



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 4.3.3 - Integrais regulares triplas

Exercícios principais

Última atualização: 27 de maio de 2024.

P1. Em cada item, calcule a integral tripla.

- (a) $\iiint_R dV$, $R = [-3, 2] \times [0, 4] \times [-1, 1]$.
- (b) $\iiint_R y dV$, $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x, x - y \leq z \leq x + y\}$.
- (c) $\iiint_R e^{\frac{z}{y}} dV$, $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$.
- (d) $\iiint_R xy dV$, em que R é a região limitada pelas superfícies $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$ e $z = x + y$.
- (e) $\iiint_R 6xy dV$, em que R é a região limitada pelas superfícies $z = 1 + x + y$, $z = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$.
- (f) $\iiint_R (x - y) dV$, em que R é a região limitada pelas superfícies $z = x^2 - 1$, $z = 1 - x^2$, $y = 0$ e $y = 2$.
- (g) $\iiint_R y^2 dV$, em que R é a região limitada pelo tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$.

P2. Em cada item, calcule a integral tripla. *Sugestão.* Utilize coordenadas cilíndricas.

- (a) $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2} dV$, em que R é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.
- (b) $\iiint_R (x + y + z) dV$, em que R é a região do primeiro octante que está abaixo do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$.
- (c) $\iiint_R x^2 dV$, em que R é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

P3. Em cada item, calcule a integral tripla. *Sugestão.* Utilize coordenadas esféricas.

- (a) $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV$, em que R é a bola com centro na origem e raio igual a 5.
- (b) $\iiint_R (x^2 + y^2) dV$, em que R é a região que está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
- (c) $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, em que R é a região que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 4.3.3 - Integrais regulares triplas

Exercícios complementares

C1. Em cada item, calcule a integral tripla.

- (a) $\iiint_R (xz - y^3) dV$, $R = [-1, 0] \times [0, 2] \times [0, 1]$.
- (b) $\iiint_R 2x dV$, $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y\}$.
- (c) $\iiint_R xz dV$, em que R é a região limitada pelo tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$.

C2. Em cada item, calcule a integral tripla. *Sugestão.* Utilize coordenadas cilíndricas.

- (a) $\iiint_R z dV$, em que R é a região limitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.
- (b) $\iiint_R (x - y) dV$, em que R é a região que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 16$, acima do plano xy e abaixo do plano $z = y + 4$.
- (c) $\iiint_R x dV$, em que R é a região limitada por $z = 0$, $z = x + y + 5$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

C3. Em cada item, calcule a integral tripla. *Sugestão.* Desenhe a região de integração e use coordenadas cilíndricas.

- (a) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz dz dx dy$.
- (b) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$.

C4. Em cada item, calcule a integral tripla. *Sugestão.* Utilize coordenadas esféricas.

- (a) $\iiint_R y^2 z^2 dV$, em que R é a região que está acima do cone $\phi = \frac{\pi}{3}$ e abaixo da esfera $\rho = 1$.
- (b) $\iiint_R (9 - x^2 - y^2) dV$, em que R é a região que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e acima do plano xy .
- (c) $\iiint_R x e^{x^2+y^2+z^2} dV$, em que R é a região do primeiro octante que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

C5. Em cada item, calcule a integral tripla. *Sugestão.* Desenhe a região de integração e use coordenadas esféricas.

- (a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy dz dy dx$.

- (b) $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3) dz dx dy.$
- (c) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} dz dx dy.$

C6. Em cada item, use a mudança de variáveis sugerida para calcular a integral tripla.

- (a) $\iiint_R (x - y + 2z) dV$, em que R é o paralelepípedo com origem em $(-1, 2, 1)$ gerado pelos vetores $\vec{v}_1 = (2, 1, -2)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 3)$ e $\vec{v}_3 = (-1, -2, 1)$, com a mudança de variáveis $x = -1 + 2u + v - w$, $y = 2 + u - 2w$ e $z = 1 - 2u + 3v + w$.
- (b) $\iiint_R z^2 dV$, em que R é a região limitada pelo elipsoide $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$, com a mudança de variáveis $x = 2u$, $y = 3v$ e $z = 4w$.

C7. Em cada item, calcule a integral tripla. *Sugestão.* Procure alguma mudança de variáveis adequada.

- (a) $\iiint_R (x + y + z) dV$, em que R é o paralelepípedo com origem em $(2, 1, 3)$ gerado pelos vetores $\vec{v}_1 = (-1, -2, 2)$, $\vec{v}_2 = (3, 1, -1)$ e $\vec{v}_3 = (3, 2, 0)$.
- (b) $\iiint_R dV$, em que R é a região limitada pelo elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 4.3.3

Exercícios principais

P1.

(a) $\iiint_R dV = 40.$

(b) $\iiint_R y dV = \frac{27}{2}.$

(c) $\iiint_R e^{\frac{z}{y}} dV = \frac{e}{2} - \frac{7}{6}.$

(d) $\iiint_R xy dV = \frac{3}{28}.$

(e) $\iiint_R 6xy dV = \frac{65}{28}.$

(f) $\iiint_R (x - y) dV = -\frac{16}{3}.$

(g) $\iiint_R y^2 dV = \frac{8}{15}.$

P2.

(a) $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2} dV = 384\pi.$

(b) $\iiint_R (x + y + z) dV = \frac{128}{15} + \frac{8\pi}{3}.$

(c) $\iiint_R x^2 dV = \frac{2\pi}{5}.$

P3.

(a) $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV = \frac{312500\pi}{7}.$

(b) $\iiint_R (x^2 + y^2) dV = \frac{1688\pi}{15}.$

(c) $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV = \frac{15\pi(2 - \sqrt{2})}{4}.$



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 4.3.3

Exercícios complementares

C1.

(a) $\iiint_R (xz - y^3) dV = -\frac{9}{2}.$

(b) $\iiint_R 2x dV = 4.$

(c) $\iiint_R xz dV = \frac{1}{30}.$

C2.

(a) $\iiint_R z dV = \frac{64\pi}{3}.$

(b) $\iiint_R (x - y) dV = -\frac{255\pi}{4}.$

(c) $\iiint_R x dV = \frac{65\pi}{4}.$

C3.

(a) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz dz dx dy = 0.$

(b) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx = \frac{162\pi}{5}.$

C4.

(a) $\iiint_R y^2 z^2 dV = \frac{47\pi}{3360}.$

(b) $\iiint_R (9 - x^2 - y^2) dV = \frac{486\pi}{5}.$

(c) $\iiint_R x e^{x^2+y^2+z^2} dV = \frac{\pi}{8}.$

C5.

$$(a) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy \, dz \, dy \, dx = \frac{4\sqrt{2}-5}{15}.$$

$$(b) \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3) \, dz \, dx \, dy = 0.$$

$$(c) \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \, dz \, dx \, dy = \frac{4096\pi}{21}.$$

C6.

$$(a) \iiint_R (x - y + 2z) \, dV = 30.$$

$$(b) \iiint_R z^2 \, dV = \frac{512\pi}{5}.$$

C7.

$$(a) \iiint_R (x + y + z) \, dV = 95.$$

$$(b) \iiint_R dV = \frac{4\pi abc}{3}.$$