^1 z\sqrt{1-z^2} \sin x dz = \frac{\sin x}{3}.$

(e) $\int_0^x \cos(x + y + z) dz = \sin(2x + y) - \sin(x + y).$

(f) $\int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \sin x dy = z\sqrt{1-z^2} \sin x.$

C2.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y (\sin(2x + y) - \sin(x + y)) dx dy = -\frac{1}{3}.$

(b) $\int_0^{\pi} \int_0^1 z\sqrt{1-z^2} \sin x dz dx = \frac{2}{3}.$

(c) $\int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z) dz dx = \cos(2y) - \frac{\cos(3y)}{2} - \frac{\cos y}{2}.$

(d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \sin x dy dz = \frac{\sin x}{3}.$

C3.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z) dz dx dy = -\frac{1}{3}.$

(b) $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \sin x dy dz dx = \frac{2}{3}.$