



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 6.5 - A Física era mais fácil na aula de Ciências

Exercícios principais

Última atualização: 8 de julho de 2025.

P1. Em cada item, determine $v(t)$ e $r(t)$ dados $a(t)$, $v(0)$ e $r(0)$.

(a) MRU: $a(t) = 0$, $v(0) = v$ e $r(0) = r_0$.

(b) MRUV: $a(t) = a$, $v(0) = v_0$ e $r(0) = r_0$.

(c) $a(t) = -\cos t$, $v(0) = 0$ e $r(0) = 1$.

(d) $a(t) = 1 + t$, $v(0) = v_0$ e $r(0) = r_0$.

(e) $a(t) = e^t$, $v(0) = 0$ e $r(0) = 0$.

P2. Considere um objeto com função posição dada por $\vec{r}(t) = \left(t, t^2, \frac{2t^3}{3}\right)$. Determine o que se pede.

(a) $\vec{v}(t)$.

(b) $\|\vec{v}(t)\|$.

(c) Deslocamento de $t = 1$ a $t = 3$.

(d) Distância percorrida de $t = 1$ a $t = 3$.

(e) Velocidade média de $t = 1$ a $t = 3$.

(f) Velocidade escalar média de $t = 1$ a $t = 3$.

P3. Considere um objeto com função velocidade dada por $\vec{v} = (-2 \sin t, 2 \cos t, \sqrt{5})$ e posição inicial dada por $\vec{r}(0) = (2, 0, 0)$. Determine o que se pede.

(a) $\vec{r}(t)$.

(b) $\|\vec{v}(t)\|$.

(c) Deslocamento de $t = 0$ a $t = \pi$.

(d) Distância percorrida de $t = 0$ a $t = \pi$.

(e) Velocidade média de $t = 0$ a $t = \pi$.

(f) Velocidade escalar média de $t = 0$ a $t = \pi$.



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 6.5 - A Física era mais fácil na aula de Ciências

Exercícios complementares

Importante! O conteúdo desta parte da lista de exercícios não será cobrado em prova. Mesmo assim, é importante para você entender melhor os conceitos físicos.

C1. Em cada item, use a segunda lei de Newton para determinar o que se pede.

- (a) Considere um objeto de massa m em queda livre partindo do repouso. Fixe o eixo de tal forma que a posição inicial seja 0 e que o sentido positivo seja o sentido da queda. Determine $r(t)$.
- (b) Considere um objeto de massa m em queda livre partindo do repouso, sujeito a uma resistência do ar proporcional à velocidade do objeto (denote a constante de proporcionalidade por b). Fixe o eixo de tal forma que o sentido positivo seja o sentido da queda. Determine $v(t)$. *Observação.* Essa questão exige conhecimento de resolução de equações diferenciais. Caso você não tenha visto esse conteúdo, pegue a resposta do gabarito e verifique que esta satisfaz a equação obtida.
- (c) A lei de Hooke diz como uma mola se comporta quando é deformada. A lei diz que a força exercida pela mola é proporcional ao comprimento da deformação da mola. Mais especificamente, $F = -kx$, em que k é a constante da mola e x é o comprimento da deformação (o sinal negativo indica que a força tem sentido contrário à deformação). Considere um sistema massa-mola sem atrito com massa total do sistema igual a m . Considere que a mola, inicialmente, foi distendida de um comprimento L e solta. Fixe o eixo de tal forma que a posição de repouso da mola seja a origem e que o sentido positivo seja o sentido de distensão da mola. Determine $r(t)$, $v(t)$ e $a(t)$. *Observação.* Essa questão exige conhecimento de resolução de equações diferenciais. Caso você não tenha visto esse conteúdo, pegue a resposta do gabarito e verifique que esta satisfaz a equação obtida.

C2. Em um movimento circular, ao colocar os eixos x e y de tal forma que a origem seja o centro do movimento e denotar por θ o ângulo que o vetor posição do objeto forma com o eixo x positivo, podemos descrever a posição do objeto por $\vec{r}(t) = (R \cos \theta(t), R \sin \theta(t))$, em que R é o raio do movimento. Denote $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$ e $\alpha(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$.

- (a) Mostre que $\vec{v}(t) = (-R\omega \sin \theta, R\omega \cos \theta)$. *Observação.* Nesse e nos próximos itens, omitiremos o parâmetro t das funções θ , ω e α .
- (b) Mostre que $||\vec{v}(t)|| = R|\omega|$.
- (c) Mostre que $\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r} + \frac{\alpha}{\omega} \vec{v}$. Conclua que $\vec{a}(t)$ é a soma de dois vetores: $-\omega^2 \vec{r}$ que aponta para o centro do movimento (pois é um múltiplo negativo de $\vec{r}$) e $\frac{\alpha}{\omega} \vec{v}$ que é tangente ao movimento (pois é múltiplo de $\vec{v}$).

C3. No exercício anterior, deduzimos que, em um movimento circular,

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r} + \frac{\alpha}{\omega} \vec{v}.$$

A parcela $\vec{a}_c(t) = -\omega^2 \vec{r}$ é denominada aceleração centrípeta e a parcela $\vec{a}_T(t) = \frac{\alpha}{\omega} \vec{v}$ é denominada aceleração tangencial. Pela segunda lei de Newton, a força que atua no sistema é

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t) = m\left(\vec{a}_c(t) + \frac{\alpha}{\omega} \vec{v}\right) = m\vec{a}_c(t) + m\frac{\alpha}{\omega} \vec{v} = \vec{F}_c(t) + \vec{F}_T(t),$$

isto é, a força que atua no sistema pode ser decomposta em uma força $\vec{F}_c(t)$ que aponta para o centro do movimento (chamada de forma centrípeta) e uma força $\vec{F}_T(t)$ que é tangente ao movimento (chamada de força tangencial).

(a) Mostre que $||\vec{a}_c(t)|| = R\omega^2 = \frac{||v(t)||^2}{R}$.

(b) Mostre que $||\vec{F}_c(t)|| = mR\omega^2 = \frac{m||v(t)||^2}{R}$.

(c) Mostre que $||\vec{a}_T(t)|| = R|\alpha|$.

(d) Mostre que $||\vec{F}_T(t)|| = mR|\alpha|$.

(e) Explique por que o torque exercido sobre o objeto em relação à origem pela força $\vec{F}(t)$ é igual ao torque exercido pela força $\vec{F}_T(t)$.

(f) Mostre que o módulo do torque exercido pela força $\vec{F}(t)$ é igual a $mR^2\alpha$.

C4. Em Física, às vezes fenômenos diferentes possuem abordagens semelhantes. Tal situação ocorre no estudo de movimentos retilíneos e movimentos circulares. Para reconhecer tais semelhanças, é necessário fazer alguns paralelos:

Movimento retilíneo	Movimento circular
Posição: $\vec{r}(t)$	Posição angular: $\theta(t)$
Velocidade: $\vec{v}(t)$	Velocidade angular: $\omega(t)$
Aceleração: $\vec{a}(t)$	Aceleração angular: $\alpha(t)$
Massa: m	Momento de inércia: I
Momento: $\vec{p}(t)$	Momento angular: $\ell(t)$
Força: $\vec{F}(t)$	Torque: $\tau(t)$

Para uma partícula de massa m a uma distância R do centro do movimento circular, o momento de inércia é definido como $I = mR^2$. Com essa correspondência, a maior parte das fórmulas que se aplicam ao movimento retilíneo também se aplicam ao movimento circular: por exemplo, a fórmula $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ possui sua correspondente $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$. Vejamos, abaixo, outras fórmulas em movimento retilíneo que possuem correspondentes em movimento circular.

(a) Sabendo que o momento angular $\ell(t)$ possui definição análoga à definição de momento $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$, determine a fórmula que define $\ell(t)$.

(b) Use o exercício anterior para demonstrar a fórmula $\tau(t) = I\alpha$, análoga à segunda lei de Newton.

(c) A energia cinética é dada por $K = \frac{m||\vec{v}(t)||^2}{2}$. Demonstre a fórmula análoga no movimento circular: $K = \frac{I|\omega(t)|^2}{2}$.

(d) Determine e demonstre a fórmula análoga a $\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 6.5

Exercícios principais

P1.

(a) $v(t) = v$ e $r(t) = r_0 + vt$.

(b) $v(t) = v_0 + at$ e $r(t) = r_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$.

(c) $v(t) = -\operatorname{sen} t$ e $r(t) = \cos t$.

(d) $v(t) = v_0 + t + \frac{1}{2}t^2$ e $r(t) = r_0 + v_0t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$.

(e) $v(t) = e^t - 1$ e $r(t) = e^t - t - 1$.

P2.

(a) $\vec{v}(t) = (1, 2t, 2t^2)$.

(b) $\|\vec{v}(t)\| = 1 + 2t^2$.

(c) $\left(2, 8, \frac{52}{3}\right)$.

(d) $\frac{58}{3}$.

(e) $\left(1, 4, \frac{26}{3}\right)$.

(f) $\frac{29}{3}$.

P3.

(a) $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, \sqrt{5}t)$.

(b) $\|\vec{v}(t)\| = 3$.

(c) $(-4, 0, \pi\sqrt{5})$.

(d) 3π .

(e) $\left(-\frac{4}{\pi}, 0, \sqrt{5}\right)$.

(f) 3.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 6.5

Exercícios complementares

C1.

(a) $r(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

(b) $v(t) = \frac{mg}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t})$.

(c) $r(t) = L \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$, $v(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}L \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ e $a(t) = -\frac{kL}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

C2.

(a)

(b)

(c)

C3.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

C4.

(a) $\ell(t) = I\omega(t)$.

(b)

(c)

(d) $\tau(t) = \frac{d\ell}{dt}$.