



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 4.3.2 - Integrais regulares duplas

Exercícios principais

Última atualização: 30 de maio de 2024.

P1. Em cada item, calcule a integral dupla.

- (a) $\iint_R dA$, $R = [2, 5] \times [1, 3]$.
- (b) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA$, $R = [0, 1] \times [-3, 3]$.
- (c) $\iint_R \sin(x - y) dA$, $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
- (d) $\iint_R dA$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$.
- (e) $\iint_R \frac{y}{1 + x^2} dA$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.
- (f) $\iint_R e^{-y^2} dA$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq y\}$.

P2. Em cada item, escreva as integrais iteradas nas duas ordens de integração e calcule-as (você pode escolher a ordem mais fácil para calcular).

- (a) $\iint_R x dA$, em que R é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 1$.
- (b) $\iint_R y^2 e^{xy} dA$, em que R é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = 4$ e $x = 0$.

P3. Em cada item, calcule a integral dupla.

- (a) $\iint_R xy^2 dA$, em que R é a região limitada por $x = 0$ e $x = \sqrt{1 - y^2}$.
- (b) $\iint_R y^2 dA$, em que R é a região triangular de vértices $(0, 1)$, $(1, 2)$ e $(4, 1)$.

P4. Em cada item, calcule a integral dupla. *Sugestão.* Utilize coordenadas polares.

- (a) $\iint_R x^2 y dA$, em que R é a metade superior do disco com centro na origem e raio igual a 5.
- (b) $\iint_R (2x - y) dA$, em que R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e pelas retas $x = 0$ e $x = y$.
- (c) $\iint_R e^{-x^2 - y^2} dA$, em que R é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e pelo eixo y .

(d) $\iint_R x \, dA$, em que R é a região do primeiro quadrante entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$.

P5. Em cada item, calcule a integral dupla. *Sugestão.* Desenhe a região de integração e use coordenadas polares.

(a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2} \, dy \, dx.$

(b) $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} (2x+y) \, dx \, dy.$

P6. Em cada item, use a mudança de variáveis sugerida para calcular a integral dupla.

(a) $\iint_R (2x+y) \, dA$, em que R é o paralelogramo de vértices $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$ e $(1, 5)$, com a mudança de variáveis $x = -1 + 2u + 2v$ e $y = 3 + 2u - 6v$.

(b) $\iint_R x^2 \, dA$, em que R é a região limitada pela elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, com a mudança de variáveis $x = 2u$ e $y = 3v$.

P7. Em cada item, calcule a integral dupla. *Sugestão.* Procure alguma mudança de variáveis adequada.

(a) $\iint_R (3x - 2y) \, dA$, em que R é o paralelogramo de vértices $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(5, 2)$ e $(6, 5)$.

(b) $\iint_R dA$, em que R é a região limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 4.3.2 - Integrais regulares duplas

Exercícios complementares

C1. Em cada item, calcule a integral dupla.

- (a) $\iint_R x \sec^2 y \, dA$, $R = [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{4}]$.
- (b) $\iint_R \frac{1+y^2}{1+x^2} \, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$.
- (c) $\iint_R (2x+y) \, dA$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2, y-1 \leq x \leq 1\}$.
- (d) $\iint_R y\sqrt{x^2-y^2} \, dA$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$.

C2. Em cada item, escreva as integrais iteradas nas duas ordens de integração e calcule-as (você pode escolher a ordem mais fácil para calcular).

- (a) $\iint_R xy \, dA$, em que R é a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 3x$.
- (b) $\iint_R y \, dA$, em que R é a região limitada pelas curvas $y = x-2$ e $x = y^2$.

C3. Em cada item, calcule a integral dupla.

- (a) $\iint_R x \cos y \, dA$, em que R é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$.
- (b) $\iint_R y \, dA$, em que R é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(4, 0)$.

C4. Em cada item, calcule a integral dupla. *Sugestão.* Utilize coordenadas polares.

- (a) $\iint_R \sin(x^2+y^2) \, dA$, em que R é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centro na origem e raios iguais a 1 e 3.
- (b) $\iint_R \frac{y^2}{x^2+y^2} \, dA$, em que R é a região que fica entre os círculos $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 9$.
- (c) $\iint_R \cos \sqrt{x^2+y^2} \, dA$, em que R é o disco com centro na origem e raio igual a 2.
- (d) $\iint_R \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \, dA$, em que $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$.

C5. Em cada item, calcule a integral dupla. *Sugestão.* Desenhe a região de integração e use coordenadas polares.

(a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{y\sqrt{3}}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \, dx \, dy.$

(b) $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2 y \, dx \, dy.$



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 4.3.2

Exercícios principais

P1.

(a) $\iint_R dA = 6.$

(b) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA = 9 \ln 2.$

(c) $\iint_R \sin(x - y) dA = 0.$

(d) $\iint_R dA = \frac{8}{3}.$

(e) $\iint_R \frac{y}{1 + x^2} dA = \frac{\ln 17}{4}.$

(f) $\iint_R e^{-y^2} dA = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^9}.$

P2.

(a) $\iint_R x dA = \int_0^1 \int_y^1 x dx dy = \int_0^1 \int_0^x x dy dx = \frac{1}{3}.$

(b) $\iint_R y^2 e^{xy} dA = \int_0^4 \int_0^y y^2 e^{xy} dx dy = \int_0^4 \int_x^4 y^2 e^{xy} dy dx = \frac{e^{16} - 17}{2}.$

P3.

(a) $\iint_R xy^2 dA = \frac{2}{15}.$

(b) $\iint_R y^2 dA = \frac{11}{3}.$

P4.

(a) $\iint_R x^2 y dA = \frac{1250}{3}.$

(b) $\iint_R (2x - y) dA = \frac{16}{3} - 4\sqrt{2}.$

(c) $\iint_R e^{-x^2 - y^2} dA = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2e^4}.$

(d) $\iint_R x dA = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}.$

P5.

(a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2 - y^2} dy dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4e^4}.$

(b) $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} (2x + y) dx dy = \frac{2a^3}{3}.$

P6.

(a) $\iint_R (2x + y) dA = 48.$

(b) $\iint_R x^2 dA = 6\pi.$

P7.

(a) $\iint_R (3x - 2y) dA = 42.$

(b) $\iint_R dA = \pi ab.$



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 4.3.2

Exercícios complementares

C1.

(a) $\iint_R x \sec^2 y \, dA = 2.$

(b) $\iint_R \frac{1+y^2}{1+x^2} \, dA = \frac{\pi}{3}.$

(c) $\iint_R (2x+y) \, dA = \frac{4}{3}.$

(d) $\iint_R y\sqrt{x^2-y^2} \, dA = \frac{4}{3}.$

C2.

(a) $\iint_R xy \, dA = \int_0^9 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} xy \, dx \, dy = \int_0^3 \int_{x^2}^{3x} xy \, dy \, dx = \frac{243}{8}.$

(b) $\iint_R y \, dA = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y \, dy \, dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} y \, dy \, dx = \frac{9}{4}.$

C3.

(a) $\iint_R x \cos y \, dA = \frac{1 - \cos 1}{2}.$

(b) $\iint_R y \, dA = \frac{2}{3}.$

C4.

(a) $\iint_R \sin(x^2+y^2) \, dA = \frac{\pi(\cos 1 - \cos 9)}{4}.$

(b) $\iint_R \frac{y^2}{x^2+y^2} \, dA = 4\pi.$

(c) $\iint_R \cos \sqrt{x^2+y^2} \, dA = 2\pi(2\sin 2 + \cos 2 - 1).$

(d) $\iint_R \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \, dA = \frac{3\pi^2}{64}.$

C5.

(a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{y\sqrt{3}}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \, dx \, dy = \frac{1}{120}.$

(b) $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2 y \, dx \, dy = \frac{a^5}{15}.$