

MTM3103 - Cálculo 3

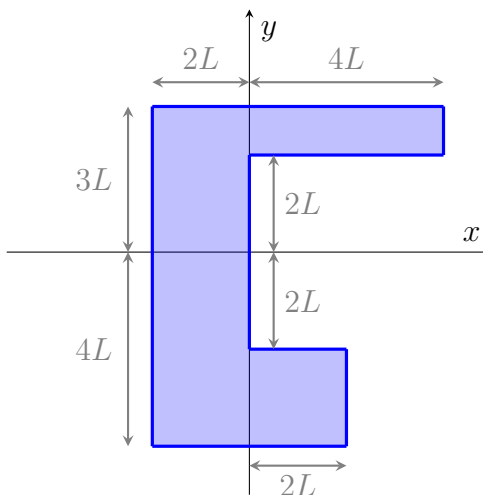
Lista de exercícios 6.6 - A Física não pontual

Exercícios principais

Última atualização: 8 de julho de 2025.

P1. Em cada item, determine a massa do sistema.

- (a) Três partículas no plano, sendo uma partícula de 2 kg na posição $(0, 0)$, uma partícula de 5 kg na posição $(-2, 1)$ e uma partícula de 1 kg na posição $(3, 1)$.
- (b) Uma barra de comprimento L (em m) posicionada no eixo x sobre o intervalo $[0, L]$ com densidade linear $\rho(x) = \frac{e^{\frac{x}{L}}}{L}$ (em kg/m).
- (c) Uma placa em forma de triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ com densidade por unidade de área $\rho(x, y) = 1 + x$.
- (d) O sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 1$ com densidade por unidade de volume $\rho(x, y, z) = 1 + z^2$.
- (e) A placa de densidade uniforme por unidade de área $\rho(x, y) = k$ da figura abaixo.



- (f) Uma caixa sem tampa em forma de cubo posicionada em $[0, L] \times [0, L] \times [0, L]$, com faces com densidade uniforme por unidade de área $\rho(x, y, z) = k$.
- (g) Um paralelepípedo sólido posicionado em $[0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ com sua metade de baixo com densidade $\rho(x, y, z) = 3k$ e metade de cima com densidade $\rho(x, y, z) = k$.

P2. Em cada item, determine o centro de massa do sistema.

- (a) Três partículas no plano, sendo uma partícula de 2 kg na posição $(0, 0)$, uma partícula de 5 kg na posição $(-2, 1)$ e uma partícula de 1 kg na posição $(3, 1)$.
- (b) Uma barra de comprimento L (em m) posicionada no eixo x sobre o intervalo $[0, L]$ com densidade linear $\rho(x) = \frac{e^{\frac{x}{L}}}{L}$ (em kg/m).

- (c) Uma placa em forma de triângulo com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ com densidade por unidade de área $\rho(x) = 1 + x$.
- (d) O sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 1$ com densidade por unidade de volume $\rho(x, y, z) = 1 + z^2$.
- (e) A placa de densidade uniforme por unidade de área $\rho(x, y) = k$ da figura do item (e) do exercício anterior.
- (f) Uma caixa sem tampa em forma de cubo posicionada em $[0, L] \times [0, L] \times [0, L]$, com faces com densidade uniforme por unidade de área $\rho(x, y) = k$.
- (g) Um paralelepípedo sólido posicionado em $[0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ com sua metade de baixo com densidade $\rho(x, y, z) = 3k$ e metade de cima com densidade $\rho(x, y, z) = k$.

P3. Em cada item, determine o momento de inércia do objeto em relação ao eixo.

- (a) Momento de inércia de uma barra uniforme de massa m e comprimento L em relação a um eixo que passa pelo meio da barra e é perpendicular a ela.
- (b) Momento de inércia de uma placa uniforme de massa m e dimensões medindo a e b em relação a um eixo que passa pelo meio da placa e é perpendicular a ela.
- (c) Momento de inércia de um cilindro sólido uniforme de massa m , raio R e altura h em relação a um eixo paralelo ao comprimento passando pelo meio do cilindro.
- (d) Momento de inércia de uma esfera sólida uniforme de massa m e raio R em relação a um eixo que passa pelo centro.
- (e) Momento de inércia de um anel (considere o anel apenas com uma dimensão relevante) uniforme de massa m e raio R em relação a um eixo que passa pelo centro e é perpendicular ao plano que contém o anel.
- (f) Momento de inércia da superfície de uma esfera uniforme de massa m e raio R em relação a um eixo que passa pelo centro.

P4. O teorema dos eixos paralelos diz que se E_{CM} é um eixo passando pelo centro de massa de um objeto e E é um outro eixo paralelo a E_{CM} , então o momento de inércia I em relação a E está relacionado ao momento de inércia I_{CM} em relação a E_{CM} através da relação

$$I = I_{\text{CM}} + md^2,$$

em que m é a massa do objeto e d é a distância entre os eixos. Este exercício o guiará na demonstração desse teorema. Defina os eixos coordenados de tal forma que a origem seja o centro de massa do objeto e que o eixo E_{CM} seja o eixo z .

- (a) Verifique que o eixo E é dado por $x = a$ e $y = b$ de forma que $\sqrt{a^2 + b^2} = d$.
- (b) Verifique $I_{\text{CM}} = \int (x^2 + y^2) dm$ e que $I = \int [(x - a)^2 + (y - b)^2] dm$.
- (c) Desenvolva os quadrados perfeitos e escreva como soma de integrais para mostrar que

$$I = \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2) dm.$$

- (d) Use o fato de que o centro de massa está na origem para concluir que $\int x dm = 0$ e $\int y dm = 0$.
- (e) Use o fato de que $a^2 + b^2 = d^2$ é uma constante e conclua que $\int (a^2 + b^2) dm = md^2$.

(f) Junte as informações dos itens (c), (d) e (e) e conclua que

$$I = I_{\text{CM}} + md^2.$$

P5. Em cada item, determine o momento de inércia do objeto em relação ao eixo.

- (a) Momento de inércia de uma barra uniforme de massa m e comprimento L em relação a um eixo que passa por uma extremidade da barra e é perpendicular a ela.
- (b) Momento de inércia de uma placa uniforme de massa m e dimensões medindo a e b em relação a um eixo que passa por um vértice da placa e é perpendicular a ela.
- (c) Momento de inércia de um cilindro sólido uniforme de massa m , raio R e altura h em relação a um eixo paralelo ao comprimento que é tangente ao cilindro.
- (d) Momento de inércia de uma esfera sólida uniforme de massa m e raio R em relação a um eixo tangente à esfera.
- (e) Momento de inércia de um anel (considere o anel apenas com uma dimensão relevante) uniforme de massa m e raio R em relação a um eixo que é perpendicular ao plano que contém o anel e é tangente ao anel.
- (f) Momento de inércia da superfície de uma esfera uniforme de massa m e raio R em relação a um eixo tangente à esfera.



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 6.6

Exercícios principais

P1.

(a) $m = 8 \text{ kg}$.

(c) $m = \frac{2}{3}$.

(e) $m = 22k$.

(g) $m = 2kL_xL_yL_z$.

(b) $m = (e - 1) \text{ kg}$.

(d) $m = \frac{8\pi}{15}$.

(f) $m = 5kL^2$.

P2.

(a) $(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}) = \left(-\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right)$.

(c) $(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}) = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{16}\right)$.

(e) $(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}) = \left(-\frac{1}{11}, -\frac{9}{22}\right)$.

(g) $(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}}) = \left(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2}, \frac{3L_z}{8}\right)$.

(b) $x_{\text{CM}} = \frac{L}{e-1} \text{ m}$.

(d) $(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}}) = \left(0, 0, \frac{25}{32}\right)$.

(f) $(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}}) = \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{2L}{5}\right)$.

P3.

(a) $I = \frac{mL^2}{12}$.

(c) $I = \frac{mR^2}{2}$.

(e) $I = mR^2$.

(b) $I = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$.

(d) $I = \frac{2mR^2}{5}$.

(f) $I = \frac{2mR^2}{3}$.

P4.

(a)

(c)

(e)

(b)

(d)

(f)

P5.

(a) $I = \frac{mL^2}{3}$.

(c) $I = \frac{3mR^2}{2}$.

(e) $I = 2mR^2$.

(b) $I = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$.

(d) $I = \frac{7mR^2}{5}$.

(f) $I = \frac{5mR^2}{3}$.