



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 5.5 - O Teorema de Stokes

Exercícios principais

Última atualização: 7 de fevereiro de 2025.

- P1.** Explique como o Teorema de Stokes pode ser visto sob a forma $\int_R df = \int_{\partial R} f$.
- P2.** Em cada item, determine a fronteira da superfície em $\mathbb{R}^3$ e descreva sua orientação de forma compatível com o Teorema de Stokes.
- (a) A superfície do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com $z \geq 0$, com orientação de vetor normal apontando para cima.
 - (b) A superfície do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com $z \leq 0$, com orientação de vetor normal apontando para baixo.
 - (c) A superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com orientação de vetor normal apontando para fora da esfera.
 - (d) A superfície do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com $z \leq 9$, com orientação de vetor normal apontando para fora do parabolóide.
 - (e) A superfície $z = 2$ com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, com orientação de vetor normal apontando para cima.
- P3.** Em cada item, parametrize a superfície S em $\mathbb{R}^3$ e sua fronteira com orientação de forma compatível com o Teorema de Stokes.
- (a) S é a superfície do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $z \geq 0$ com orientação para cima.
 - (b) S é a superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$ e $0 \leq z \leq 4$ com orientação para fora do cone.
- P4.** Em cada item, calcule $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ e $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e verifique que o resultado é o mesmo. *Sugestão.* Use as parametrizações do exercício anterior.
- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$ e S é a superfície do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $z \geq 0$ com orientação para cima.
 - (b) $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, -2)$ e S é a superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$ e $0 \leq z \leq 4$ com orientação para fora do cone.
- P5.** Em cada item, use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$.
- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 \sin z, y^2, xy)$ e S é a parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy , com orientação para cima.
 - (b) $\vec{F}(x, y, z) = (ye^z, xy \sin z, x \cos z)$ e S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $z \geq 0$ com orientação para cima.

P6. Encontre quatro superfícies em $\mathbb{R}^3$ distintas cujas fronteiras são iguais ao círculo de equações

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Determine a orientação da superfície para que a orientação compatível da fronteira seja no sentido anti-horário para quem vê de cima.

P7. Em cada item, use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. *Sugestão.* Você precisa encontrar uma superfície S cuja fronteira seja C . Existem infinitas escolhas, é recomendável escolher a mais fácil de manipular.

(a) $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ orientada no sentido anti-horário para quem vê de cima.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (yz, 2xz, e^{xy})$ e C é o círculo $x^2 + y^2 = 16$ com $z = 5$, orientado no sentido anti-horário para quem vê de cima.

P8. Um exercício pede para você calcular $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$. O que você faz?



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 5.5 - O Teorema de Stokes

Exercícios complementares

- C1.** Em cada item, parametrize a superfície S em $\mathbb{R}^3$ e sua fronteira com orientação de forma compatível com o Teorema de Stokes.
- (a) S é a superfície do parabolóide $z = 5 - x^2 - y^2$ e $z \geq 1$ com orientação para fora do parabolóide.
 - (b) S é a parte do plano $y + z = 2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com orientação para cima.
- C2.** Em cada item, calcule $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ e $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e verifique que o resultado é o mesmo. *Sugestão.* Use as parametrizações do exercício anterior.
- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (-2yz, y, 3x)$ e S é a superfície do parabolóide $z = 5 - x^2 - y^2$ e $z \geq 1$ com orientação para fora do parabolóide.
 - (b) $\vec{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ e S é a parte do plano $y + z = 2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com orientação para cima.
- C3.** Em cada item, use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$.
- (a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z^2, y^2z^2, xyz)$ e S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com orientação para cima.
 - (b) $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, xy, x^2yz)$ e S é a união das faces do cubo $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, com exceção da face inferior, com orientação para fora do cubo.
- C4.** A integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, em que C é uma curva em $\mathbb{R}^3$, aparece em dois teoremas: Teorema do Campo Conservativo e Teorema de Stokes. No caso do Teorema de Stokes, C precisa ser uma curva fechada. Se você fosse escolher um roteiro de tentativas para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, qual seria?

MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 5.5

Exercícios principais

P1. O Teorema de Stokes diz que $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, em que S é uma superfície de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{F}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$. Considerando R como sendo a superfície S , f como $\vec{F}$ e df como $\nabla \times \vec{F}$, ficamos com

$$\int_R df = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial R} f.$$

P2.

- (a) A fronteira é o círculo $x^2 + y^2 = 9$ com $z = 0$. A orientação da fronteira é no sentido anti-horário para quem vê de cima.
- (b) A fronteira é o círculo $x^2 + y^2 = 9$ com $z = 0$. A orientação da fronteira é no sentido horário para quem vê de cima.
- (c) A fronteira é o conjunto vazio.
- (d) A fronteira é o círculo $x^2 + y^2 = 9$ com $z = 9$. A orientação da fronteira é no sentido horário para quem vê de cima.
- (e) A fronteira é formada pelos quatro segmentos de reta que formam os lados da superfície. A orientação da fronteira é no sentido anti-horário para quem vê de cima.

P3.

- (a) A superfície S pode ser parametrizada por $\vec{r}(\phi, \theta) = (2 \sin \phi \cos \theta, 2 \sin \phi \sin \theta, 2 \cos \phi)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para fora, usamos o sentido dado por $\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = (4 \sin^2 \phi \cos \theta, 4 \sin^2 \phi \sin \theta, 4 \sin \phi \cos \phi)$. A fronteira de S é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$ com orientação no sentido anti-horário para quem vê de cima. Uma possível parametrização para ∂S é $\vec{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- (b) A superfície S pode ser parametrizada por $\vec{r}(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 4$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para fora do cone, usamos o sentido dado por $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_r = (r \cos \theta, r \sin \theta, -r)$. A fronteira de S é o círculo $x^2 + y^2 = 16$ e $z = 4$ com orientação no sentido horário para quem vê de cima. Uma possível parametrização para ∂S é $\vec{r}(\theta) = (4 \cos \theta, -4 \sin \theta, 4)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

P4.

(a) $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -4\pi.$ (b) $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -32\pi.$

P5.

(a) $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$ (b) $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = -16\pi.$

P6. Há infinitas superfícies com a fronteira dada. Quatro possibilidades são:

1. Disco $x^2 + y^2 \leq 1$ e $z = 0$. O vetor normal deve ser orientado para cima para que a fronteira fique no sentido anti-horário para quem vê de cima.
2. Superfície do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com $z \geq 0$. O vetor normal deve ser orientado para cima para que a fronteira fique no sentido anti-horário para quem vê de cima.
3. Superfície do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com $z \leq 0$. O vetor normal deve ser orientado para cima (ou seja, para dentro do hemisfério) para que a fronteira fique no sentido anti-horário para quem vê de cima.
4. Superfície do parabolóide elíptico $z = 1 - x^2 - y^2$ com $0 \leq z \leq 1$. O vetor normal deve ser orientado para cima para que a fronteira fique no sentido anti-horário para quem vê de cima.

P7.

(a) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -1.$

(b) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 80\pi.$

P8. Provavelmente, o exercício espera que você não saia calculando o rotacional e resolva diretamente, mas que use o Teorema de Stokes e calcule $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 5.5

Exercícios complementares

C1.

- (a) A superfície S pode ser parametrizada por $\vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 5 - r^2)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 2$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para fora do parabolóide, usamos o sentido dado por $\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, r)$. A fronteira de S é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 1$ com orientação no sentido anti-horário para quem vê de cima. Uma possível parametrização para ∂S é $\vec{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 1)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- (b) A superfície S pode ser parametrizada por $\vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 2 - r \sin \theta)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 1$. Para que a orientação fique com vetor normal apontando para cima, usamos o sentido dado por $\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = (0, r, r)$. A fronteira de S é a elipse $y + z = 2$ e $x^2 + y^2 = 1$ com orientação no sentido anti-horário para quem vê de cima. Uma possível parametrização para ∂S é $\vec{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 2 - \sin \theta)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

C2.

(a) $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 8\pi.$ (b) $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi.$

C3.

(a) $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$ (b) $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$

- C4. Não existe um roteiro perfeito, mas boas tentativas são: (1) Se $\vec{F}$ e C são fáceis de manipular, então calcular diretamente talvez seja mais rápido do que procurar algum teorema. (2) Se $\vec{F}$ e C não são fáceis de manipular, tente encontrar uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$. Se sim (e f está definida sobre toda a curva C), então use o Teorema do Campo Conservativo. (3) Se $\vec{F}$ e C não são fáceis de manipular e $\vec{F}$ não é conservativo, tente usar o Teorema de Stokes se C for uma curva fechada. (4) Em último caso, se C não for fechada, tente construir uma curva fechada em que uma parte é C e aplique o Teorema de Stokes.