



MTM3103 - Cálculo 3

Lista de exercícios 6.7 - Trabalho e energia

Exercícios principais

Última atualização: 7 de fevereiro de 2025.

- P1.** Você deve lembrar a definição do trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$ sobre uma partícula ao longo de um movimento retilíneo. Em situações gerais, a força pode variar de intensidade, direção e sentido, assim como o movimento de uma partícula pode ser uma curva qualquer. Calcule o trabalho realizado em um “pequeno pedaço” $d\vec{r}$ e use seus conhecimentos de integral para concluir que o trabalho realizado por uma força $\vec{F}$ sobre uma partícula que se movimenta sobre uma curva C é a integral de linha

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

- P2.** Em cada item, calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ sobre uma partícula que se movimenta ao longo da curva C . *Sugestão.* Se você consultar as listas de exercícios 4.4.2.2.1 e 4.4.2.2.2, você não precisará fazer contas aqui.

- (a) $\vec{F}(x, y) = (xy^2, -x^2)$ e C é a curva dada por $\vec{r}(t) = (t^3, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.
- (b) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ e C é a curva dada por $r(t) = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- (c) $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ e C é a curva dada por $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$ orientada da esquerda para direita.
- (d) $\vec{F}(x, y) = (x + 2y, x^2)$ e C é a curva composta pelo caminho ligando os pontos $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(3, 0)$ por segmentos de reta, iniciando pelo ponto $(0, 0)$.
- (e) $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ e C é a curva dada por $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$ e $z(t) = t^2$, $0 \leq t \leq 1$.
- (f) $\vec{F}(x, y, z) = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ e C é o segmento de reta que inicia em $(1, 0, 0)$ e termina em $(4, 1, 2)$.
- (g) $\vec{F}(x, y, z) = (z + y, z - 4, x)$ e C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z + y = 4$, com orientação no sentido anti-horário para quem vê de cima do plano $z + y = 4$.
- (h) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ e C é a curva composta pelo caminho ligando os pontos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 2)$ por segmentos de reta, iniciando pelo ponto $(0, 0, 0)$.

- P3.** O trabalho tem uma relação íntima com a energia cinética $K = \frac{m\|\vec{v}\|^2}{2}$. Este exercício o guiará na demonstração de que o trabalho realizado pela força resultante sobre um objeto é igual à variação da energia cinética do objeto. É importante observar que este resultado é verdadeiro para a força resultante que atua sobre o objeto. Considere $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t) = (v_x, v_y, v_z)$ e $\vec{a}(t) = (a_x, a_y, a_z)$ as funções posição, velocidade e aceleração, respectivamente, do objeto. Considere, também, que o intervalo de tempo analisado é de t_1 a t_2 .

- (a) Verifique que $\|\vec{v}(t)\|^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.
- (b) Use o item anterior e mostre que

$$\frac{d\|\vec{v}(t)\|^2}{dt} = 2v_x a_x + 2v_y a_y + 2v_z a_z = 2\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t).$$

(c) Use o item anterior e conclua que

$$\int \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) dt = \frac{||\vec{v}(t)||^2}{2} + C.$$

(d) Use a definição de trabalho, a definição de integral de linha e a segunda lei de Newton para mostrar que o trabalho realizado pela força resultante sobre o objeto é igual a

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) dt.$$

(e) Use os itens (c) e (d) e conclua que

$$W = \frac{||\vec{v}(t_2)||^2}{2} - \frac{||\vec{v}(t_1)||^2}{2} = K(t_2) - K(t_1).$$

P4. Quando um campo vetorial é conservativo, as integrais de linha podem ser calculadas usando o teorema do campo conservativo. Em cada item, calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F} = \nabla f$ sobre uma partícula que se movimenta ao longo da curva C . *Sugestão.* Se você consultar o exercício **P2** da lista de exercício 4.5, você não precisará fazer contas aqui.

(a) $f(x, y) = xe^{xy^2}$ e C é a curva dada pela metade superior da elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ com orientação no sentido anti-horário.

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e C é qualquer curva com ponto inicial $(1, 0, -1)$ e ponto final $(2, 3, 4)$.

(c) $f(x, y) = \frac{\ln(1 + e^{\sin(xy)})}{3 + \sqrt{x^2 + y^2}}$ e C é a elipse $\frac{(x-3)^2}{7^2} + \frac{(y+2)^2}{8^2} = 1$ com orientação no sentido anti-horário.

(d) f é uma função qualquer e C é uma curva fechada qualquer.

P5. Os campos vetoriais conservativos recebem esse nome porque, quando são campos de força atuando sobre um objeto, preservam a energia ao longo do movimento. Para formalizar a conservação de energia, é necessário introduzir o conceito de energia potencial. Você deve lembrar da escola que a energia potencial de um objeto sujeito ao campo gravitacional da Terra é mgh , em que h é a altura do objeto em relação ao solo. Este exercício o guiará no processo de definição de energia potencial e também na demonstração de que a energia potencial de um objeto sujeito ao campo gravitacional da Terra é mgh . Considere um objeto que está sujeito somente à atuação de um campo de força conservativo $\vec{F}(x, y, z) = \nabla f$ ao longo de uma curva C com pontos inicial e final iguais a $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $P_f = (x_f, y_f, z_f)$, respectivamente.

(a) Use o exercício **P3.** e o teorema do campo conservativo e conclua que o trabalho realizado por $\vec{F}$ sobre o objeto ao longo da curva C é

$$W = K(P_f) - K(P_i) = f(P_f) - f(P_i).$$

(b) Defina a função potencial $p = -f$ e use o item anterior para mostrar que

$$K(P_f) + p(P_f) = K(P_i) + p(P_i).$$

(c) A curva escolhida no enunciado é uma curva qualquer ligando dois pontos. Use isso para concluir que $K(P) + p(P)$ é constante, para qualquer ponto P . Este item, de alguma forma, diz que a soma da energia cinética com a energia potencial é constante quando um objeto está sujeito a um campo de força conservativo.

- (d) A lei da gravitação universal diz que dois corpos de massas m e M exercem uma força de atração um sobre o outro de intensidade igual a

$$F = \frac{mMG}{d^2},$$

em que d é a distância entre os corpos. Esta fórmula fornece apenas a intensidade da força, a direção e sentido sempre apontam para o centro de massa do outro objeto. Suponha que M seja muito maior do que m , isto é, um dos corpos seja muito mais massivo do que o outro (por exemplo, a Terra e uma bola de tênis). Coloque a origem do sistema de coordenadas no centro da Terra. Mostre que se o corpo de massa m está na posição $\vec{r} = (x, y, z)$, então o vetor força gravitacional exercida pela Terra é igual a

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{mMG}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}(x, y, z) = -\frac{mMG}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}.$$

Sugestão. Você já sabe a intensidade, a direção e o sentido, basta ver que esta força tem as propriedades desejadas.

- (e) Considere a função

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{mMG}{\|\vec{r}\|}.$$

Mostre que $\nabla f = \vec{F}$.

- (f) O item anterior mostrou que o campo gravitacional é conservativo. Como a soma de uma constante a f não altera o gradiente, vamos alterar a função f do item anterior para

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{mMG}{R},$$

em que R é o raio da Terra. Como no item (b), considere a função potencial

$$p(x, y, z) = -f(x, y, z) = mMG \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\|\vec{r}\|} \right).$$

Use o item (c) para concluir que

$$\frac{m\|\vec{v}\|^2}{2} + mMG \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\|\vec{r}\|} \right)$$

é constante.

- (g) Suponha que $\|\vec{r}\|$, que é a posição do objeto, seja $R + h$, em que R é o raio da Terra e h a altura do objeto em relação ao solo (considere h muito menor do que R). Mostre que

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{\|\vec{r}\|} \cong \frac{h}{R^2}.$$

- (h) Utilize os itens (f) e (g) para mostrar que

$$\frac{m\|\vec{v}\|^2}{2} + mgh$$

é constante, em que $g = \frac{MG}{R^2}$ é a aceleração da gravidade. Como conclusão, este item mostra que a energia potencial do campo gravitacional é mgh .



MTM3103 - Cálculo 3

Gabarito da Lista de exercícios 6.7

Exercícios principais

P1.

P2.

(a) $W = \frac{1}{20}.$

(b) $W = 0.$

(c) $W = 10.$

(d) $W = \frac{5}{2}.$

(e) $W = \frac{3}{2}.$

(f) $W = \frac{35}{3}.$

(g) $W = -\pi.$

(h) $W = 2.$

P3.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

P4.

(a) $W = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = -4.$

(b) $W = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = 27.$

(c) $W = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = 0.$

(d) $W = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = 0.$

P5.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)