



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 5.3 - O Teorema do Campo Conservativo

Exercícios principais

Última atualização: 6 de fevereiro de 2025.

- P1.** Explique como o Teorema do Campo Conservativo pode ser visto sob a forma $\int_R df = \int_{\partial R} f$.
- P2.** Em cada item, determine a fronteira da curva e descreva sua orientação de forma compatível com o Teorema de Campo Conservativo.
- (a) Curva dada por $x(t) = t^2 - t + 1$ e $y(t) = t^3 + t^2 - 3$, com $t \in [1, 3]$.
 - (b) Curva dada por $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, com $0 \leq t \leq \pi$.
 - (c) Curva dada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - (d) Curva dada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - (e) Segmento de reta com ponto inicial $(1, 2, -1)$ e ponto final $(0, 2, 0)$.
- P3.** Em cada item, calcule a integral $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$ e $f(P_f) - f(P_i)$ e verifique que o resultado é o mesmo. *Observação.* P_f e P_i são os pontos final e inicial da curva C , respectivamente.
- (a) $f(x, y) = xy + x + y$ e C é a curva $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
 - (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + y$ e C é a curva $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - (c) $f(x, y, z) = 2x^2 - y + z$ e C é o segmento de reta com ponto inicial $(1, 2, -1)$ e ponto final $(0, 2, 0)$.
- P4.** Em cada item, use o Teorema do Campo Conservativo para calcular a integral $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$.
- (a) $f(x, y) = xe^{xy^2}$ e C é a curva dada pela metade superior da elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ com orientação no sentido anti-horário.
 - (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e C é qualquer curva com ponto inicial $(1, 0, -1)$ e ponto final $(2, 3, 4)$.
 - (c) $f(x, y) = \frac{\ln(1 + e^{\sin(xy)})}{3 + \sqrt{x^2 + y^2}}$ e C é a elipse $\frac{(x-3)^2}{7^2} + \frac{(y+2)^2}{8^2} = 1$ com orientação no sentido anti-horário.
 - (d) f é uma função qualquer e C é uma curva fechada qualquer.
- P5.** Um exercício pede para você calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ mas, aparentemente, a curva e/ou o campo vetorial $\vec{F}$ são extremamente complicados. O que você faz?

P6. Em cada item, calcule a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(a) $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy^2, 2x^2y)$ e C é a curva dada pelo arco da elipse $y = \frac{1}{x}$ de $(1, 1)$ e $\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (yze^{xz}, e^{xz}, xye^{xz})$ e C é a curva $\vec{r}(t) = (t^2 + 1, t^2 - 1, t^2 - 2t)$, $0 \leq t \leq 2$.

(c) $\vec{F}(x, y) = (\operatorname{tg} y, x \sec^2 y)$ e C é qualquer curva com ponto inicial $(1, 0)$ e ponto final $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

P7. É possível usar o Teorema do Campo Conservativo na integral $\int_C (x + y, -z, 2xz) \cdot d\vec{r}$?



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 5.3 - O Teorema do Campo Conservativo

Exercícios complementares

C1. Em cada item, calcule a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(a) $\vec{F}(x, y) = (x^2y^3, x^3y^2)$ e C é a curva $\vec{r}(t) = (t^3 - 2t, t^3 + 2t)$, $0 \leq t \leq 1$.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy + 2z)$ e C é o segmento de reta com ponto inicial $(1, 0, -2)$ e ponto final $(4, 6, 3)$.

(c) $\vec{F}(x, y) = (1 - ye^{-x}, e^{-x})$ e C é qualquer curva com ponto inicial $(0, 1)$ e ponto final $(1, 2)$.

C2. Quais são as condições equivalentes que definem um campo conservativo?

C3. Considere $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ e $\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$.

(a) Considere o caminho C dado por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcule a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e verifique que o resultado é 2π .

(b) Pelo resultado do item (a) e pelo exercício **C2.**, sabemos que $\vec{F}$ não é conservativo. Porém, pelo exercício **C1** da lista de exercícios 3, sabemos que $\nabla f = \vec{F}$. Isto não parece contradizer o exercício **C2.**?

MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 5.3

Exercícios principais

P1. O Teorema do Campo Conservativo diz que $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(P_f) - f(P_i)$, em que P_f e P_i são os pontos final e inicial da curva C , respectivamente. O teorema é válido tanto em $\mathbb{R}^2$ quanto em $\mathbb{R}^3$ (também é válido em $\mathbb{R}$, mas acaba se tornando o Teorema Fundamental do Cálculo). Ao aplicar o teorema em $\mathbb{R}^2$, C deve ser uma curva em $\mathbb{R}^2$ e f deve ser uma função de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$. Quando aplicado em $\mathbb{R}^3$, C deve ser uma curva em $\mathbb{R}^3$ e f deve ser uma função de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}$. Agora vamos ver que o Teorema do Campo Conservativo se encaixa na forma do enunciado. Considere R como sendo a curva C e df como ∇f . Assim, $\int_R df = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$. Como R é a curva C , então ∂R é o conjunto com dois pontos $\{P_i, P_f\}$, em que P_i e P_f são os pontos inicial e final da curva C , respectivamente. A convenção de orientação diz que o ponto final P_f tem orientação positiva e o ponto inicial P_i tem orientação negativa. Como $\{P_i, P_f\}$ é um conjunto de pontos, então a medida adequada é a medida de contagem, o que faz com que a integral se torne uma soma:

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} f &= (\text{medida de } \{P_i\}) \cdot (\text{ sinal de } \{P_i\}) \cdot f(P_i) + (\text{medida de } \{P_f\}) \cdot (\text{ sinal de } \{P_f\}) \cdot f(P_f) \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot f(P_i) + 1 \cdot 1 \cdot f(P_f) \\ &= f(P_f) - f(P_i). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_R df = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(P_f) - f(P_i) = \int_{\partial R} f.$$

Convém observar que quando a curva é fechada, então P_f e P_i são iguais e $f(P_f) - f(P_i) = 0$. Neste caso, ∂R é o conjunto vazio e, portanto, a integral $\int_{\partial R} f$ é uma soma sem termos, que também é igual a 0. Assim, o que fizemos aqui funciona tanto para curvas abertas quanto curvas fechadas.

P2.

- (a) A fronteira é formada pelos pontos $(1, -1)$ e $(7, 33)$. O ponto final $(7, 33)$ possui orientação positiva e o ponto inicial $(1, -1)$ possui orientação negativa.
- (b) A fronteira é formada pelos pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. O ponto final $(-2, 0)$ possui orientação positiva e o ponto inicial $(2, 0)$ possui orientação negativa.
- (c) A fronteira é o conjunto vazio.
- (d) A fronteira é formada pelos pontos $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 2\pi)$. O ponto final $(1, 0, 2\pi)$ possui orientação positiva e o ponto inicial $(1, 0, 0)$ possui orientação negativa.
- (e) A fronteira é formada pelos pontos $(1, 2, -1)$ e $(0, 2, 0)$. O ponto final $(0, 2, 0)$ possui orientação positiva e o ponto inicial $(1, 2, -1)$ possui orientação negativa.

P3.

$$\text{(a)} \quad \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_C (y+1, x+1) \cdot d\vec{r} = -4 \quad \text{e} \quad \text{(b)} \quad \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_C (2x, 2y+1) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{e} \quad f(P_f) - f(P_i) = f(-2, 0) - f(2, 0) = -2 - 2 = -4.$$

$$\text{(c)} \quad \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_C (4x, -1, 1) \cdot d\vec{r} = -1 \quad \text{e} \quad f(P_f) - f(P_i) = f(0, 2, 0) - f(1, 2, -1) = -2 - (-1) = -1.$$

P4.

$$\text{(a)} \quad \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = -4.$$

$$\text{(b)} \quad \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = 27.$$

$$\text{(c)} \quad \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = 0.$$

$$\text{(d)} \quad \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = 0.$$

P5. Provavelmente, o exercício espera que você perceba que calcular a integral diretamente será trabalhoso e, assim, tente usar o Teorema do Campo Conservativo. Neste caso, você tenta encontrar um campo escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$ e, se tal f existir, você calcula a integral usando o teorema.

P6.

$$\text{(a)} \quad \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9.$$

$$\text{(b)} \quad \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4.$$

$$\text{(c)} \quad \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

P7. Não, pois o campo vetorial $\vec{F} = (x+y, -z, 2xz)$ não é conservativo. O caminho mais rápido para mostrar que $\vec{F}$ não é conservativo é calcular $\nabla \times \vec{F}$ e verificar que é diferente de 0.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 5.3

Exercícios complementares

C1.

(a) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -9.$

(b) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 77.$

(c) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{2}{e}.$

C2. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial com domínio $\text{Dom } \vec{F}$. As três condições abaixo são equivalentes:

- (i) Existe um campo escalar f definido em $\text{Dom } \vec{F}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.
- (ii) Para qualquer curva fechada C contida em $\text{Dom } \vec{F}$, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.
- (iii) Para quaisquer curvas C_1 e C_2 contidas em $\text{Dom } \vec{F}$ que possuem os mesmos pontos inicial e final, $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Se uma (portanto, todas) das condições acima é satisfeita, o campo vetorial $\vec{F}$ é denominado conservativo.

C3.

(a)

- (b) O problema aqui está nos domínios considerados. A função f é uma função potencial para $\vec{F}$ apenas onde ambas coexistem, que é em todo $\mathbb{R}^2$, exceto sobre o eixo y . Isso diz que a integral sobre curvas fechadas que não passam sobre o eixo y devem ser iguais a 0. Como a curva do item (a) passa sobre o eixo y , o teorema não pode garantir que o resultado da integral dará 0.