



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 6.4 - Probabilidade

Exercícios principais

Última atualização: 17 de junho de 2025.

Explicação de conteúdo. Este início da lista tem como objetivo definir alguns conceitos de probabilidade para facilitar a resolução dos exercícios. Todas essas definições foram vistas em sala, mas não custa relembrar aqui.

Espaço amostral e evento. Em probabilidade, o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento é denominado *espaço amostral* e normalmente denotado por Ω . Qualquer subconjunto de Ω é denominado *evento*. Por exemplo, o espaço amostral $\Omega = \{a, b, c\}$ possui 8 subconjuntos e, portanto, 8 eventos. São eles: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ e $\{a, b, c\}$.

Distribuição de probabilidade. Uma *distribuição de probabilidade* em Ω é uma função P que atribui uma probabilidade a cada evento. Por exemplo, considere $\Omega = \{a, b, c\}$ devemos dizer o valor de P em cada evento de Ω , isto é, devemos dizer quanto vale: $P(\emptyset)$, $P(\{a\})$, $P(\{b\})$, $P(\{c\})$, $P(\{a, b\})$, $P(\{a, c\})$, $P(\{b, c\})$ e $P(\{a, b, c\})$. Assumindo que queiramos que a , b e c possuam a mesma probabilidade, podemos definir $P(\emptyset) = 0$, $P(\{a\}) = \frac{1}{3}$, $P(\{b\}) = \frac{1}{3}$, $P(\{c\}) = \frac{1}{3}$, $P(\{a, b\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{a, c\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{b, c\}) = \frac{2}{3}$ e $P(\{a, b, c\}) = 1$. Você poderia dizer que nem todo valor poderia ser dado às probabilidades: por exemplo, não faz sentido probabilidades negativas nem maiores do que 1; outro exemplo, o conjunto todo deve ter probabilidade igual a 1. De fato, para uma função P ser considerada uma distribuição de probabilidade, deve satisfazer: (i) $P(A) \in [0, 1]$ para qualquer evento A ; (ii) $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$; (iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A e B são eventos disjuntos (isto é, não possuem elementos em comum). As duas primeiras condições são naturais de entender. A terceira condição também é natural quando vista em um exemplo. Se $P(\{a\}) = \frac{1}{3}$ e $P(\{b\}) = \frac{1}{3}$ é natural esperar que $P(\{a, b\}) = \frac{2}{3}$; isto é o que a terceira condição diz. Note que é necessário impor que A e B são disjuntos: por exemplo, se a terceira condição fosse verdadeira para quaisquer A e B e considerássemos $A = B = \{a\}$ com $P(\{a\}) = \frac{1}{3}$, então $A \cup B = \{a\}$ e obteríamos $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, o que claramente não é verdade.

Densidade de probabilidade. Considere Ω e P como no exemplo acima. Você deve ter notado que não é necessário definir P em todos os subconjuntos, bastava definir $P(\{a\})$, $P(\{b\})$ e $P(\{c\})$ e calcular o restante por soma de probabilidades dos elementos. De fato, isso é verdade e quando definimos probabilidades por esse caminho, estamos usando o conceito de *densidade de probabilidade*. Uma função $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ é chamada de densidade de probabilidade se $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$, isto é, a soma das probabilidades de todos os

elementos deve ser igual a 1. Por exemplo, considere $\Omega = \{a, b, c\}$ e $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ dada por $p(a) = \frac{1}{3}$, $p(b) = \frac{1}{3}$ e $p(c) = \frac{1}{3}$. Esta é uma função densidade de probabilidade pois $p(a) + p(b) + p(c) = 1$. De posse da densidade p , podemos definir a distribuição P somando os valores da densidade dos elementos do evento; por exemplo, $P(\{a, c\}) = p(a) + p(c) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Definindo P nos outros eventos dessa forma, os resultados obtidos são os mesmos do exemplo anterior.

Diferenças e conexões entre distribuições e densidades de probabilidade. As funções de distribuição e densidade de probabilidade têm papel crucial na teoria de probabilidade. Vejamos mais a fundo as diferenças entre elas. Uma distribuição de probabilidade P precisa estar definida nos eventos de Ω , isto é, nos subconjuntos de Ω . Por outro lado, uma densidade de probabilidade precisa estar definida nos elementos de Ω . Como exemplo, se $\Omega = \{a, b, c\}$, então uma distribuição P permite calcular $P(\emptyset)$, $P(\{a\})$, $P(\{b\})$, $P(\{c\})$, $P(\{a, b\})$, $P(\{a, c\})$, $P(\{b, c\})$ e $P(\{a, b, c\})$. Estas, são de fato, as probabilidades de cada evento. Já uma função densidade de probabilidade permite calcular $p(a)$, $p(b)$ e $p(c)$, isto é, se calcula nos elementos de Ω . A função densidade não mede probabilidades diretamente.

Conexões entre distribuições e densidades de probabilidade. Apesar de serem coisas diferentes, distribuições e densidades estão intimamente conectadas. Por exemplo, considere $\Omega = \{a, b, c\}$. Se temos acesso a uma densidade de probabilidade em Ω , isto é, temos acesso aos valores $p(a)$, $p(b)$ e $p(c)$, podemos definir uma distribuição de probabilidade P associada à densidade p por $P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$. Por exemplo,

$P(\{a, b\}) = p(a) + p(b)$ e $P(\{a, c\}) = p(a) + p(c)$. Em outras palavras, a partir de uma densidade, é possível criar uma distribuição. Por outro lado, se temos uma distribuição P , é possível criar uma densidade p por $p(x) = P(\{x\})$. Por exemplo, dispondo de P definida em $\Omega = \{a, b, c\}$, podemos definir $p(a) = P(\{a\})$, $p(b) = P(\{b\})$ e $p(c) = P(\{c\})$. Em outras palavras, dada uma distribuição, é possível criar uma densidade. Em resumo: distribuições e densidades são conceitos diferentes e possuem significados diferentes mas, conhecida uma delas, é possível definir a outra.

Cálculo de probabilidades a partir de densidades. Como vimos acima, para calcular probabilidades a partir de densidades, basta somar o valor das densidades de cada elemento do evento. Por exemplo, se temos $\Omega = \{a, b, c\}$ e $p(a) = \frac{1}{6}$, $p(b) = \frac{1}{6}$ e $p(c) = \frac{2}{3}$, a probabilidade do evento $\{b, c\}$ é

$$P(\{b, c\}) = p(b) + p(c) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Vendo essa soma como $P(\{b, c\}) = p(b) \cdot 1 + p(c) \cdot 1$, podemos interpretar, como vimos em sala, como a função p calculada nos elementos do conjunto multiplicada pela medida de contagem de cada elemento. Esse foi o conceito que usamos em sala para estender a ideia de média aritmética e média ponderada para intervalos: $p(b) \cdot 1 + p(c) \cdot 1$ deve ser interpretado como a integral da função p no conjunto $\{b, c\}$ com a medida de contagem.

Probabilidades em conjuntos com outras medidas. Nossa ideia aqui é expandir a ideia de probabilidade para conjuntos Ω mais gerais. Para isso, vamos usar o caminho de definir probabilidades através de uma função de densidade. Lembremos que uma densidade de probabilidade é uma função $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tal que $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$. A soma anterior nada mais é do que a integral com a medida de contagem. Assim, em

um contexto mais geral, definimos densidade de probabilidade como uma função $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tal que $\int_{\Omega} p(x) dx = 1$. Aqui é importante perceber que a integral é feita sob a medida na qual medimos o conjunto Ω . Por exemplo, se Ω é uma região do plano xy , então a integral é uma integral dupla e a medida é dada pela medida de área com elemento diferencial dA . Como visto acima, tendo uma densidade, podemos calcular a probabilidade de um evento A por $P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$. Trocando para o contexto mais geral de

outras medidas, obtemos $P(A) = \int_A p(x) dx$. Como exemplo, considere $\Omega = [2, 6]$ e $p : [2, 6] \rightarrow [0, 1]$ dada por $p(x) = \frac{1}{4}$. Como Ω é um intervalo, a medida natural aqui é a medida de comprimento com elemento diferencial dx . Além disso, como

$$\int_{\Omega} p(x) dx = \int_{[2, 6]} \frac{1}{4} dx = \int_2^6 \frac{1}{4} dx = 1,$$

então p é uma densidade. De posse da densidade, podemos calcular a probabilidade de qualquer subconjunto de $\Omega = [2, 6]$. Por exemplo,

$$P([2, 3]) = \int_{[2, 3]} \frac{1}{4} dx = \int_2^3 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}.$$

Variável aleatória. Uma *variável aleatória* em um espaço amostral Ω é uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Por exemplo, se $\Omega = \{a, b, c\}$, $f(a) = 3$, $f(b) = -16$ e $f(c) = 0$ define uma variável aleatória em Ω . Quando todos os elementos de Ω são números reais e a variável aleatória é a função identidade, então a variável aleatória é normalmente denotada por X . Por exemplo, se $\Omega = \{1, 2, 3\}$, a variável aleatória X é a função tal que $X(1) = 1$, $X(2) = 2$ e $X(3) = 3$.

Valor esperado de uma variável aleatória. Quando uma variável aleatória f está definida em um espaço amostral Ω que possui uma densidade $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$, definimos o *valor esperado* de f como $E(f) = \int_{\Omega} f(x)p(x) dx$. Por exemplo, se $\Omega = [2, 6]$, $p(x) = \frac{1}{4}$ e $f(x) = x^2$, então

$$E(f) = \int_{\Omega} f(x)p(x) dx = \int_2^6 \frac{x^2}{4} dx = \frac{52}{3}.$$

Mais um exemplo, considere $\Omega = [2, 6]$, $p(x) = \frac{1}{4}$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [2, 3] \\ 0, & \text{se } x \notin [2, 3] \end{cases},$$

Neste caso,

$$E(f) = \int_{\Omega} f(x)p(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} = P([2, 3]).$$

De forma mais geral, fica como exercício mostrar que se A é um evento e

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases},$$

então $E(f_A) = P(A)$.

Média. Quando Ω é um espaço amostral cujos elementos são números reais, faz sentido falar da variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $X(x) = x$. Definimos a *média* μ da distribuição como o valor esperado de X , isto é,

$$\mu = E(X) = \int_{\Omega} xp(x) dx.$$

Variância. Quando Ω é um espaço amostral cujos elementos são números reais, definimos a *variância* σ^2 da distribuição como o valor esperado de $f(x) = (x - \mu)^2$ (em teoria de probabilidade, o nome de funções dessa forma é a mesma da função trocando x por X ; nesse caso, o nome da função é $(X - \mu)^2$), isto é,

$$\sigma^2 = E((X - \mu)^2) = \int_{\Omega} (x - \mu)^2 p(x) dx.$$

Desvio padrão. Quando Ω é um espaço amostral cujos elementos são números reais, definimos o *desvio padrão* σ como a raiz quadrada da variância σ^2 , isto é $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Moda. No contexto de probabilidade e estatística, você deve conhecer a definição de *moda*. Em nosso contexto de probabilidades definidas a partir de uma densidade p , a moda de uma distribuição é definida como o(s) valor(es) $x \in \Omega$ tal(is) que $p(x)$ atinge seu valor máximo.

Mediana. No contexto de probabilidade e estatística, você deve conhecer a definição de *mediana*. Quando o espaço amostral Ω é um intervalo, digamos $\Omega = [a, b]$, a mediana da distribuição é definida como o valor

$c \in [a, b]$ tal que $P([a, c]) = P([c, b]) = \frac{1}{2}$. Em outras palavras, a mediana é o ponto que divide o intervalo em probabilidades iguais. Em termos da densidade, c é o ponto tal que

$$\int_a^c p(x) dx = \int_c^b p(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Vamos aos exercícios!

P1. Considere o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ com a distribuição de probabilidade uniforme, isto é, a densidade de probabilidade é constante (nesse caso, $p(x) = \frac{1}{6}$, para qualquer $x \in \Omega$).

- (a) Determine a probabilidade, $P(A)$, do evento $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- (b) Determine o valor esperado, $E(X)$, da função $X(x) = X$.
- (c) Determine a média μ da distribuição.
- (d) Determine o valor esperado de $X^2 - 1$.
- (e) Determine a variância σ^2 da distribuição.
- (f) Determine o desvio padrão σ da distribuição.

P2. Considere o espaço amostral $\Omega = [0, 3]$ com a densidade de probabilidade uniforme, isto é, $p(x) = \frac{1}{3}$ para qualquer $x \in [0, 3]$.

- (a) Determine a probabilidade, $P(A)$, do evento $A = [0, 2]$.
- (b) Determine a probabilidade, $P(A)$, do evento $A = [0, 1] \cup [2, 3]$.
- (c) Determine o valor esperado, $E(X)$, da função $X(x) = x$.
- (d) Determine a média μ da distribuição.
- (e) Determine o valor esperado de $X^2 - 1$.
- (f) Determine a variância σ^2 da distribuição.
- (g) Determine o desvio padrão σ da distribuição.

P3. Considere o espaço amostral $\Omega = [0, 3]$ com a densidade de probabilidade $p(x) = \frac{x^2}{9}$.

- (a) Mostre que p , de fato, é uma densidade de probabilidade.
- (b) Determine a probabilidade, $P(A)$, do evento $A = [0, 2]$.
- (c) Determine a probabilidade, $P(A)$, do evento $A = [2, 3]$.
- (d) Determine a média μ da distribuição.
- (e) Determine a variância σ^2 da distribuição.
- (f) Determine o desvio padrão σ da distribuição.
- (g) Determine a moda da distribuição.
- (h) Determine a mediana da distribuição.

P4. Considere o espaço amostral $\Omega = \mathbb{R}$ com a distribuição normal de probabilidade, isto é, a densidade de probabilidade é dada por

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

- (a) Determine a integral que representa a probabilidade, $P([a, b])$, do intervalo $[a, b]$.
- (b) A integral acima não é fácil de resolver sem auxílio de um software ou uma tabela de valores. Ainda assim, apenas sabendo que o gráfico da função p é simétrico em relação a $x = \mu$, duas probabilidades podem ser facilmente calculadas. Calcule $P((-\infty, \mu])$ e $P([\mu, \infty))$.

Para saber mais detalhes sobre a distribuição normal, veja os exercícios complementares.



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 6.4 - Probabilidade

Exercícios complementares

- C1.** Considere o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ com a densidade de probabilidade $p(n) = \frac{1}{2^n}$.
- (a) Mostre que p , de fato, é uma densidade de probabilidade.
 - (b) Determine $P(\{1, 2\})$.
 - (c) Determine $P(\{3, 4, 5, \dots\})$.
 - (d) Determine a média μ da distribuição. *Observação.* Ao escrever o resultado, aparecerá uma soma infinita que não se encaixa nas somas que você conhece. Pesquise o resultado e como determiná-lo.
- C2.** Seja $a > 0$. O objetivo deste exercício é encontrar o valor da integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx.$$

- (a) Use as propriedades de integrais para mostrar que

$$\int_a^b \int_c^d f(x) \cdot g(y) dy dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y) dy \right).$$

- (b) Use o item anterior para mostrar que

$$\int_a^b \int_a^b f(x) \cdot f(y) dy dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2.$$

- (c) Use as propriedades da função exponencial e o item anterior para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dy dx = I^2,$$

em que I é a integral do enunciado.

- (d) Use coordenadas polares para e mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr d\theta.$$

- (e) Use a definição de integrais impróprias e mostre que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr d\theta = \frac{\pi}{a}.$$

- (f) Use os itens anteriores e conclua que $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

C3. O objetivo deste exercício é mostrar que a função densidade

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

da distribuição normal tem todas as propriedades que nos contaram.

(a) Mostre que $p(x)$ é, de fato, uma função de densidade de probabilidade, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1.$$

Sugestão. Faça a mudança de variáveis $y = x - \mu$ e use o exercício anterior.

(b) Mostre que a média da distribuição normal é μ . *Sugestão.* Faça a mudança de variáveis $y = x - \mu$, escreva o resultado como a soma de duas integrais, veja que uma delas pode ser calculada pelo exercício anterior e que a outra é uma integral em um intervalo simétrico de uma função ímpar e, portanto, o resultado é 0.

(c) Mostre que a variância da distribuição normal é μ . *Sugestão.* Faça a mudança de variáveis $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$, aplique integração por partes usando $u = y$ e dv como o restante da integral, veja que a parcela sem integral dá 0 quando aplicada em $-\infty$ e ∞ e que a parcela com integral pode ser resolvida pelo exercício anterior.

(d) Mostre que a moda da distribuição normal é μ . *Sugestão.* Você pode fazer o gráfico de $p(x)$ e verificar que o máximo absoluto de p é obtido em $x = \mu$. Mas, aqui, recomendo que você use seus conhecimentos de cálculo, lembrando que os pontos de máximo e mínimo são obtidos resolvendo a equação $p'(x) = 0$.

(e) Mostre que a mediana da distribuição normal é μ . *Sugestão.* Use a mudança de variável $y = 2\mu - x$ e mostre que

$$\int_{-\infty}^{\mu} p(x) dx = \int_{\mu}^{\infty} p(x) dx.$$



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 6.4

Exercícios principais

P1.

(a) $P(A) = \frac{5}{6}$.

(b) $E(X) = \frac{7}{2}$.

(c) $\mu = E(X) = \frac{7}{2}$.

(d) $E(X^2 - 1) = \frac{85}{6}$.

(e) $\sigma^2 = E((X - \mu)^2) = \frac{35}{12}$.

(f) $\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6}$.

P2.

(a) $P(A) = \frac{2}{3}$.

(b) $P(A) = \frac{2}{3}$.

(c) $E(X) = \frac{3}{2}$.

(d) $\mu = E(X) = \frac{3}{2}$.

(e) $E(X^2 - 1) = 2$.

(f) $\sigma^2 = E((X - \mu)^2) = \frac{3}{4}$.

(g) $\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

P3.

(a)

(b) $P(A) = \frac{8}{27}$.

(c) $P(A) = \frac{19}{27}$.

(d) $\mu = E(X) = \frac{9}{4}$.

(e) $\sigma^2 = E((X - \mu)^2) = \frac{27}{80}$.

(f) $\sigma = \frac{3\sqrt{15}}{20}$.

(g) 3.

(h) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

P4.

(a) $P([a, b]) = \int_a^b p(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$.

(b) $P((-\infty, \mu]) = P([\mu, \infty)) = \frac{1}{2}$.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 6.4

Exercícios complementares

C1.

(a)

(b) $P(\{1, 2\}) = \frac{3}{4}$.

(c) $P(\{3, 4, 5, \dots\}) = \frac{1}{4}$.

(d) $\mu = 2$.

C2.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

C3.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)