



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 5.6 - O Teorema de Green

Exercícios principais

Última atualização: 7 de fevereiro de 2025.

- P1.** Explique como o Teorema de Green pode ser visto sob a forma $\int_R df = \int_{\partial R} f$.
- P2.** Em cada item, determine a fronteira da região de $\mathbb{R}^2$ e descreva sua orientação de forma compatível com o Teorema de Green.
- (a) O disco $x^2 + y^2 \leq 4$.
 - (b) A região retangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ e $(0, 1)$.
 - (c) A região semicircular $x^2 + y^2 \leq 4$ com $y \geq 0$.
 - (d) A região anelar $x^2 + y^2 \geq 1$ e $x^2 + y^2 \leq 9$.
- P3.** Em cada item, descreva a região R em $\mathbb{R}^2$ e parametrize sua fronteira com orientação de forma compatível com o Teorema de Green.
- (a) R é o disco $x^2 + y^2 \leq 16$.
 - (b) R é o retângulo $[0, 5] \times [0, 4]$.
- P4.** Em cada item, calcule $\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$ e $\int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, em que $\vec{F} = (F_1, F_2)$, e verifique que o resultado é o mesmo. *Sugestão.* Use as descrições e parametrizações do exercício anterior.
- (a) $\vec{F}(x, y) = (y, -x)$ e R é o disco $x^2 + y^2 \leq 16$.
 - (b) $\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2y)$ e R é o retângulo $[0, 5] \times [0, 4]$.
- P5.** Em cada item, use o Teorema de Green para calcular a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. *Alerta!* Lembre-se de que o Teorema de Green exige que a curva esteja orientada de forma compatível com a região. Caso não esteja, lembre-se de que a integral sobre uma curva no sentido oposto tem sinal oposto.
- (a) $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(0, 1)$ orientada no sentido anti-horário.
 - (b) $\vec{F}(x, y) = (y + e^{\sqrt{x}}, 2x + \cos(y^2))$ e C é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ orientada no sentido anti-horário.
 - (c) $\vec{F}(x, y) = (y - \cos x, x \sin y)$ e C é o círculo $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ orientado no sentido horário.



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 5.6 - O Teorema de Green

Exercícios complementares

- C1.** Explique como o Teorema de Green pode ser visto como um caso particular do Teorema de Stokes.
- C2.** Em cada item, descreva a região R em $\mathbb{R}^2$ e parametrize sua fronteira com orientação de forma compatível com o Teorema de Green.
- (a) R é a região interna ao triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$.
 - (b) R é a região delimitada pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(0, 1)$ e de $(0, 1)$ a $(1, 1)$ e pela parte da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
- C3.** Em cada item, calcule $\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$ e $\int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, em que $\vec{F} = (F_1, F_2)$, e verifique que o resultado é o mesmo. *Sugestão.* Use as descrições e parametrizações do exercício anterior.
- (a) $\vec{F}(x, y) = (xy, x^2y^3)$ e R é a região interna ao triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$.
 - (b) $\vec{F}(x, y) = (x^2y^2, xy)$ e R é a região delimitada pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(0, 1)$ e de $(0, 1)$ a $(1, 1)$ e pela parte da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
- C4.** Em cada item, use o Teorema de Green para calcular a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. *Alerta!* Lembre-se de que o Teorema de Green exige que a curva esteja orientada de forma compatível com a região. Caso não esteja, lembre-se de que a integral sobre uma curva no sentido oposto tem sinal oposto.
- (a) $\vec{F}(x, y) = (ye^x, 2e^x)$ e C é a fronteira do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 4)$ e $(0, 4)$ orientada no sentido anti-horário.
 - (b) $\vec{F}(x, y) = (y^3, -x^3)$ e C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientado no sentido anti-horário.
 - (c) $\vec{F}(x, y) = (y \cos x - xy \sin x, xy + x \cos x)$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$ e $(2, 0)$ orientada no sentido horário.
- C5.** Seja $\vec{F} = (F_1, F_2)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ tal que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$. É verdade que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para qualquer curva C ?
- C6.** O Teorema de Green é mais usado para trocar uma integral sobre uma curva por uma integral dupla em uma região. Porém, também podemos usar o caminho contrário. Nesse caso, temos uma integral dupla em uma região e usamos o teorema para calcular essa integral através de uma integral sobre uma curva na fronteira da região. Como forma de testar esse caminho, calcule a integral $\iint_R 1 dA$, em que R é o disco $x^2 + y^2 \leq 9$, usando o Teorema de Green. *Sugestão.* Observe que para usar o teorema, devemos procurar um campo vetorial $\vec{F}$ tal que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$. Existem infinitos campos vetoriais com essa propriedade (por exemplo, $\vec{F} = (0, x)$). Qualquer campo $\vec{F}$ que você escolher tal que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ funcionará.

- C7.** Existe uma forma não convencional de usar o Teorema de Green. Imagine que a curva C que forma a fronteira de uma região R é composta de duas partes: C_1 e C_2 . Oriente-as de forma compatível com a região. Pelo Teorema de Green,

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Imagine que, destas três integrais, apenas $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ seja difícil de calcular. Assim, podemos calculá-la indiretamente como

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Em resumo, podemos calcular a integral em uma curva não fechada C_1 escolhendo uma segunda curva C_2 de tal forma que C_1 e C_2 formem uma curva fechada e aplicar o Teorema de Green. Como forma de testar esse caminho, calcule a integral

$$\int_C \left(x^4, \frac{x^3}{3} + \operatorname{tg} y \right) \cdot d\vec{r},$$

em que C é a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ orientada no sentido anti-horário. *Sugestão.* Chame a curva da integral pedida de C_1 e considere C_2 como sendo o segmento de reta de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$. Veja que C_1 e C_2 determinam uma região fechada e aplique a ideia passada no enunciado.

- C8.** A integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, em que C é uma curva em $\mathbb{R}^2$, aparece em dois teoremas: Teorema do Campo Conservativo e Teorema de Green. No caso do Teorema de Green, C precisa ser uma curva fechada. Se você fosse escolher um roteiro de tentativas para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, qual seria?

MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 5.6

Exercícios principais

P1. O Teorema de Green diz que $\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, em que R é uma região de $\mathbb{R}^2$ e $\vec{F} = (F_1, F_2)$. Considerando f como $\vec{F}$ e df como $\nabla \times \vec{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ (rotacional em $\mathbb{R}^2$), ficamos com

$$\int_R df = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial R} f.$$

P2.

- (a) A fronteira é o círculo $x^2 + y^2 = 4$. A orientação é no sentido anti-horário.
- (b) Os segmentos de reta: de $(0, 0)$ a $(2, 0)$, de $(2, 0)$ a $(2, 1)$, de $(2, 1)$ a $(0, 1)$ e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$. A orientação é no sentido anti-horário.
- (c) A fronteira é a metade superior de círculo $x^2 + y^2 = 4$ junto com o segmento de reta $(-2, 0)$ e $(2, 0)$. A orientação é no sentido anti-horário.
- (d) A fronteira é formada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$. A orientação do círculo $x^2 + y^2 = 9$ é no sentido anti-horário e do círculo $x^2 + y^2 = 1$ é no sentido horário.

P3.

- (a) A região R pode ser descrita em coordenadas polares com as variações: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 4$. A fronteira de R é o círculo $x^2 + y^2 = 16$ com orientação no sentido anti-horário. Uma possível parametrização de ∂R é $\vec{r}(\theta) = (4 \cos \theta, 4 \sin \theta)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- (b) A região R pode ser descrita com as variações: $0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 4$. A fronteira de R é formada por quatro segmentos de reta e orientação no sentido anti-horário. Iniciando a parametrização a partir do ponto $(0, 0)$, o primeiro segmento é $\vec{r}_1(t) = (t, 0)$ com $0 \leq t \leq 5$; o segundo segmento é $\vec{r}_2(t) = (5, t)$ com $0 \leq t \leq 4$; o terceiro segmento é $\vec{r}_3(t) = (5 - t, 4)$ com $0 \leq t \leq 5$; o quarto segmento é $\vec{r}_4(t) = (0, 4 - t)$ com $0 \leq t \leq 4$.

P4.

(a) $\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -32\pi$. (b) $\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 120$.

P5.

(a) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. (b) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3}$. (c) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi$.

MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 5.6

Exercícios complementares

- C1.** Sejam R uma região de $\mathbb{R}^2$ e $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$. Crie uma terceira dimensão (eixo z), identifique a região R como uma superfície S contida no plano $z = 0$ e identifique o campo vetorial $\vec{F}$ com o campo vetorial $G(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$ em $\mathbb{R}^3$. Ao calcular o rotacional de $\vec{G}$, obtemos $\nabla \times \vec{G} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$. A superfície S pode ser parametrizada por $\vec{r}(x, y) = (x, y, 0)$, com $(x, y) \in R$, que tem como vetor normal $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (0, 0, 1)$. Assim,

$$\iint_S \nabla \times \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA.$$

A fronteira de S como superfície em $\mathbb{R}^3$ é a mesma fronteira de R como região em $\mathbb{R}^2$, apenas acrescentando a componente $z = 0$. Assim, se $\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, com $a \leq t \leq b$, é uma parametrização da fronteira de R , então $\vec{s}(t) = (r_1(t), r_2(t), 0)$ é uma parametrização da fronteira de S . Assim,

$$\int_{\partial S} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (F_1(x, y)r'_1(t) + F_2(x, y)r'_2(t)) dt = \int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Juntando as duas igualdades, mostramos que nesse caso particular o lado esquerdo do Teorema de Stokes é igual ao lado esquerdo do Teorema de Green e que o lado direito do Teorema de Stokes é igual ao lado direito do Teorema de Green. Como estamos assumindo que o Teorema de Stokes é verdadeiro, então acabamos de demonstrar que o Teorema de Green é verdadeiro. Como última observação, o Teorema de Stokes exige que a orientação da fronteira esteja de acordo com a orientação da superfície. Como escolhemos a orientação da superfície apontando para cima, então no Teorema de Green devemos exigir que a fronteira esteja orientada de tal forma que, ao caminhar sobre a fronteira, a região R fique à esquerda. Esta é precisamente a convenção adotada no Teorema de Green.

C2.

- (a) A região R pode ser descrita com as variações: $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2x$. A fronteira de R é formada por três segmentos de reta e orientação no sentido anti-horário. Iniciando a parametrização a partir do ponto $(0, 0)$, o primeiro segmento é $\vec{r}_1(t) = (t, 0)$ com $0 \leq t \leq 1$; o segundo segmento é $\vec{r}_2(t) = (1, t)$ com $0 \leq t \leq 2$; o terceiro segmento é $\vec{r}_3(t) = (1 - t, 2 - 2t)$ com $0 \leq t \leq 1$.
- (b) A região R pode ser descrita com as variações: $0 \leq x \leq 1$ e $x^2 \leq y \leq 1$. A fronteira de R é formada por dois segmentos de reta e parte da parábola, com orientação no sentido anti-horário. Iniciando a parametrização a partir do ponto $(0, 0)$, a parte da parábola é $\vec{r}_1(t) = (t, t^2)$ com $0 \leq t \leq 1$; o segmento horizontal é $\vec{r}_2(t) = (1 - t, 1)$ com $0 \leq t \leq 1$; o segmento vertical é $\vec{r}_3(t) = (0, 1 - t)$ com $0 \leq t \leq 1$.

C3.

$$(a) \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{2}{3}. \quad (b) \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{22}{105}.$$

C4.

$$(a) \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4(e^3 - 1). \quad (b) \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -24\pi. \quad (c) \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{16}{3}.$$

C5. Não, pois o Teorema de Green só pode ser aplicado a curvas fechadas. Assim, se C é fechada, então com certeza $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Porém, se C não é fechada, não é possível aplicar o teorema diretamente.

C6. $\iint_R 1 \, dA = 9\pi.$

C7. $\int_C \left(x^4, \frac{x^3}{3} + \operatorname{tg} y \right) \cdot d\vec{r} = \frac{\pi}{8} - \frac{2}{5}.$

C8. Não existe um roteiro perfeito, mas boas tentativas são: (1) Se $\vec{F}$ e C são fáceis de manipular, então calcular diretamente talvez seja mais rápido do que procurar algum teorema. (2) Se $\vec{F}$ e C não são fáceis de manipular, tente encontrar uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$. Se sim (e f está definida sobre toda a curva C), então use o Teorema do Campo Conservativo. (3) Se $\vec{F}$ e C não são fáceis de manipular e $\vec{F}$ não é conservativo, tente usar o Teorema de Green se C for uma curva fechada. (4) Em último caso, se C não for fechada, tente construir uma curva fechada em que uma parte é C e aplique o Teorema de Green.