



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 5.1 - Visão geral dos teoremas

Exercícios principais

Última atualização: 6 de fevereiro de 2025.

P1. Em cada item, diga qual é a dimensão do conjunto.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| (a) Intervalo de $\mathbb{R}$. | (b) Curva em $\mathbb{R}^2$. |
| (c) Curva em $\mathbb{R}^3$. | (d) Região de $\mathbb{R}^2$. |
| (e) Superfície em $\mathbb{R}^3$. | (f) Região de $\mathbb{R}^3$. |
| (g) Conjunto finito de pontos. | |

P2. Em cada item, escolha a medida adequada para medir cada conjunto.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| (a) Intervalo de $\mathbb{R}$. | (b) Curva em $\mathbb{R}^2$. |
| (c) Curva em $\mathbb{R}^3$. | (d) Região de $\mathbb{R}^2$. |
| (e) Superfície em $\mathbb{R}^3$. | (f) Região de $\mathbb{R}^3$. |
| (g) Conjunto finito de pontos. | |

P3. Em cada item, explique como é a fronteira do conjunto.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| (a) Intervalo de $\mathbb{R}$. | (b) Curva em $\mathbb{R}^2$. |
| (c) Curva em $\mathbb{R}^3$. | (d) Região de $\mathbb{R}^2$. |
| (e) Superfície em $\mathbb{R}^3$. | (f) Região de $\mathbb{R}^3$. |

P4. De maneira informal, o Teorema Fundamental do Cálculo, o Teorema do Campo Conservativo, o Teorema da Divergência de Gauss, o Teorema de Stokes e o Teorema de Green podem ser enunciados de forma similar:

$$\int_R df = \int_{\partial R} f.$$

- (a) O que significam R e ∂R nas duas integrais?
(b) Qual é a relação entre as dimensões de R e ∂R ? Dê exemplos.
(c) O que significam f e df nas duas integrais?

P5. Quando um teorema envolvendo integrais é usado, é necessário que haja uma compatibilidade entre as orientações da região R e sua fronteira ∂R . Em cada item, explique como deve ser essa compatibilidade.

- | | |
|--|--|
| (a) R é um intervalo de $\mathbb{R}$. | (b) R é uma curva em $\mathbb{R}^2$. |
| (c) R é uma curva em $\mathbb{R}^3$. | (d) R é uma região de $\mathbb{R}^2$. |
| (e) R é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. | (f) R é uma região de $\mathbb{R}^3$. |



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 5.1

Exercícios principais

P1.

- (a) Dimensão 1.
- (b) Dimensão 1.
- (c) Dimensão 1.
- (d) Dimensão 2.
- (e) Dimensão 2.
- (f) Dimensão 3.
- (g) Dimensão 0.

P2.

- (a) Medida de comprimento.
- (b) Medida de comprimento.
- (c) Medida de comprimento.
- (d) Medida de área.
- (e) Medida de área.
- (f) Medida de volume.
- (g) Medida de contagem.

P3.

- (a) Em geral, dois pontos, os dois extremos do intervalo.
- (b) Em geral, dois pontos, os dois extremos da curva. Se a curva é fechada, então a fronteira é o conjunto vazio.
- (c) Em geral, dois pontos, os dois extremos da curva. Se a curva é fechada, então a fronteira é o conjunto vazio.
- (d) Em geral, uma ou mais curvas fechadas em $\mathbb{R}^2$.
- (e) Em geral, uma curva em $\mathbb{R}^3$. Se a superfície é fechada, então a fronteira é o conjunto vazio.
- (f) Em geral, uma ou mais superfícies fechadas em $\mathbb{R}^3$.

P4.

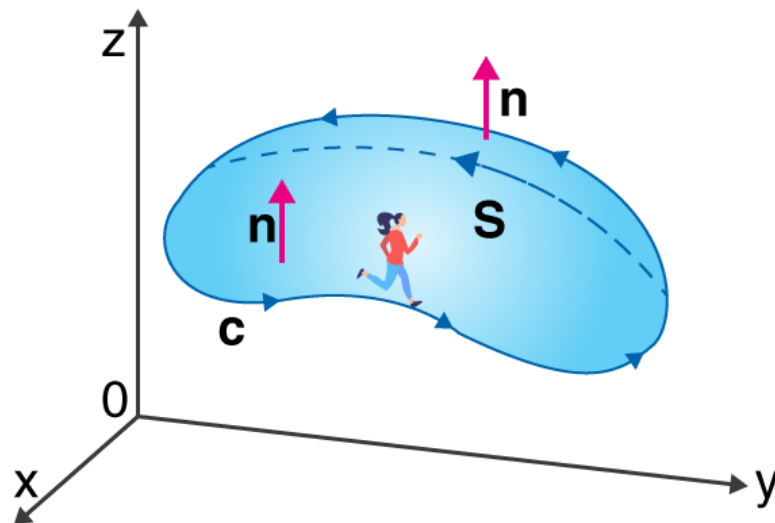
- (a) R representa alguma região e ∂R representa a fronteira da região R . Na integral do lado esquerdo, a integral é feita sobre a região R , usando a medida adequada para a região. Na integral do lado direito, a integral é feita sobre ∂R , usando a medida adequada.
- (b) Normalmente, a dimensão de ∂R é uma unidade a menos do que a dimensão de R . Exemplos: (1) se R é uma região de $\mathbb{R}^3$ com volume não nulo, portanto de dimensão 3, então sua fronteira ∂R é uma superfície, que possui dimensão 2; (2) se R é uma superfície com área não nula, portanto de dimensão 2, então sua fronteira ∂R é uma curva, que possui dimensão 1; (3) se R é uma curva ou intervalo de comprimento não nulo, portanto de dimensão 1, então sua fronteira ∂R é formada por dois pontos, que possui dimensão 0.
- (c) f é uma função e df é a função que está sendo integrada na integral do lado direito, df é a derivada de f e f é a função que está sendo integrada do lado esquerdo. Cada teorema é formulado para um tipo específico de função f e a derivada df deve ser interpretada como a derivada adequada para o tipo da função f .

P5.

- (a) O ponto final do intervalo é considerado de orientação positiva e o ponto inicial de orientação negativa.
- (b) O ponto final da curva é considerado de orientação positiva e o ponto inicial de orientação negativa.
- (c) O ponto final da curva é considerado de orientação positiva e o ponto inicial de orientação negativa.
- (d) A orientação da curva ∂R deve ser escolhida de tal forma que, ao caminhar sobre a curva, a região R deve ficar à esquerda de quem caminha, como nas figuras abaixo.



- (e) A orientação da curva ∂R deve ser escolhida de tal forma que, ao caminhar sobre a curva ficando em pé no mesmo sentido do vetor normal da superfície, a superfície R deve ficar à esquerda de quem caminha, como na figura abaixo.



- (f) A orientação da superfície deve ser escolhida de tal forma que, em cada ponto da superfície, o vetor normal aponte para fora da região R , como na figura abaixo.

