



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 5.2 - O Teorema Fundamental do Cálculo

Exercícios principais

Última atualização: 6 de fevereiro de 2025.

- P1.** Explique como o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser visto sob a forma $\int_R df = \int_{\partial R} f$.
- P2.** Em cada item, determine a fronteira do subconjunto de $\mathbb{R}$.
- (a) $[2, 5]$. (b) $[0, 1] \cup [2, 5]$.
- P3.** Em cada item, explique como é a orientação da fronteira do conjunto sobre o qual a integral está sendo calculada, de forma compatível com o Teorema Fundamental do Cálculo.
- (a) $\int_2^5 g(x) dx$. (b) $\int_5^2 g(x) dx$.
- (c) $\int_{[2,5]} g(x) dx$. (d) $\int_{[0,1] \cup [2,5]} g(x) dx$.
- P4.** Em cada item, calcule a integral. Interprete o cálculo na forma geral dos teoremas.
- (a) $\int_2^5 2x dx$. (b) $\int_5^2 2x dx$.
- (c) $\int_{[2,5]} 2x dx$. (d) $\int_{[0,1] \cup [2,5]} 2x dx$.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 5.2

Exercícios principais

P1. Uma das versões do Teorema Fundamental do Cálculo diz que $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$. Se interpretarmos a região R como o intervalo $[a, b]$ e df como f' , então $\int_R df = \int_a^b f'(x) dx$. Como $R = [a, b]$, então ∂R é o conjunto com dois pontos $\{a, b\}$, com a convenção de que o ponto final b tem orientação positiva e o ponto inicial a tem orientação negativa. Como $\{a, b\}$ é um conjunto de pontos, então a medida adequada é a medida de contagem, o que faz com que a integral se torne uma soma:

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} f &= (\text{medida de } \{a\}) \cdot (\text{sinal de } \{a\}) \cdot f(a) + (\text{medida de } \{b\}) \cdot (\text{sinal de } \{b\}) \cdot f(b) \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot f(a) + 1 \cdot 1 \cdot f(b) \\ &= f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_R df = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) = \int_{\partial R} f.$$

P2.

(a) Os pontos 2 e 5.

(b) Os pontos 0, 1, 2 e 5.

P3.

(a) O ponto 5 tem orientação positiva e o ponto 2 tem orientação negativa.

(b) O ponto 2 tem orientação positiva e o ponto 5 tem orientação negativa.

(c) Quando mencionamos apenas o conjunto sem mencionar qual índice é o inicial e qual é o final, por convenção se considera que a integral vai do menor para o maior, isto é, $\int_{[a,b]} g(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. Assim, neste item, o ponto 5 tem orientação positiva e o ponto 2 tem orientação negativa.

(d) Esta notação representa o cálculo da integral nos intervalos $[0, 1]$ e $[2, 5]$, isto é, $\int_{[0,1] \cup [2,5]} g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx + \int_2^5 g(x) dx$. Assim, neste item, os pontos finais 1 e 5 têm orientação positiva e os pontos iniciais 0 e 2 têm orientação negativa.

P4.

- (a) $\int_2^5 2x \, dx = x^2 \Big|_2^5 = 5^2 - 2^2 = 21$. Agora, vamos interpretar esse cálculo sob a visão dos teoremas.

O teorema nos diz que $\int_R df = \int_{\partial R} f$. Usando $f(x) = x^2$ e $R = [2, 5]$, então $f'(x) = 2x$ e o lado esquerdo da igualdade do teorema $\int_R df$ fica igual a $\int_2^5 2x \, dx$ que é a integral que queremos calcular. Assim, $\int_2^5 2x \, dx = \int_R df = \int_{\partial R} f$, ou seja, o resultado que procuramos é igual a $\int_{\partial R} f$. Como $R = [2, 5]$, então ∂R é o conjunto com dois pontos $\{2, 5\}$, com a convenção de que o ponto final 5 tem orientação positiva e o ponto inicial 2 tem orientação negativa. Como $\{2, 5\}$ é um conjunto de pontos, então a medida adequada é a medida de contagem, o que faz com que a integral se torne uma soma:

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} f &= (\text{medida de } \{2\}) \cdot (\text{sinale de } \{2\}) \cdot f(2) + (\text{medida de } \{5\}) \cdot (\text{sinale de } \{5\}) \cdot f(5) \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 2^2 + 1 \cdot 1 \cdot 5^2 \\ &= 21. \end{aligned}$$

- (b) $\int_5^2 2x \, dx = x^2 \Big|_5^2 = 2^2 - 5^2 = -21$. Tudo funciona exatamente como no item anterior, exceto que, nesse caso, 2 tem orientação positiva e 5 tem orientação negativa. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} f &= (\text{medida de } \{2\}) \cdot (\text{sinale de } \{2\}) \cdot f(2) + (\text{medida de } \{5\}) \cdot (\text{sinale de } \{5\}) \cdot f(5) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot (-1) \cdot 5^2 \\ &= -21. \end{aligned}$$

- (c) Como $\int_{[2,5]} 2x \, dx = \int_2^5 2x \, dx$, a resposta aqui é a mesma do item (a).

(d)

$$\int_{[0,1] \cup [2,5]} 2x \, dx = \int_0^1 2x \, dx + \int_2^5 2x \, dx = x^2 \Big|_0^1 + x^2 \Big|_2^5 = (1^2 - 0^2) + (5^2 - 2^2) = 22.$$

Agora, vamos interpretar esse cálculo sob a visão dos teoremas. O teorema nos diz que $\int_R df = \int_{\partial R} f$. Usando $f(x) = x^2$ e $R = [0, 1] \cup [2, 5]$, então $f'(x) = 2x$ e o lado esquerdo da igualdade do teorema $\int_R df$ fica igual a $\int_2^5 2x \, dx$ que é a integral que queremos calcular. Assim, $\int_{[0,1] \cup [2,5]} 2x \, dx = \int_R df = \int_{\partial R} f$, ou seja, o resultado que procuramos é igual a $\int_{\partial R} f$. Como $R = [0, 1] \cup [2, 5]$, então ∂R é o conjunto com quatro pontos $\{0, 1, 2, 5\}$, com a convenção de que os pontos finais 1 e 5 têm orientação positiva e os pontos iniciais 0 e 2 têm orientação negativa. Como $\{0, 1, 2, 5\}$ é um conjunto de pontos, então a medida adequada é a medida de

contagem, o que faz com que a integral se torne uma soma:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial R} f &= (\text{medida de } \{0\}) \cdot (\text{senal de } \{0\}) \cdot f(0) + (\text{medida de } \{1\}) \cdot (\text{senal de } \{1\}) \cdot f(1) + \\
 &\quad (\text{medida de } \{2\}) \cdot (\text{senal de } \{2\}) \cdot f(2) + (\text{medida de } \{5\}) \cdot (\text{senal de } \{5\}) \cdot f(5) \\
 &= 1 \cdot (-1) \cdot 0^2 + 1 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot (-1) \cdot 2^2 + 1 \cdot 1 \cdot 5^2 \\
 &= 22.
 \end{aligned}$$