



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 4.2 - Visão geral das integrais

Exercícios principais

Última atualização: 27 de maio de 2024.

- P1.** Em cada item, diga quantas integrais iteradas são necessárias para resolver a integral descrita.
- (a) Integral sobre um intervalo de $\mathbb{R}$.
 - (b) Integral sobre uma região de $\mathbb{R}^2$.
 - (c) Integral sobre uma região de $\mathbb{R}^3$.
 - (d) Integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^2$.
 - (e) Integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^3$.
 - (f) Integral sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
- P2.** Em cada item, diga qual deve ser o domínio da função integrada para que seja compatível com a integral descrita.
- (a) Integral sobre um intervalo de $\mathbb{R}$.
 - (b) Integral sobre uma região de $\mathbb{R}^2$.
 - (c) Integral sobre uma região de $\mathbb{R}^3$.
 - (d) Integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^2$.
 - (e) Integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^3$.
 - (f) Integral sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
- P3.** Em cada item, descreva o elemento diferencial pedido.
- (a) Diferencial de uma integral sobre um intervalo de $\mathbb{R}$.
 - (b) Diferencial de uma integral sobre uma região de $\mathbb{R}^2$.
 - (c) Diferencial de uma integral sobre uma região de $\mathbb{R}^3$.
 - (d) Diferencial escalar de uma integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^2$.
 - (e) Diferencial vetorial de uma integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^2$.
 - (f) Diferencial escalar de uma integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^3$.
 - (g) Diferencial vetorial de uma integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^3$.
 - (h) Diferencial escalar de uma integral sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
 - (i) Diferencial vetorial de uma integral sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
- P4.** Em cada item, classifique a integral como regular ou vetorial.
- (a) Integral sobre um intervalo de $\mathbb{R}$.
 - (b) Integral sobre uma região de $\mathbb{R}^2$.
 - (c) Integral sobre uma região de $\mathbb{R}^3$.
 - (d) Integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^2$.
 - (e) Integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^3$.
 - (f) Integral sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
- P5.** Em cada item, classifique a integral como integral de região, linha ou superfície.
- (a) Integral sobre um intervalo de $\mathbb{R}$.
 - (b) Integral sobre uma região de $\mathbb{R}^2$.
 - (c) Integral sobre uma região de $\mathbb{R}^3$.
 - (d) Integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^2$.
 - (e) Integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^3$.
 - (f) Integral sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
- P6.** O que significam as notações $\oint$ e $\oiint$? Quando são usadas?



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 4.2

Exercícios principais

P1.

- | | |
|-----------|-----------|
| (a) Uma. | (b) Duas. |
| (c) Três. | (d) Uma. |
| (e) Uma. | (f) Duas. |

P2.

- (a) O domínio da função integrada deve ser um subconjunto de $\mathbb{R}$ que contém o intervalo de integração.
- (b) O domínio da função integrada deve ser um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que contém a região de integração.
- (c) O domínio da função integrada deve ser um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que contém a região de integração.
- (d) O domínio da função integrada deve ser um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que contém o traço da curva.
- (e) O domínio da função integrada deve ser um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que contém o traço da curva.
- (f) O domínio da função integrada deve ser um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que contém o traço da superfície.

P3.

- (a) O elemento diferencial padrão de uma integral sobre um intervalo é dx (quando x é a variável de integração). Se uma mudança de variável é necessária, por exemplo $x = x(u)$, o elemento diferencial é $dx = \frac{dx}{du} du$ quando usamos a mudança de índices levando em conta a orientação. Quando fazemos a mudança sem usar a orientação dos índices, o elemento diferencial é $dx = \left| \frac{dx}{du} \right| du$.
- (b) O elemento diferencial padrão de uma integral sobre uma região de $\mathbb{R}^2$ é normalmente denotado por dA . Nas coordenadas usuais, $dA = dx dy = dy dx$. Quando fazemos uma mudança de variável, por exemplo $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$, o elemento diferencial é $dA = |J| du dv = |J| dv du$, em que J é o jacobiano da transformação.
- (c) O elemento diferencial padrão de uma integral sobre uma região de $\mathbb{R}^3$ é normalmente denotado por dV . Nas coordenadas usuais,

$$dV = dx dy dz = dx dz dy = dy dx dz = dy dz dx = dz dx dy = dz dy dx.$$

Quando fazemos uma mudança de variável, por exemplo $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$, o elemento diferencial é

$$dV = |J| du dv dw = |J| du dw dv = |J| dv du dw = |J| dv dw du = |J| dw du dv = |J| dw dv du,$$

em que J é o jacobiano da transformação.

- (d) O elemento diferencial escalar padrão de uma integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^2$ é normalmente denotado por dr . Nas coordenadas usuais, $dr = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ao parametrizar a curva, por exemplo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, o elemento diferencial escalar é $dr = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$.
- (e) O elemento diferencial vetorial padrão de uma integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^2$ é normalmente denotado por $d\vec{r}$. Nas coordenadas usuais, $d\vec{r} = (dx, dy)$. Outra forma comum de denotar $d\vec{r}$ é $d\vec{r} = \vec{T}dr$, em que $\vec{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{\|d\vec{r}/dt\|}$ é o versor de $\frac{d\vec{r}}{dt}$ e $dr = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$ é o elemento diferencial escalar. Ao parametrizar a curva, por exemplo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, o elemento diferencial vetorial é $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$.
- (f) O elemento diferencial escalar padrão de uma integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^3$ é normalmente denotado por dr . Nas coordenadas usuais, $dr = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Ao parametrizar a curva, por exemplo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, o elemento diferencial escalar é $dr = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$.
- (g) O elemento diferencial vetorial padrão de uma integral sobre uma curva em $\mathbb{R}^3$ é normalmente denotado por $d\vec{r}$. Nas coordenadas usuais, $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$. Outra forma comum de denotar $d\vec{r}$ é $d\vec{r} = \vec{T}dr$, em que $\vec{T} = \frac{d\vec{r}/dt}{\|d\vec{r}/dt\|}$ é o versor de $\frac{d\vec{r}}{dt}$ e $dr = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$ é o elemento diferencial escalar. Ao parametrizar a curva, por exemplo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, o elemento diferencial vetorial é $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$.
- (h) O elemento diferencial escalar padrão de uma integral sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$ é normalmente denotado por dS . Ao parametrizar a superfície, por exemplo $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, o elemento diferencial escalar é $dS = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dv du$.
- (i) O elemento diferencial vetorial padrão de uma integral sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$ é normalmente denotado por $d\vec{S}$. Ao parametrizar a superfície, por exemplo $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, o elemento diferencial vetorial é $d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv du$. Se a orientação do vetor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ não estiver de acordo com o desejado, basta considerar o vetor oposto $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. Outra forma comum de denotar $d\vec{S}$ é $d\vec{S} = \vec{n}dS$, em que $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}/\partial u \times \partial \vec{r}/\partial v}{\|\partial \vec{r}/\partial u \times \partial \vec{r}/\partial v\|}$ é o versor de $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ e $dS = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv$ é o elemento diferencial escalar.

P4.

- | | |
|---------------|---------------|
| (a) Regular. | (b) Regular. |
| (c) Regular. | (d) Vetorial. |
| (e) Vetorial. | (f) Vetorial. |

P5.

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| (a) Integral de região. | (b) Integral de região. |
| (c) Integral de região. | (d) Integral de linha. |
| (e) Integral de linha. | (f) Integral de superfície. |

P6. Estes símbolos podem ter significados diferentes, dependendo do livro ou autor.

Convenção 1. O símbolo $\oint$ ($\oiint$) é usado em integrais de linha (superfície) quando a curva (superfície) é fechada. O uso não é obrigatório, é apenas uma substituição ao símbolo $\int$ ($\iint$), tendo o mesmo significado. Seria incorreto usá-lo quando a curva (superfície) não é fechada.

Convenção 2. O símbolo $\oint$ ($\oiint$) é usado em integrais de linha (superfície) quando a curva (superfície) é fechada e tem como objetivo indicar que a orientação da curva (superfície) é a positiva, isto é, orientação em que a região delimitada pela curva fica à esquerda do percurso (orientação em que o vetor normal aponta para fora da região delimitada pela superfície). O uso não é obrigatório, você pode falar da orientação em palavras ou, ainda, através de uma parametrização específica. Seria incorreto usá-lo quando a curva (superfície) não é fechada.