



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 6.1 - Comprimento, área e volume

Exercícios principais

Última atualização: 7 de fevereiro de 2025.

P1. Em cada item, calcule o comprimento pedido.

- (a) Do intervalo $[-2, 3]$.
- (b) De um círculo de raio R .
- (c) Da curva $x(t) = 1 + 3t^2$, $y(t) = 4 + 2t^3$, $0 \leq t \leq 1$.
- (d) Da curva $x(t) = 2 \cos t$, $y(t) = 2 \sin t$, $z(t) = \sqrt{5}t$, $-2 \leq t \leq 2$.
- (e) Da curva $y = x^2$, $z = \frac{2x^3}{3}$, $0 \leq t \leq 1$.

P2. Vimos que a integral $\int_C 1 \, dr$ mede o comprimento da curva C . Qual é o significado da integral $\int_C 1 \, d\vec{r}$? *Sugestão.* Resolva a integral em um exemplo e depois tente resolvê-la de forma genérica.

P3. Em cada item, calcule a área pedida.

- (a) De um disco de raio R .
- (b) Da região delimitada por $x = y^2$ e $y = x^2$.
- (c) Da região interna à elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Sugestão.* Veja o item (b) do exercício **P7** da lista de exercícios 4.3.2.
- (d) Da superfície de uma esfera de raio R .
- (e) Da parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

P4. Em cada item, calcule a o volume pedido.

- (a) Da região interna a uma esfera de raio R .
- (b) Da região interna ao cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ entre os planos $z = 0$ e $z = h$.
- (c) Da região interna ao tetraedro delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.
- (d) Da região delimitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.
- (e) Da região delimitada pelo parabolóide $z = 24 - x^2 - y^2$ e pelo cone $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.
- (f) Da região interna à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (g) Da região interna à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (h) Da região interna ao elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 6.1

Exercícios principais

P1.

- (a) 5.
- (b) $2\pi R$.
- (c) $4\sqrt{2} - 2$.
- (d) 12.
- (e) $\frac{5}{3}$.

P2. A integral $\int_C 1 d\vec{r}$ tem como resultado o vetor com origem no ponto inicial da curva e com término no ponto final da curva. Uma forma concreta de interpretar é que se $\vec{r}(t)$ representa a função posição de um objeto, então $\int_C 1 d\vec{r}$ mede o descolamento da partícula e $\int_C 1 dr$ mede a distância percorrida.

P3.

- (a) πR^2 .
- (b) $\frac{1}{3}$.
- (c) πab .
- (d) $4\pi R^2$.
- (e) $\frac{\pi(65\sqrt{65} - 1)}{6}$.

P4.

- (a) $\frac{4\pi R^3}{3}$.
- (b) $\pi R^2 h$.
- (c) $\frac{1}{6}$.
- (d) 8π .
- (e) $\frac{512\pi}{3}$.
- (f) $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.
- (g) $\frac{8\pi(2 - \sqrt{2})}{3}$.
- (h) $\frac{4\pi abc}{3}$.