



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 5.4 - O Teorema da Divergência de Gauss

Exercícios principais

Última atualização: 7 de fevereiro de 2025.

- P1.** Explique como o Teorema da Divergência de Gauss pode ser visto sob a forma $\int_R df = \int_{\partial R} f$.
- P2.** Em cada item, determine a fronteira da região em $\mathbb{R}^3$ e descreva sua orientação de forma compatível com o Teorema da Divergência de Gauss.
- (a) A esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.
 - (b) O hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ com $z \geq 0$.
 - (c) Região interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e entre os planos $z = 0$ e $z = 3$.
- P3.** Em cada item, descreva a região R em $\mathbb{R}^3$ e parametrize sua fronteira com orientação de forma compatível com o Teorema da Divergência de Gauss.
- (a) R é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$.
 - (b) R é a região delimitada por $z = x^2 + y^2$ e $z = 9$.
- P4.** Em cada item, calcule $\iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV$ e $\iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ e verifique que o resultado é o mesmo. *Sugestão.* Use as descrições e parametrizações do exercício anterior.
- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ e R é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$.
 - (b) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z^3, 2yz, 4z^2)$ e R é a região delimitada por $z = x^2 + y^2$ e $z = 9$.
- P5.** Em cada item, use o Teorema da Divergência de Gauss para calcular a integral $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$. Em todos os itens, utilize a orientação de S com vetor normal apontando para fora da região limitada por S .
- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (xye^z, xy^2 z^3, -ye^z)$ e S é a superfície do paralelepípedo $[0, 3] \times [0, 2] \times [0, 1]$.
 - (b) $\vec{F}(x, y, z) = (xe^y, z - e^y, -xy)$ e S é o elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.
- P6.** Um exercício pede para você calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, em que S é uma superfície fechada, mas, aparentemente, a superfície e/ou o campo vetorial $\vec{F}$ são extremamente complicados. O que você faz?



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 5.4 - O Teorema da Divergência de Gauss

Exercícios complementares

- C1.** Em cada item, descreva a região R em $\mathbb{R}^3$ e parametrize sua fronteira com orientação de forma compatível com o Teorema da Divergência de Gauss.
- (a) R é a região delimitada por $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 0$.
- (b) R é o cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
- C2.** Em cada item, calcule $\iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV$ e $\iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ e verifique que o resultado é o mesmo. *Sugestão.* Use as descrições e parametrizações do exercício anterior.
- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, z)$ e R é a região delimitada por $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 0$.
- (b) $\vec{F}(x, y, z) = (3x, xy, 2xz)$ e R é o cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
- C3.** Seja $\vec{F}$ um campo vetorial tal que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$. É verdade que $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$ para qualquer superfície S ?
- C4.** O Teorema da Divergência de Gauss é mais usado para trocar uma integral de superfície por uma integral tripla em uma região. Porém, também podemos usar o caminho contrário. Nesse caso, temos uma integral tripla em uma região e usamos o teorema para calcular essa integral através de uma integral de superfície na fronteira da região. Como forma de testar esse caminho, calcule a integral $\iiint_R 1 dV$, em que R é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, usando o Teorema da Divergência de Gauss. *Sugestão.* Observe que para usar o teorema, devemos procurar um campo vetorial $\vec{F}$ tal que $\nabla \cdot \vec{F} = 1$. Existem infinitos campos vetoriais com essa propriedade (por exemplo, $\vec{F} = (0, 0, z)$). Qualquer campo $\vec{F}$ que você escolher tal que $\nabla \cdot \vec{F} = 1$ funcionará.
- C5.** Existe uma forma não convencional de usar o Teorema da Divergência de Gauss. Imagine que a superfície S que determina a fronteira de uma região R é composta de duas partes: S_1 e S_2 . Oriente-as de forma que o vetor normal aponte para fora. Pelo Teorema da Divergência de Gauss,

$$\iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Imagine que, destas três integrais, apenas $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ seja difícil de calcular. Assim, podemos calculá-la indiretamente como

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Em resumo, podemos calcular a integral em uma superfície não fechada S_1 escolhendo uma segunda superfície S_2 de tal forma que S_1 e S_2 formem uma superfície fechada e aplicar o Teorema da Divergência de Gauss. Como forma de testar esse caminho, calcule a integral

$$\iint_S \left(z^2 x, \frac{y^3}{3} + \operatorname{tg} z, x^2 z + y^2 \right) \cdot d\vec{S},$$

em que S é a metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada para cima. *Sugestão.* Chame a superfície da integral pedida de S_1 e considere S_2 como sendo o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ e $z = 0$. Veja que S_1 e S_2 determinam uma região fechada e aplique a ideia passada no enunciado.

MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 5.4

Exercícios principais

P1. O Teorema da Divergência de Gauss diz que $\iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV = \iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S}$, em que R é uma região de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{F}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$. Considerando f como $\vec{F}$ e df como $\nabla \cdot \vec{F}$, ficamos com

$$\int_R df = \iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV = \iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial R} f.$$

P2.

- (a) A superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com vetor normal apontando para fora.
- (b) As superfícies: (1) superfície do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com $z \geq 0$ e (2) superfície dada pelo disco $x^2 + y^2 = 9$ e $z = 0$. A orientação da superfície (1) é com vetor normal apontando para cima (coordenada z positiva) e a orientação da superfície (2) é com vetor normal apontando para baixo (coordenada z negativa).
- (c) As superfícies: (1) superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ com $0 \leq z \leq 3$, (2) superfície dada pelo disco $x^2 + y^2 \leq 4$ e $z = 0$ e (3) superfície dada pelo disco $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 3$. A orientação da superfície (1) é com vetor normal apontando para fora do cilindro, a orientação da superfície (2) é com vetor normal apontando para baixo (coordenada z negativa) e a orientação da superfície (3) é com vetor normal apontando para cima (coordenada z positiva).

P3.

- (a) A região R pode ser descrita em coordenadas esféricas com as variações: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \rho \leq 4$. A fronteira de R é a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ com vetor normal apontando para fora. Uma possível parametrização de ∂R é $\vec{r}(\phi, \theta) = (4 \sin \phi \cos \theta, 4 \sin \phi \sin \theta, 4 \cos \phi)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para fora, usamos o sentido dado por $\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = (16 \sin^2 \phi \cos \theta, 16 \sin^2 \phi \sin \theta, 16 \sin \phi \cos \phi)$.
- (b) A região R pode ser descrita em coordenadas cilíndricas com as variações: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 3$ e $r^2 \leq z \leq 9$. A fronteira de R é formada por parte da superfície do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e por parte do plano $z = 9$. Uma possível parametrização da parte da superfície do parabolóide é $\vec{r}(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para fora do parabolóide, usamos o sentido dado por $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_r = (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, -r)$. Uma possível parametrização da parte da superfície do plano é $\vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 9)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para cima, usamos o sentido dado por $\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = (0, 0, r)$.

P4.

$$(a) \iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV = \iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{256\pi}{3}. \quad (b) \iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV = \iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 2430\pi.$$

P5.

(a) $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{9}{2}.$

(b) $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$

P6. Provavelmente, o exercício espera que você perceba que calcular a integral diretamente será trabalhoso e, assim, tente usar o Teorema da Divergência de Gauss. Neste caso, você identifica a região R que está dentro de S e calcula integral $\iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV$, que é igual à integral pedida no exercício.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 5.4

Exercícios complementares

C1.

- (a) A região R pode ser descrita em coordenadas cilíndricas com as variações: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq z \leq 4 - r^2$. A fronteira de R é formada por parte da superfície do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e por parte do plano $z = 0$. Uma possível parametrização da parte da superfície do parabolóide é $\vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 4 - r^2)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 2$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para fora do parabolóide, usamos o sentido dado por $\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, r)$. Uma possível parametrização da parte da superfície do plano é $\vec{r}(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 2$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para baixo, usamos o sentido dado por $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_r = (0, 0, -r)$.
- (b) A região R pode ser descrita com as variações: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. A fronteira de R é formada pelas seis faces do cubo, cada uma delas é uma parte de um dos planos: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$. A face que é parte do plano $x = 0$ pode ser parametrizada por $\vec{r}(z, y) = (0, y, z)$, com $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para fora do cubo, usamos o sentido dado por $\vec{r}_z \times \vec{r}_y = (-1, 0, 0)$. A face que é parte do plano $x = 1$ pode ser parametrizada por $\vec{r}(y, z) = (1, y, z)$, com $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para fora do cubo, usamos o sentido dado por $\vec{r}_y \times \vec{r}_z = (1, 0, 0)$. As parametrizações das outras quatro faces são feitas de forma similar.

C2.

$$(a) \iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV = \iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 24\pi. \quad (b) \iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV = \iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{9}{2}.$$

C3. Não, pois o Teorema da Divergência de Gauss só pode ser aplicado a superfícies fechadas. Assim, se S é fechada, então com certeza $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$. Porém, se S não é fechada, não é possível aplicar o teorema diretamente.

C4. $\iiint_R 1 dV = 36\pi.$

C5. $\iint_S \left(z^2 x, \frac{y^3}{3} + \operatorname{tg} z, x^2 z + y^2 \right) \cdot d\vec{S} = \frac{13\pi}{20}.$