

Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Departamento de Matemática

# **Cálculo 1**

**Matheus Cheque Bortolan**

Florianópolis  
2022



# Sumário

|                                                                                  |           |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                                                | <b>5</b>  |
| <b>1 Limites</b>                                                                 | <b>7</b>  |
| 1.1 Limites: noção intuitiva, definição e interpretação geométrica . . . . .     | 7         |
| 1.2 Limites: unicidade e propriedades . . . . .                                  | 15        |
| 1.3 Teorema do Confronto . . . . .                                               | 21        |
| 1.4 Limites laterais . . . . .                                                   | 26        |
| 1.5 Continuidade: definição e propriedades . . . . .                             | 30        |
| 1.6 Continuidade: mais propriedades e o Teorema do Valor Intermediário . . . . . | 32        |
| 1.7 Indeterminações e limites infinitos . . . . .                                | 37        |
| 1.8 Limites no infinito . . . . .                                                | 40        |
| 1.9 Assíntotas . . . . .                                                         | 44        |
| 1.10 Limites Fundamentais . . . . .                                              | 47        |
| <b>2 Derivadas</b>                                                               | <b>53</b> |
| 2.1 Reta tangente e velocidade instantânea . . . . .                             | 53        |
| 2.2 Derivada: definição . . . . .                                                | 56        |
| 2.3 Derivadas laterais . . . . .                                                 | 58        |
| 2.4 Diferenciabilidade e continuidade . . . . .                                  | 58        |
| 2.5 Derivada como uma função . . . . .                                           | 59        |
| 2.6 Regras de derivação . . . . .                                                | 61        |
| 2.7 Regra da Cadeia . . . . .                                                    | 66        |
| 2.8 Derivada da função implícita . . . . .                                       | 68        |
| 2.9 Derivada da função inversa . . . . .                                         | 69        |
| 2.10 Derivadas de ordens superiores . . . . .                                    | 71        |
| <b>3 Aplicações da Derivada</b>                                                  | <b>75</b> |
| 3.1 Diferencial . . . . .                                                        | 75        |
| 3.2 Taxa de variação . . . . .                                                   | 78        |
| 3.3 Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio . . . . .                        | 80        |
| 3.4 Crescimento e decrescimento de funções . . . . .                             | 83        |
| 3.5 Máximos e mínimos . . . . .                                                  | 86        |
| 3.6 Critérios para determinar máximos e mínimos . . . . .                        | 90        |
| 3.7 Concavidade e pontos de inflexão . . . . .                                   | 95        |
| 3.8 Esboço de gráficos . . . . .                                                 | 100       |
| 3.9 Problemas de maximização e minimização . . . . .                             | 104       |

|          |                                                                             |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.10     | Regras de L'Hospital . . . . .                                              | 109        |
| 3.11     | Polinômios de Taylor de primeira e segunda ordens . . . . .                 | 113        |
| <b>4</b> | <b>Integrais</b>                                                            | <b>119</b> |
| 4.1      | A integral de Riemann e o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo . . . . . | 119        |
| 4.2      | Primitivas . . . . .                                                        | 128        |
| 4.3      | O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .                          | 130        |
| 4.4      | Regra da substituição para integrais indefinidas . . . . .                  | 131        |
| 4.5      | Regra da substituição para integrais definidas . . . . .                    | 133        |
| 4.6      | Substituição inversa . . . . .                                              | 135        |
| 4.7      | Integração por partes em integrais indefinidas . . . . .                    | 142        |
| 4.8      | Integração por partes na integral definida . . . . .                        | 144        |
| 4.9      | Integrais trigonométricas . . . . .                                         | 145        |
| 4.10     | Substituição inversa (continuação) . . . . .                                | 149        |
| 4.11     | Decomposição em frações parciais . . . . .                                  | 151        |
| 4.12     | Cálculo de áreas . . . . .                                                  | 156        |
| 4.13     | Integrais impróprias em intervalos ilimitados . . . . .                     | 159        |
| 4.14     | Testes de convergência de integrais impróprias . . . . .                    | 161        |
| 4.15     | Integrais impróprias com integrandos descontínuos . . . . .                 | 163        |
| <b>A</b> | <b>O Corpo dos Números Reais</b>                                            | <b>167</b> |
| A.1      | O corpo dos números racionais . . . . .                                     | 171        |
| A.2      | O corpos dos números reais . . . . .                                        | 178        |
| A.3      | Equações e inequações . . . . .                                             | 180        |
| A.4      | Módulo de um número real . . . . .                                          | 181        |
| A.5      | Limitação de subconjuntos de $\mathbb{R}$ . . . . .                         | 184        |
| A.6      | Topologia de $\mathbb{R}$ . . . . .                                         | 188        |
| <b>B</b> | <b>Funções</b>                                                              | <b>191</b> |
| B.1      | Noções gerais . . . . .                                                     | 191        |
| B.2      | Operações com funções . . . . .                                             | 194        |
| B.3      | Funções especiais . . . . .                                                 | 195        |
| B.4      | Funções trigonométricas . . . . .                                           | 200        |
| B.5      | Funções exponencial e logaritmo . . . . .                                   | 204        |
| B.6      | Funções hiperbólicas . . . . .                                              | 206        |

# Introdução

Estas notas foram elaboradas com base nas Notas de Aulas dos professores Márcia Federson, Alexandre Nolasco de Carvalho, e Wagner Nunes, do ICMC-USP, e da professora Gabriela Planas, da UNICAMP, seguindo a teoria desenvolvida nos livros [1, 2, 3, 4, 5]. Foram pensadas para auxiliar os estudantes do curso de Cálculo 1 (MTM3101) da Universidade Federal de Santa Catarina, e fornecer uma boa base matemática em Cálculo, para que possam seguir para os outros cursos de Cálculo que virão e para desenvolver o pensamento científico crítico, que é fundamental para qualquer estudante de graduação.

Os Apêndices A e B oferecem uma revisão das principais propriedades do corpo dos números reais e funções de uma variável real, e estão inseridos nessas notas para torná-las autossuficientes.

Recomendamos a todos os alunos que sempre estejam em dia com os conteúdos dos Apêndices A e B, pois só com uma base sólida somos capazes de expandir cada vez mais nossos conhecimentos.

## 10 dicas para o estudo do Cálculo

1. Não é possível ler e entender Cálculo como um livro de ficção ou post do Instagram.
2. O entendimento do Cálculo só vem com o estudo dedicado e consistente. É preciso sentar na cadeira e estudar com afinco cada definição e exemplo.
3. Leia o texto atentamente e pacientemente, procurando entender profundamente os conceitos e resultados apresentados. A velocidade de leitura não é importante aqui, a consistência é.
4. Acompanhe os exemplos passo a passo, procurando desvendar o porque de cada passagem e tentando enxergar porque o autor adotou esta solução. Tente soluções alternativas, exercite sua criatividade. Existem muitos caminhos corretos que levam à mesma solução.
5. Pratique os conceitos aprendidos fazendo exercícios (as listas de exercícios que serão disponibilizadas são um excelente ponto de partida). Não se aprende cálculo contemplativamente. É fundamental fazer muitos exercícios, até que os erros desapareçam com a prática.
6. Também não se aprende Cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir às aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.

7. Depois do seu estudo individual, procure também discutir os conceitos desenvolvidos em sala de aula com os colegas.
8. É muito importante frequentar as monitorias e os horários de atendimento, ainda que somente para inteirar-se das dúvidas dos colegas (pode ser uma dúvida sua que você ainda nem sabia que tinha!).
9. Não desista de um exercício se a sua solução não é óbvia. É justamente ao fazer os exercícios difíceis que mais aprendemos. Insista e descubra o prazer de desvendar os pequenos mistérios do Cálculo.
10. A dificuldade é uma certeza no aprendizado, mas é ela que nos ajuda a evoluir. Então, ao se deparar com um resultado difícil ou um exercício complicado, não desista. Estude, releia, tente, erre, estude mais, tente novamente, mas **nunca desista**.

# Capítulo 1

## Limites

Nessa unidade estudaremos o conceito de **limites**, que é o comportamento dos valores  $f(x)$ , de uma função real  $f$ , quando olhamos para valores da variável  $x$  próximos de um valor  $x_0$  fixado, mas *diferentes* de  $x_0$  (e isso é muito importante).

O conceito de limite é fundamental ao Cálculo, uma vez que é por meio dele que definimos a **derivada** e a **integral**, que são nossos principais objetos de estudo nesse curso.

### 1.1 Limites: noção intuitiva, definição e interpretação geométrica

Para compreendermos o conceito de limite, começamos com um exemplo. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função real dada por  $f(x) = x + 1$ , e fixemos o valor  $x_0 = 1$ . Para valores de  $x$  próximos de  $x_0$ ,  $f(x)$  assume os seguintes valores:

| $x$   | $f(x)$ | $x$   | $f(x)$ |
|-------|--------|-------|--------|
| 1,5   | 2,5    | 0,5   | 1,5    |
| 1,1   | 2,1    | 0,9   | 1,9    |
| 1,01  | 2,01   | 0,99  | 1,99   |
| 1,001 | 2,001  | 0,999 | 1,999  |
| ↓     | ↓      | ↓     | ↓      |
| 1     | 2      | 1     | 2      |

Utilizando as tabelas acima, podemos intuir que à medida que o valor da variável  $x$  se aproxima de  $x_0 = 1$ , tanto por valores maiores ou menores do que 1, o valor da função  $f(x)$  se aproxima de 2. De fato, podemos fazer com que os valores de  $f(x)$  fiquem tão próximos de 2 quanto quisermos, bastando para isso tomar valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0 = 1$ .

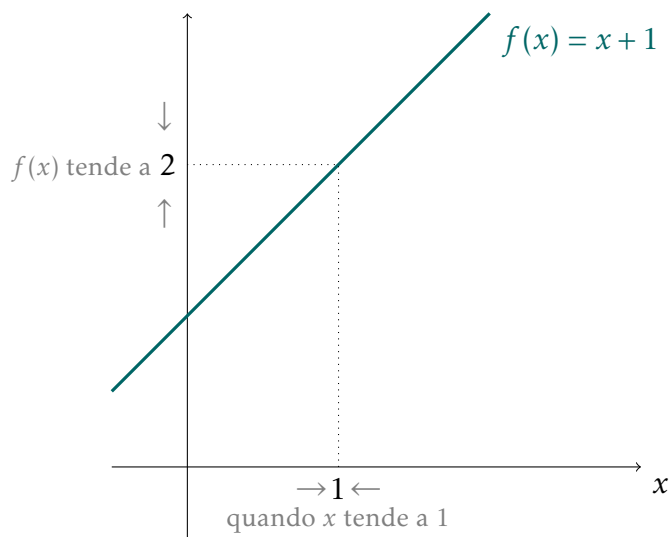
Uma observação importante aqui é que sempre queremos valores próximos de  $x_0 = 1$  mas **não queremos** o valor  $x_0 = 1$ . Isto é, queremos entender o comportamento da função quando os valores de  $x$  se aproximam de  $x_0$ , mas não nos importa em saber o valor da função em  $x_0$ . Em muitos casos, a função estudada nem precisa estar definida no ponto  $x_0$ .

Esse é o conceito de **limite**, que definimos intuitivamente da seguinte maneira: escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

e dizemos **o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $x_0$  é igual a  $L$** , se os valores de  $f(x)$  ficam arbitrariamente próximos de  $L$  quando tomamos valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0$ , mas não igual a  $x_0$ . Podemos também utilizar a notação  **$f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow x_0$** , que pode ser lida como  *$f(x)$  tende a  $L$  quando  $x$  tende a  $x_0$* .

A representação gráfica do exemplo acima pode ser vista na figura abaixo:



Novamente lembramos que ao procurar o limite quando  $x$  tende a  $x_0$ , não consideramos  $x = x_0$ . Estamos interessados no que acontece próximo de  $x_0$  e a função  $f(x)$  nem precisa estar definida para  $x = x_0$ . Para ilustrar bem esse fato, consideremos o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.1.** Encontre  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  não está definida para  $x = 1$ . Ainda sim, para  $x \neq 1$ , temos

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Como os valores das duas funções são iguais para  $x \neq 1$ , o comportamento das duas funções para  $x$  próximo de 1 é o mesmo, e assim seus limites para  $x$  tendendo a 1 serão

iguais. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

**Exemplo 1.2.** Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Determine o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a 1.

**SOLUÇÃO.** Observe que para  $x \neq 1$  a função  $f(x)$  é igual à função do exemplo anterior, logo  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ . Note que o limite não é o valor da função para  $x = 1$ , já que  $f(1) = 0$ .

Antes de apresentar a definição precisa de limite, veremos um exemplo. Considere a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Intuitivamente vemos que  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ , e agora fazemos uma pergunta: quão próximo  $x$  deverá estar de 3 para que o **erro cometido** ao aproximar  $f(x)$  por 5 seja menor do que 0,1? Vamos responder essa pergunta.

Lembrando da distância entre números reais usando o módulo, sabemos que a distância de  $x$  a 3 é  $|x - 3|$  e a distância de  $f(x)$  a 5 é  $|f(x) - 5|$ . Assim nosso problema é achar um número positivo  $\delta$  tal que

$$\text{se } |x - 3| < \delta, \text{ com } x \neq 3 \text{ então } |f(x) - 5| < 0,1.$$

Note que  $x \neq 3$  se, e somente se,  $|x - 3| > 0$ . Então podemos reescrever a afirmação acima da seguinte maneira: devemos encontrar um número positivo  $\delta$  tal que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < 0,1.$$

Agora veja que se  $0 < |x - 3| < \frac{0,1}{2}$ , então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 0,1;$$

e assim a resposta será  $\delta = \frac{0,1}{2} = 0,05$ .

O que acontece se mudarmos o erro 0,1 dado no problema para 0,01? Claramente, o valor de  $\delta$  deverá mudar para  $\delta = \frac{0,01}{2}$ . Em geral, se usarmos um erro positivo arbitrário  $\varepsilon$ , então o problema será achar um  $\delta$  tal que

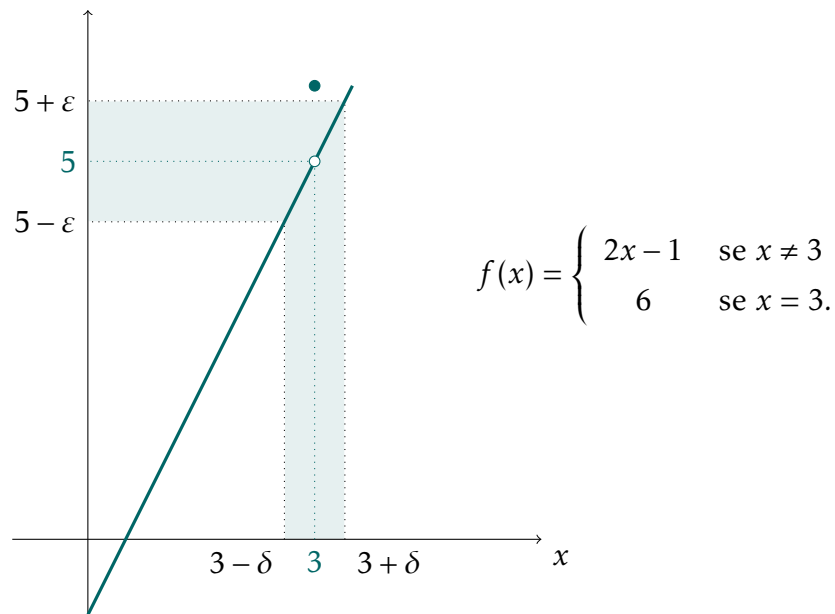
$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \varepsilon.$$

Podemos ver que neste caso  $\delta$  pode ser escolhido como sendo  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Esta é uma maneira de dizer que  $f(x)$  está próximo de 5 quando  $x$  está próximo de 3.

Também podemos escrever

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta, \quad x \neq 3,$$

ou seja, tomando os valores de  $x \neq 3$  no intervalo  $(3 - \delta, 3 + \delta)$ , podemos obter os valores de  $f(x)$  dentro do intervalo  $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$ . Veja a representação geométrica para este limite na figura abaixo:



Para apresentar a definição precisa de limite, lembremos que o **domínio** de uma função real  $f$  será denotado por  $D_f$ . Ainda, dizemos que  $x_0$  é um **ponto no fecho** de  $D_f$  se: ou  $x_0 \in D_f$  ou  $x_0$  é um ponto de acumulação de  $D_f$  (isto é, existem pontos de  $D_f$  tão próximos de  $x_0$  quando quisermos). Escrito de maneira matemática formal,  $x_0$  é um ponto no fecho de  $D_f$  se para cada  $\eta > 0$  existe  $x \in D_f$  com  $|x - x_0| < \eta$ . Para mais detalhes sobre o domínio de uma função veja o Apêndice B (Definição B.1), e sobre pontos no fecho veja o Apêndice A (Definição A.43).

**Definição 1.3 (DEFINIÇÃO DE LIMITE).** Sejam  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $x_0$  um ponto no fecho de  $D_f$ . Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  se

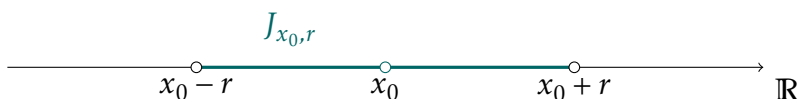
para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta$  e  $x \in D_f$  então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Antes de passarmos para os exemplos, fazemos a seguinte observação: a definição de limite apresentada acima é bastante geral, e engloba casos nos quais o domínio  $D_f$  da função  $f$  pode

ser um conjunto “esquisito”. Não é o foco nesse curso tratar todas essas possíveis “esquisitices”! Assim, no que segue e nos exemplos, para calcular o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $x_0$ , consideraremos quase sempre o caso no qual  $f$  está definida, pelo menos, numa **vizinhança perfurada de  $x_0$** , isto é,  $f$  está definida (pelo menos) num conjunto da forma

$$J_{x_0,r} := (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r) \quad (1.1)$$

para algum  $r > 0$ . Esse conjunto pode também ser descrito como  $J_{x_0,r} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < r\}$ , e é representado geometricamente na figura abaixo:



**Exemplo 1.4.** Se  $k \in \mathbb{R}$  e  $f(x) = k$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$  para qualquer  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**SOLUÇÃO.** Veja se para qualquer  $\delta > 0$ , se  $0 < |x - x_0| < \delta$  então

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon,$$

e o resultado está provado.

**Exemplo 1.5.** Prove que  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$ .

**SOLUÇÃO.** Devemos fazer uma análise preliminar para encontrar o candidato a  $\delta$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , o problema é determinar  $\delta$  tal que

$$\text{se } 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{então} \quad |(3x - 2) - 4| < \varepsilon.$$

Mas  $|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = |3(x - 2)| = 3|x - 2|$ . Portanto, queremos

$$3|x - 2| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

ou

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Isto sugere que podemos escolher  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ . Provemos que a escolha de  $\delta$  feita acima funciona. Dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ . Se  $0 < |x - 2| < \delta$ , então

$$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = |3(x - 2)| = 3|x - 2| < 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim,

$$|(3x - 2) - 4| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

logo, pela definição,  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$ .

**Exemplo 1.6.** Mostre que  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$  para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**SOLUÇÃO.** Fazendo uma análise preliminar, queremos, dado  $\varepsilon > 0$ , encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{então} \quad |x - x_0| < \varepsilon.$$

Aqui é simples de ver que tomando  $\delta = \varepsilon$ , o resultado segue.

**Exemplo 1.7.** Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

**SOLUÇÃO.** Como anteriormente, precisamos de uma análise preliminar para encontrar o candidato a  $\delta$ , que nesse exemplo é um pouco mais complicado, como veremos. Dado  $\varepsilon > 0$ , devemos determinar o valor para  $\delta > 0$  de modo que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{então} \quad |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

A última equação se escreve também como

$$|(x + 2)(x - 2)| < \varepsilon.$$

Diferentemente do caso anterior, não podemos tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{x+2}$ , pois o valor de  $\delta$  **não pode depender de  $x$** . Com isso, faremos uma escolha **preliminar** para  $\delta$ , tomando  $0 < \delta \leq 1$ . Assim, se  $0 < |x - 2| < \delta \leq 1$  temos

$$-1 < x - 2 < 1 \quad \text{e} \quad x \neq 2 \quad \xrightarrow{\text{somando 4 na desigualdade}} \quad 3 < x + 2 < 5 \quad \text{e} \quad x \neq 2.$$

Dessa forma, como  $x + 2 = |x + 2| < 5$  para  $0 < |x - 2| < \delta \leq 1$ , temos

$$|(x + 2)(x - 2)| = |x + 2||x - 2| < 5|x - 2|.$$

Assim, se  $5|x - 2| < \varepsilon$ , teremos o resultado. Para isso, vemos que precisamos de  $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$  e, como já tínhamos feito uma escolha preliminar, na qual pedíamos que  $0 < \delta < 1$ , devemos tomar

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{5} \right\}.$$

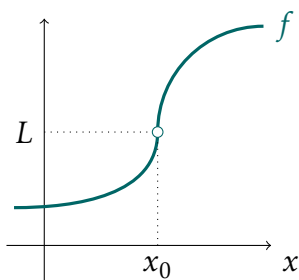
Nos resta mostrar que essa escolha para  $\delta$  funciona. Assim, se  $0 < |x - 2| < \delta$ , como  $\delta < 1$  sabemos que  $3 < x + 2 < 5$  e assim

$$|x^2 - 4| = |(x + 2)(x - 2)| < 5|x - 2| < 5\delta < \varepsilon,$$

já que  $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$ .

**Observação:** note que a desigualdade  $3 < x + 2$  só foi usada para garantir que  $|x + 2| = x + 2$ , já que  $x + 2 > 3 > 0$ . A desigualdade  $x + 3 < 5$  foi realmente usada. A escolha preliminar de  $0 < \delta \leq 1$  pode ser feita de várias maneiras diferentes (tente você fazer uma escolha preliminar com outro valor), mas ela afeta o resto dos cálculos e afeta o valor final obtido para  $\delta$  (verifique isso!).

Apresentamos agora alguns exemplos geométricos sobre limites.



Uma representação geométrica de

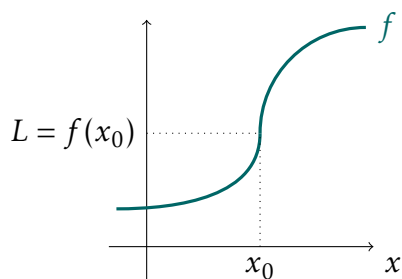
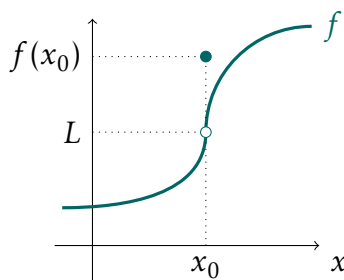
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

quando  $f(x)$  não está definida para  $x = x_0$ .

Uma representação geométrica de

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Veja que, nesse caso  $L \neq f(x_0)$ , isto é, o limite é diferente do valor que a função tem naquele ponto.



Uma representação geométrica de

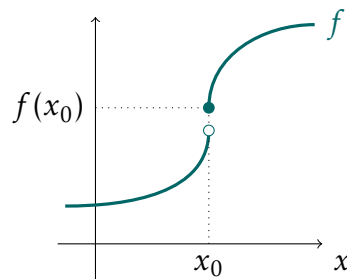
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Neste caso  $L = f(x_0)$ , isto é, o limite é igual ao valor da função no ponto.

Uma representação geométrica de quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

não existe.

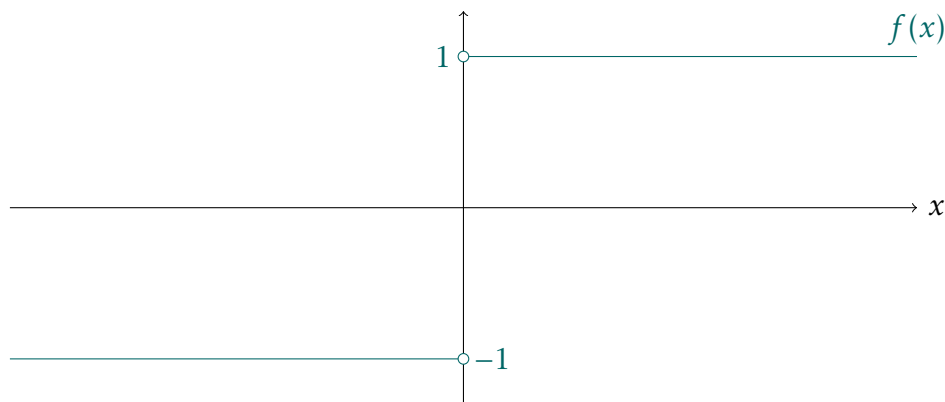


**Exemplo 1.8.** Considere a função  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ , definida para  $x \neq 0$ . Não existe o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**SOLUÇÃO.** Essa função  $f$  também pode ser descrita como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

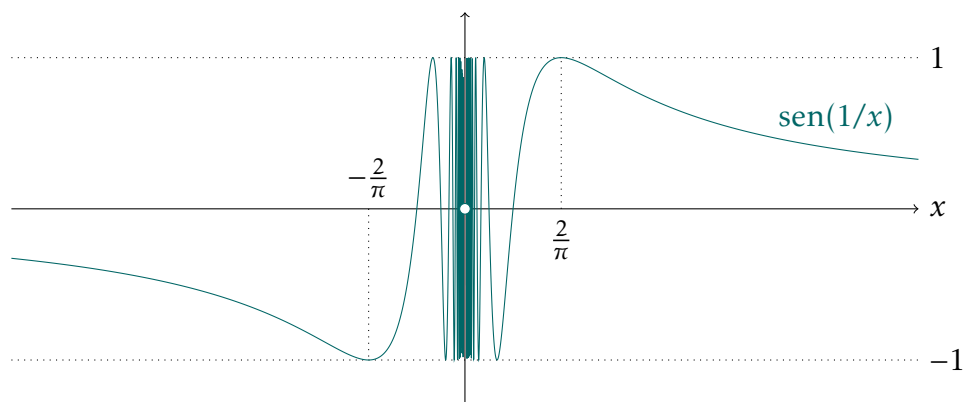
e o gráfico de  $f$  é dado na figura abaixo:



Das representações geométricas vistas acima, podemos ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  não existe. Estudaremos mais detalhadamente esse exemplo na Seção 1.4.

**Exemplo 1.9.** Não existe o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ .

**SOLUÇÃO.** Com a teoria vista até o momento, é relativamente complicado demonstrar que esse limite não existe. Vejamos o gráfico dessa função:



Veja que quanto mais nos aproximamos de 0, mais a função oscila, praticamente preenchendo todo o intervalo  $[-1, 1]$  na vertical. Assim, é natural pensarmos que a função não se aproxima de nenhum único valor quando  $x$  se aproxima de zero, ou em outras palavras,  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(\frac{1}{x})$  não existe.

## 1.2 Limites: unicidade e propriedades

A primeira pergunta que precisamos responder é: quando uma função tem limite para  $x$  tendendo a  $x_0$ , esse limite é único? De maneira intuitiva, podemos ver que sim, quando  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe, então o valor desse limite é único. O próximo teorema garante exatamente isso.

**Teorema 1.10 (UNICIDADE DO LIMITE).** Sejam  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $x_0$  um ponto no fecho de  $D_f$ . Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2.$$

Então

$$L_1 = L_2,$$

isto é, o limite, quando existe, é único.

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , da definição de limites para  $L_1$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  então  $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ . Analogamente, da definição de limite para  $L_2$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  então  $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ . Assim se  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$  vemos que para  $0 < |x - x_0| < \delta$  temos  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  e  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  e, portanto, obtemos

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Com isto mostramos que para cada  $\varepsilon > 0$ , devemos ter  $|L_1 - L_2| < 2\varepsilon$ , o que implica que  $|L_1 - L_2| = 0$  e então  $L_1 = L_2$ .  $\square$

Na demonstração acima, usamos a **desigualdade triangular** (veja a Proposição A.24 do Apêndice A), da seguinte maneira:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - \underbrace{f(x) + f(x)}_{=0} - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|,$$

onde usamos também o “truque matemático” conhecido como “somar 0”, isto é, somamos e subtraímos o valor  $f(x)$ , o que não altera o valor da expressão! Usaremos esse artifício mais vezes no decorrer do curso.

A seguinte propriedade, que já usamos intuitivamente anteriormente nos Exemplos 1.1 e 1.2, será útil para determinar limites.

**Proposição 1.11.** Sejam  $f, g$  duas funções definidas, pelo menos, em  $J_{x_0, r}$  e suponha que existe  $0 < r_1 < r$  tal que  $f(x) = g(x)$  para  $x \in J_{x_0, r_1}$ . Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Da definição de limite para  $g$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta$ , temos  $|g(x) - L| < \varepsilon$ . Diminuindo o valor de  $\delta$  se necessário, podemos assumir que  $\delta < r_1$ , e assim, para todo  $0 < |x - x_0| < \delta < r_1$  temos  $f(x) = g(x)$  e, portanto,

$$|f(x) - L| = |g(x) - L| < \varepsilon.$$

Deste modo, mostramos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .  $\square$

**Exemplo 1.12.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que para  $x \neq 2$  temos

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2,$$

e como  $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$ , segue da Proposição 1.11 que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ .

**Exemplo 1.13.** Determine  $L$  para que a função  $f$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ L, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

satisfaça  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ .

**SOLUÇÃO.** Como  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ , basta tomar  $L = 4$ .

As primeiras propriedades que temos de limites são descritas abaixo. A demonstração matemática delas pode ser feita por vocês, tentem!

**Proposição 1.14 (PRIMEIRAS PROPRIEDADES DE LIMITES).** Suponha que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ . Então

- (i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 + L_2$ ;
- (ii) se  $k \in \mathbb{R}$  temos  $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = kL_1$ ;
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 L_2$ ;
- (iv) se  $L_2 \neq 0$  temos  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ .

Utilizando a propriedade (iii) repetidamente, para  $n \in \mathbb{N}$  obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n = L_1^n.$$

Para aplicar essas propriedades nos exemplos abaixo, sugerimos que você relembre os Exemplos 1.4 e 1.6.

**Exemplo 1.15.** Temos

- (a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$  para  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 8) = 32$ .
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{4}$ .

Temos ainda as seguintes propriedades, que serão provadas no decorrer do curso.

**Proposição 1.16 (MAIS PROPRIEDADES DE LIMITES).** Temos as seguintes propriedades de limites:

- (v)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;
- (vi)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;

- (vii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$  com  $a \neq 1$ ;
- (viii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$  com  $a \neq 1$ ;
- (ix)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$  se  $n$  é ímpar;
- (x)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$  para todo  $x_0 > 0$  se  $n$  é par;
- (xi)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$  se  $n$  é ímpar;
- (xii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  e  $n$  é par.

Para a última propriedade, vale lembrar que temos um resultado de **conservação de sinal** para limites que diz que

se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  então existe  $r > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para  $x \in J_{x_0, r}$ .

Sendo assim, ao assumir que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  temos  $f(x) > 0$  para  $x \in J_{x_0, r}$  e podemos calcular  $\sqrt[n]{f(x)}$  para  $n$  par.

**Exemplo 1.17.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$ .

**SOLUÇÃO.** Veja que para  $x \neq 3$  temos

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}.$$

Usando as propriedades de limites, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

e da Proposição 1.11 temos

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

**Exemplo 1.18.** Calcule  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t}$ .

**SOLUÇÃO.** Veja que para  $t \neq 0$  temos

$$\frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t} = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{t^2 + 9 - 9}{t(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9} + 3}.$$

Usando as propriedades vistas de limites, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = 0,$$

e da Proposição 1.11 obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = 0.$$

**Exemplo 1.19.** Mostre que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = 6$ .

**SOLUÇÃO.** Veja que para  $h \neq 0$  temos

$$\frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = 6 + h.$$

Sabemos que  $\lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$  e, da Proposição 1.11 temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6.$$

**Exemplo 1.20.** Calcule  $\lim_{s \rightarrow 1} e^{(s^2 + 1) \ln(2 + (s-1)^3)}$ .

**SOLUÇÃO.** Calculemos primeiramente o limite do expoente. Das propriedades de limites vistas acima, temos  $\lim_{s \rightarrow 1} (s^2 + 1) = 2$  e  $\lim_{s \rightarrow 1} \ln(2 + (s-1)^3) = \ln 2$ . Logo segue de (iii) que

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s^2 + 1) \ln(2 + (s-1)^3) = 2 \ln 2 = \ln 4.$$

Assim, usando a propriedade (vii) de limites, temos

$$\lim_{s \rightarrow 1} e^{(s^2 + 1) \ln(2 + (s-1)^3)} = e^{\ln 4} = 4.$$

Temos uma propriedade útil para o cálculo de certos limites:

**Proposição 1.21 (MUDANÇA DE VARIÁVEL NO LIMITE).** Sejam  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $y_0$  um ponto no fecho de  $D_f$  e assumamos que  $\lim_{x \rightarrow y_0} f(x)$  existe. Considere uma função  $g: D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com

$g(D_g) \subset D_f$  e tal que existe um ponto no fecho  $x_0$  de  $D_g$  com  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$  e tal que  $g(x) \neq y_0$  para todo  $x \in D_f$  suficientemente próximo de  $x_0$ , com  $x \neq x_0$ . Então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y).$$

*Demonstração.* Seja  $L = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$ . Pela definição de limite, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\eta > 0$  tal que para  $0 < |y - y_0| < \eta$  com  $y \in D_f$  temos  $|f(y) - L| < \varepsilon$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ , pela definição de limite, para o  $\eta > 0$  encontrado acima, existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta$  e  $x \in D_f$  temos  $|g(x) - y_0| < \eta$ .

Deste modo, como  $g(D_g) \subset D_f$  e  $g(x) \neq y_0$  para todo  $x \in D_f$  suficientemente próximo de  $x_0$ , para  $0 < |x - x_0| < \delta$  e  $x \in D_f$  temos  $0 < |g(x) - y_0| < \eta$ . Logo

$$|f(g(x)) - L| < \varepsilon,$$

o que mostra que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y).$$

□

**Exemplo 1.22.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 7x + 7}{x-1}$ .

**SOLUÇÃO.** Definimos a função  $g(x) = x - 1$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$  e  $g(x) \neq 0$  para  $x$  próximo de 1 com  $x \neq 1$ , do resultado acima temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 7x + 7}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3 + y^2 - 7y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} (y^2 + y - 7) = -7.$$

O resultado a seguir nos dá uma maneira de comparar o limite de duas funções, desde que saibamos comparar as funções. Ele nos diz que a operação de calcular o limite preserva desigualdades.

**Teorema 1.23 (COMPARAÇÃO DE LIMITES).** Sejam  $f$  e  $g$  funções reais. Assuma que existe  $r > 0$  tal que

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para todo } x \in J_{x_0, r}$$

e que existam os limites  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

*Demonstração.* Sejam  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  e  $M = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Da definição de limite para  $f$ , dado

$\varepsilon > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , ou seja,

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \text{para } 0 < |x - x_0| < \delta_1.$$

Da definição de limite para  $g$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  então  $|g(x) - M| < \varepsilon$ , ou seja,

$$M - \varepsilon < g(x) < M + \varepsilon \quad \text{para } 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

Assim, se  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$  temos  $\delta > 0$  e para  $0 < |x - x_0| < \delta$  temos

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \quad M - \varepsilon < g(x) < M + \varepsilon \quad \text{e} \quad f(x) \leq g(x).$$

Assim

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < M + \varepsilon.$$

Comparando as pontas dessa desigualdade obtemos  $L < M + 2\varepsilon$ . Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, segue que  $L \leq M$ , o que completa a demonstração.  $\square$

**Atenção!** Não é sempre verdade que se existe  $r > 0$  tal que  $f(x) < g(x)$  para  $x \in J_{x_0, r}$  e existem os limites  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Isso não ocorre, por exemplo, com as funções  $f(x) = 0$  e  $g(x) = x^2$ . Temos  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \neq 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . O que continua válido é que se existe  $r > 0$  tal que  $f(x) < g(x)$  para  $x \in J_{x_0, r}$  e existem os limites  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

## 1.3 Teorema do Confronto

O **Teorema do Confronto** representa mais uma propriedade de limites, mas que é tão importante que recebeu um nome só pra ela! Esse resultado nos permite calcular limites de algumas funções sem nem mesmo conhecê-las!

**Teorema 1.24 (TEOREMA DO CONFRONTO).** Sejam  $f, g, h$  funções reais e suponha que existe  $r > 0$  tal que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{para todo } x \in J_{x_0, r}.$$

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$  então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Da definição de limite para  $f$  sabemos que existe  $\delta_1 > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  temos  $|f(x) - L| < \varepsilon$  (e podemos assumir  $\delta_1 < r$ ). Da definição de limite para  $h$  sabemos que existe  $\delta_2 > 0$  (que podemos também assumir  $\delta_2 < r$ ) tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  temos  $|h(x) - L| < \varepsilon$ .

Assim, para  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$  e  $0 < |x - x_0| < \delta$  temos

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |h(x) - L| < \varepsilon.$$

Equivalentemente

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \text{e} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Portanto para  $0 < |x - x_0| < \delta$  temos

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon,$$

isto é

$$|g(x) - L| < \varepsilon,$$

o que prova que  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ . □

**Exemplo 1.25.** Usando o Teorema do Confronto mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

**SOLUÇÃO.** Como

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \quad \text{para todo } x \neq 0,$$

multiplicando por  $x^2$  (lembrando que  $x^2 \geq 0$ , então as desigualdades são mantidas) temos

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2$ , segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

**Observação:** lembre-se que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$  não existe (Exemplo 1.9). Mas ao multiplicar essa função por  $x^2$  (que satisfaz  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ), o limite do produto  $x^2 \sin(\frac{1}{x})$  passa a existir e ser 0. Isso não é um caso isolado, a Proposição 1.28 a seguir generaliza essa situação.

**Exemplo 1.26.** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \leq x^2$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- (a) Calcule, caso exista,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
- (b) Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .
- (c) Calcule, caso exista,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .
- (d) É possível concluir algo sobre  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ ?

**SOLUÇÃO.** (a) Veja que para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2.$$

Assim como no exemplo anterior, segue do Teorema do Confronto que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , já que  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ .

(b) Como  $|f(x)| \leq x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , substituindo  $x = 0$  obtemos  $|f(0)| \leq 0$ , o que nos dá  $f(0) = 0$ , assim

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{(a)}{=} 0 = f(0).$$

(c) Como  $|f(x)| \leq x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , para  $x \neq 0$  podemos dividir ambos os lados dessa desigualdade por  $|x|$  (como  $|x| > 0$  para  $x \neq 0$ , a desigualdade é mantida) e obtemos

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x| \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Assim, temos

$$-|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x| \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  (verifique esse fato), segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

(d) Não é possível concluir nada sobre o limite. De fato, podemos dar exemplos de funções  $f$  satisfazendo  $|f(x)| \leq x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  de maneira que o limite considerado

seja qualquer número  $\alpha \in [-1, 1]$ , ou também que o limite não exista. Vamos apresentar esses exemplos.

Para um dado  $\alpha \in [-1, 1]$  defina  $f(x) = \alpha x^2$ . Assim

$$|f(x)| = |\alpha x^2| = |\alpha| x^2 \leq x^2 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

já que  $|\alpha| \leq 1$ . Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha.$$

Agora defina  $f(x) = x^2$  para  $x \geq 0$  e  $f(x) = -x^2$  para  $x < 0$ . Assim

$$\frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Portanto, segue como no Exemplo 1.8 que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$  não existe. Ou seja, o valor desse limite depende da função  $f$  considerada, e não podemos dizer nada sem conhecê-la.

**Lema 1.27.** Valem as seguintes afirmações:

- (a) se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$ ;
- (b) se  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ;
- (c) existem funções  $f$  tais que  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$  existe mas  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  não existe.

*Demonstração.* (a) Da definição de limite, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta$  então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Mas então

$$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{para } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

o que mostra que  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$ .

**Observação.** Usamos acima a desigualdade  $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$ , que é consequência da desigualdade triangular (veja o Corolário A.25 do Apêndice A).

(b) Da definição de limite para  $|f|$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - x_0| < \delta$  então

$$||f(x)|| = ||f(x)| - 0| < \varepsilon.$$

Como  $||f(x)|| = |f(x)|$ , segue que

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \text{para } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

o que mostra que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

(c) Basta considerar a função  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  e  $x_0 = 0$  (relembre o Exemplo 1.8).  $\square$

Com o lema acima e o Teorema do Confronto, obtemos a seguinte importante propriedade.

**Proposição 1.28.** Seja  $g$  uma função **limitada** no conjunto  $J_{x_0, r}$ , isto é, assuma que existe  $M \geq 0$  tal que  $|g(x)| \leq M$  para todo  $x \in J_{x_0, r}$ . Considere também uma função  $f$ , definida pelo menos em  $J_{x_0, r}$ , satisfazendo  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . Então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = 0.$$

*Demonstração.* Veja que

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M|f(x)| \quad \text{para } x \in J_{x_0, r}.$$

Portanto

$$-M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)| \quad \text{para } x \in J_{x_0, r}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , segue do lema acima e das propriedades de limites que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-M|f(x)|) = \lim_{x \rightarrow x_0} M|f(x)| = 0.$$

Assim, do Teorema do Confronto, segue que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0.$$

$\square$

Esse resultado acima é muito especial: note que  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  nem precisa existir para que tenhamos  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ . Na verdade, quando  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existe, esse resultado apenas repete o que já sabíamos das propriedades básicas de limites, uma vez que teríamos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

**Exemplo 1.29.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x)$ , onde  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

**SOLUÇÃO.** Veja que  $|g(x)| \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , portanto  $g$  é limitada. Como  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ,

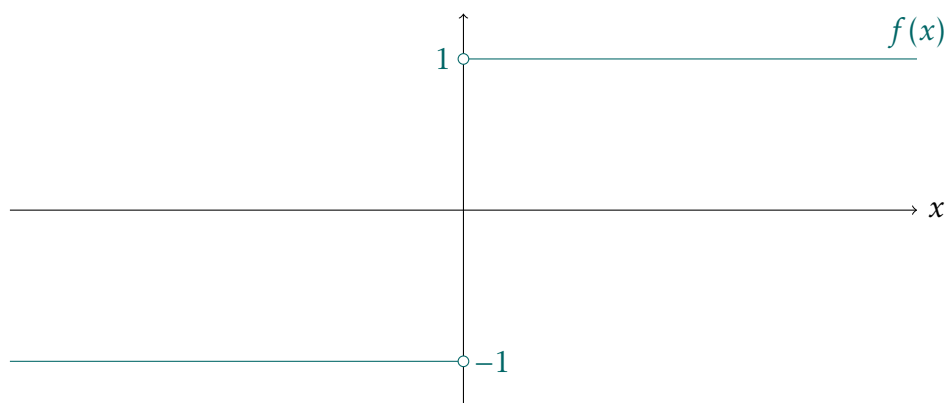
segue da Proposição 1.28 que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) = 0.$$

**Observação:** note que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  não existe.

## 1.4 Limites laterais

Considere a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  do Exemplo 1.8 dada por  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ , cujo gráfico é dado abaixo:



Quando  $x$  tende a 0 pela esquerda  $f(x)$  tende a  $-1$ , e quando  $x$  tende a 0 pela direita  $f(x)$  tende a 1. Claramente, o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a 0 não existe, pois  $f$  não se aproxima de um único número (nesse caso, ela se aproxima de dois números distintos,  $-1$  e  $1$ ).

Essa análise, porém nos faz considerar a seguinte questão: por que não considerar o comportamento de  $f$  somente pela esquerda ou somente pela direita? É exatamente isso que consideraremos, que são os chamados **limites laterais**.

Dizemos que **o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $x_0$  pela esquerda é igual a  $L$** , e denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L,$$

se pudermos fazer com que os valores de  $f(x)$  fiquem arbitrariamente próximos de  $L$ , desde que tomemos valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0$ , mas **estritamente menores** do que  $x_0$ .

Dizemos que **o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $x_0$  pela direita é igual a  $L$** , e denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L,$$

se pudermos fazer com que os valores de  $f(x)$  fiquem arbitrariamente próximos de  $L$ , desde que tomemos valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0$ , mas **estritamente maiores** do que  $x_0$ .

As definições precisas de limites laterais são como segue.

**Definição 1.30 (LIMITES LATERAIS).**

**Limite lateral pela esquerda.** Sejam  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0$  um ponto no fecho de  $D_f \cap (-\infty, x_0]$ . Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ , se

para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que se  $x_0 - \delta < x < x_0$  e  $x \in D_f$  então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Limite lateral pela direita.** Sejam  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0$  um ponto no fecho de  $D_f \cap [x_0, +\infty)$ . Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ , se

para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que se  $x_0 < x < x_0 + \delta$  e  $x \in D_f$  então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Vale aqui a mesma observação que fizemos para limites: a definição dada acima é feita para tratar todos os casos de  $D_f$ , que podem ser bastante complicados. Mas, na prática, para limites laterais pela esquerda trabalharemos com a função  $f$  definida, pelo menos, num intervalo  $(x_0 - r, x_0)$  para algum  $r > 0$ , e para limites laterais pela direita  $f$  estará definida, pelo menos, num intervalo  $(x_0, x_0 + r)$  para algum  $r > 0$ .

**Exemplo 1.31.** Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ .

**SOLUÇÃO.** Seja  $\varepsilon > 0$ . Queremos achar um  $\delta > 0$  tal que

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta,$$

ou seja,

$$\sqrt{x} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta,$$

ou elevando ao quadrado

$$x < \varepsilon^2 \quad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta.$$

Isto sugere que devemos escolher  $\delta = \varepsilon^2$ . Verifiquemos que a escolha é correta. Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\delta = \varepsilon^2$ . Se  $0 < x < \delta$ , então

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon, \quad \text{logo} \quad |\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon.$$

Isso mostra que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ .

Segue diretamente das definições de limites laterais o seguinte teorema.

**Teorema 1.32.** Temos  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ .

**Corolário 1.33.** Segue do Teorema 1.32 que

(a) se  $f$  admite limites laterais em  $x_0$ , e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x),$$

então **não** existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ;

(b) se  $f$  não admite um dos limites laterais em  $x_0$ , então não existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Exemplo 1.34.** O limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$  não existe.

**SOLUÇÃO.** Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -1 = -1.$$

Portanto, como esses limites laterais são distintos, segue do Corolário 1.33 que não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}.$$

**Exemplo 1.35.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ .

**SOLUÇÃO.** Lembremos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

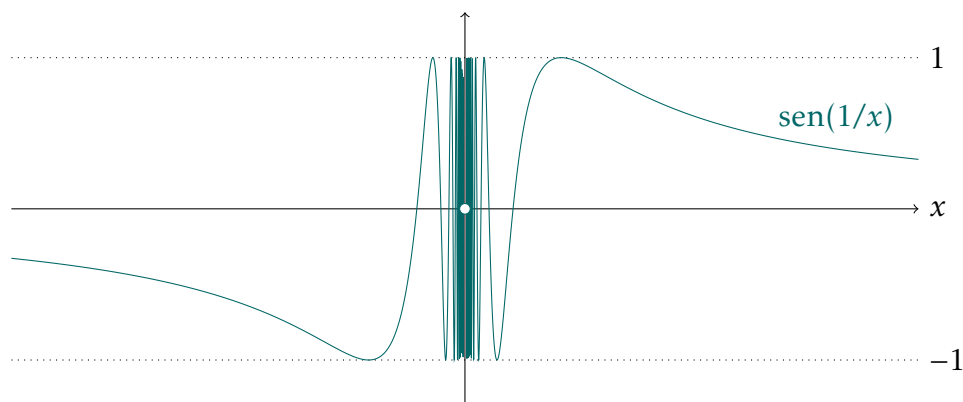
Assim, é fácil ver que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

Como os limites laterais são iguais, então do Teorema 1.32 segue que  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ .

**Exemplo 1.36.** Mostre que ambos  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin(\frac{1}{x})$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(\frac{1}{x})$  não existem.

**SOLUÇÃO.** O gráfico dessa função já foi visto, e é dado por



Note que, quando  $x$  se aproxima de 0, tanto pela esquerda quanto pela direita, os valores de  $\text{sen}(\frac{1}{x})$  oscilam indefinidamente, não se aproximando de nenhum valor específico. Portanto, nenhum dos limites laterais considerados existe.

A **Mudança de Variável no Limite** serve também quando temos limites laterais, e as demonstrações são análogas.

**Proposição 1.37 (MUDANÇA DE VARIÁVEL NO LIMITE LATERAL PELA ESQUERDA).** Sejam  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $y_0$  um ponto no fecho de  $D_f$  e assumamos que  $\lim_{y \rightarrow y_0^-} f(y)$  existe. Considere uma função  $g: D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $g(D_g) \subset D_f$  e tal que existe um ponto no fecho  $x_0$  de  $D_g$  com  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$  e tal que  $g(x) < y_0$  para todo  $x \in D_f$  suficientemente próximo de  $x_0$ , com  $x \neq x_0$ . Então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0^-} f(y).$$

**Proposição 1.38 (MUDANÇA DE VARIÁVEL NO LIMITE LATERAL PELA DIREITA).** Sejam  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $y_0$  um ponto no fecho de  $D_f$  e assumamos que  $\lim_{y \rightarrow y_0^+} f(y)$  existe. Considere uma função  $g: D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $g(D_g) \subset D_f$  e tal que existe um ponto no fecho  $x_0$  de  $D_g$  com  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$  e tal que  $g(x) > y_0$  para todo  $x \in D_f$  suficientemente próximo de  $x_0$ , com  $x \neq x_0$ . Então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0^+} f(y).$$

Em ambos os resultados acima, se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = y_0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = y_0$$

no lugar de  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , então a conclusão é válida fazendo as trocas necessárias.

**Exemplo 1.39.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{|x-2|}$ .

**SOLUÇÃO.** Fazendo  $g(x) = |x-2|$  vemos que  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$  e  $g(x) > 0$  para todo  $x$  suficientemente próximo de 2 com  $x \neq 2$ . Dos resultados acima, temos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{|x-2|} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{y} = 0.$$

## 1.5 Continuidade: definição e propriedades

Dizemos que uma função  $f$  é **contínua num ponto**  $x_0 \in D_f$  se as duas condições abaixo estão satisfeitas:

- ★  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe;
- ★  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Se  $f$  não for contínua em  $x_0$ , isto é, se alguma das duas condições acima não estiver satisfeita, dizemos que  $f$  é **descontínua em**  $x_0$ .

**Exemplo 1.40.**

(a) A função  $f(x) = x + 1$  é contínua em  $x_0 = 1$ ;

(b) A função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

não é contínua em  $x_0 = 1$ , já que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1)$ .

(c) A função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1, \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

é contínua em  $x_0 = 1$ .

Seguem das propriedades de limite as seguintes propriedades das funções contínuas.

**Proposição 1.41.** Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas num ponto  $x_0$ . Então:

- (i)  $f + g$  é contínua em  $x_0$ ;
- (ii) se  $k \in \mathbb{R}$  temos  $kf$  contínua em  $x_0$ ;

(iii)  $f \cdot g$  é contínua em  $x_0$ ;

(iv) se  $g(x_0) \neq 0$  temos  $\frac{f}{g}$  contínua em  $x_0$ .

A definição precisa de **continuidade** para funções é a seguinte:

**Definição 1.42 (CONTINUIDADE).** Sejam  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $x_0 \in D_f$ . Então  $f$  é **contínua em  $x_0$**  se

dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que se  $|x - x_0| < \delta$  e  $x \in D_f$  então  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ,

ou seja,  $f$  é contínua num ponto  $x_0 \in D_f$  se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se  $A \subset D_f$ , diremos que  $f$  é **contínua em  $A$**  se  $f$  é contínua em todos os pontos de  $A$ . Quando  $f$  é contínua para todos os pontos de  $D_f$ , diremos simplesmente que  $f$  é **contínua**.

**Exemplo 1.43.**

- (a) A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$  é fixado, é uma função contínua em todo ponto  $x_0 \in \mathbb{R}$ , portanto  $f$  é contínua.
- (b) Toda função polinomial é contínua, pois é soma de funções contínuas.
- (c) A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 3x - 2$  é contínua.
- (d) Se  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante, a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = k$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  é contínua.
- (e)  $f(x) = |x|$  é contínua.
- (f) Se  $p(x)$  e  $q(x)$  são funções polinomiais (portanto, contínuas) então a função racional  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  é contínua, onde seu domínio é o conjunto  $D_f = \{x \in \mathbb{R}: q(x) \neq 0\}$ .

Os conceitos de limite e limite lateral nos permite reescrever a definição de continuidade para intervalos das formas  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  e  $[a, b]$ .

**Proposição 1.44 (CONTINUIDADE EM INTERVALOS).**

(i) Uma função  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{para todo } x \in (a, b).$$

(ii) Uma função  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se  $f$  for contínua em  $(a, b)$  e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

(iii) Uma função  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se  $f$  for contínua em  $(a, b)$  e

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

(iv) Uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se  $f$  for contínua em  $(a, b)$  e

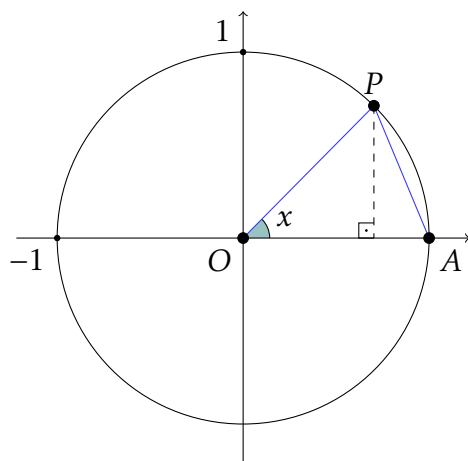
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

**Exemplo 1.45.** A função  $\sqrt{x}$  é contínua em  $[0, +\infty)$ .

## 1.6 Continuidade: mais propriedades e o Teorema do Valor Intermediário

**Teorema 1.46 (CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS).** As funções trigonométricas são contínuas.

*Demonstração.* Assumamos primeiro que  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  e consideremos a seguinte figura:



e assim temos

$$0 < \text{área}(\Delta OPA) < \text{área}(\text{setor OPA}),$$

ou seja

$$0 < \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} \quad \text{e portanto} \quad 0 < \sin x < x.$$

Se  $x < 0$ , temos  $-x > 0$  e podemos aplicar a desigualdade acima para  $-x$ , obtendo  $0 < \sin(-x) = -\sin x < -x = |x|$ . Daí  $-|x| < \sin x < |x|$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \pm|x| = 0$ , pelo Teorema do Confronto,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$  e como  $\sin(0) = 0$ , concluímos que a função seno é contínua em 0.

Em geral, para qualquer  $x_0$ , temos que

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = \left| 2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-x_0}{2} = 0$  temos  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) = 0$ , e pelo Teorema do Confronto obtemos  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin(x) - \sin(x_0)) = 0$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$ . Logo a função seno é contínua para todo  $x_0$ .

A prova da continuidade do cosseno é feita de maneira similar utilizando a igualdade  $\cos(x) - \cos(x_0) = -2 \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$ . A continuidade das outras funções trigonométricas seguem das propriedades das funções contínuas.  $\square$

Lembremos que quando dizemos que  $D_f$  é um **intervalo da reta**, isso quer dizer que existem  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  tais que  $D_f$  tem alguma das formas abaixo:

$$(a, b), \quad (a, b], \quad [a, b) \quad \text{ou} \quad [a, b].$$

Apresentamos, sem prova, o seguinte resultado para a continuidade de funções inversas.

**Teorema 1.47 (CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES INVERSAS).** Se  $f: D_f \rightarrow B$  é uma função contínua inversível, onde  $D_f$  é um intervalo da reta, então  $B$  também é um intervalo da reta e a inversa  $f^{-1}: B \rightarrow D_f$  de  $f$  também é contínua.

**Corolário 1.48 (CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARITMO).** As funções exponencial e logaritmo são contínuas.

*Demonstração.* Na Seção B.5 pode-se ver que a função exponencial  $a^x$  (para  $a > 0$  e  $a \neq 1$ ) é definida de forma a preencher os buracos no gráfico de  $a^x$ , onde  $x$  é racional. Em outras palavras, a função exponencial é contínua pela própria definição. Portanto, sua função inversa  $\log_a x$  também é contínua, pelo Teorema 1.47.  $\square$

**Exemplo 1.49.** A função  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$  é contínua em  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Uma propriedade importante das funções contínuas é enunciada no teorema a seguir e diz que a composta de funções contínuas é também uma função contínua.

**Teorema 1.50 (CONTINUIDADE DE FUNÇÕES COMPOSTAS).** Sejam  $g$  contínua em  $x_0 \in D_g$ ,  $g(x_0) \in D_f$  e  $f$  contínua em  $g(x_0)$ . Então  $h = f \circ g$  é contínua em  $x_0$ .

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , da definição de continuidade para  $f$  em  $g(x_0)$  segue que existe  $\eta > 0$  tal que se  $|y - g(x_0)| < \eta$  e  $y \in D_f$  então  $|f(y) - f(g(x_0))| < \varepsilon$ , isto é  $|f(y) - h(x_0)| < \varepsilon$ .

Para este  $\eta > 0$ , da definição de continuidade para  $g$  em  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x - x_0| < \delta$  e  $x \in D_g$  temos  $|g(x) - g(x_0)| < \eta$ . Portanto, se  $x \in D_h$  e  $|x - x_0| < \delta$  temos  $|g(x) - g(x_0)| < \eta$  e, tomando  $y = g(x)$  na definição de continuidade para  $f$  obtemos

$$|f(g(x)) - h(x_0)| < \varepsilon,$$

isto é,  $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ . Isto mostra que  $h$  é contínua em  $x_0$ . □

O resultado do teorema acima pode ser escrito de outra maneira, que nos ajudará na prática: se  $g$  é contínua em  $x_0$  e  $f$  é contínua em  $g(x_0)$  então vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(g(x_0)).$$

**Exemplo 1.51.** A função  $h(x) = \sin(x^2)$  é contínua pois  $h(x) = f(g(x))$ , onde  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = x^2$ , e tanto  $f$  quanto  $g$  são funções contínuas.

**Exemplo 1.52.** Qual o maior subconjunto de  $\mathbb{R}$  onde a função  $h(x) = \ln(1 + \cos x)$  é contínua?

**SOLUÇÃO.** Temos  $h(x) = f(g(x))$ , onde  $f(x) = \ln x$  e  $g(x) = 1 + \cos x$  que são funções contínuas. Portanto, pelo Teorema  $h(x)$  é contínua onde está definida. Agora  $\ln(1 + \cos x)$  está definida quando  $1 + \cos x > 0$ . Assim, não está definida quando  $\cos x = -1$ , ou seja, quando  $x = (2n + 1)\pi$  para  $n \in \mathbb{Z}$ .

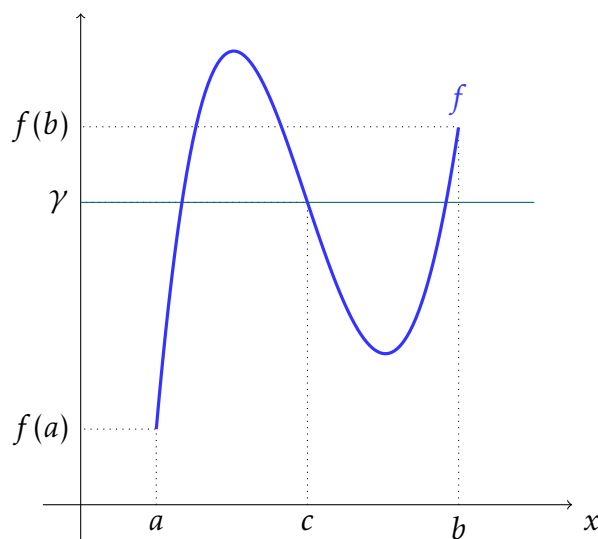
**Exemplo 1.53.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x^2 - 4)$ , sabendo que  $g$  é uma função contínua.

**SOLUÇÃO.** Como  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4) = -3$ , sabendo que  $g$  é contínua temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x^2 - 4) = g\left(\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4)\right) = g(-3).$$

**Teorema 1.54 (TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO).** Se  $f$  for contínua e se  $\gamma$  pertencer ao intervalo aberto de extremos  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existirá  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = \gamma$ .

O Teorema 1.54 é chamado normalmente de **TVI**. Ele estabelece que uma função contínua assume todos os valores intermediários entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Geometricamente, o TVI diz que se for dada uma reta horizontal qualquer  $y = \gamma$  entre  $y = f(a)$  e  $y = f(b)$ , como mostra a figura abaixo, então o gráfico de  $f$  intercepta a reta  $y = \gamma$  *pelo menos uma vez*.

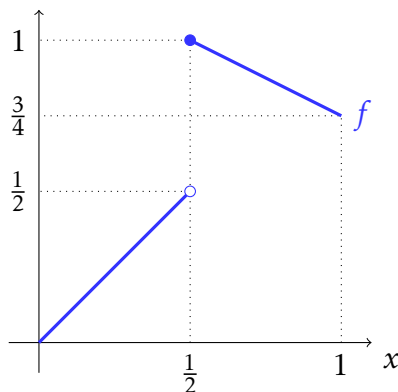


Observe que o TVI não é verdadeiro em geral para funções descontínuas.

**Exemplo 1.55.** Considere a função  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -\frac{x}{2} + \frac{5}{4} & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

O gráfico de  $f$  é dado abaixo:



Note que se  $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{3}{4}$  então **não existe**  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = \gamma$ , ou seja, a conclusão do TVI não é válida nesse caso, justamente porque  $f$  não é contínua.

Como um caso particular do TVI temos o:

**Teorema 1.56 (TEOREMA DO ANULAMENTO).** Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua e  $f(a)f(b) < 0$  (isto é,  $f(a)$  e  $f(b)$  têm sinais contrários) então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

Uma aplicação do teorema é a localização de zeros de uma função.

**Exemplo 1.57.** Mostre que  $x^3 - 4x + 8 = 0$  tem pelo menos uma solução real.

**SOLUÇÃO.** Seja  $f(x) = x^3 - 4x + 8$ . Temos que  $f$  é uma função contínua e como  $f(0) = 8 > 0$  e  $f(-3) = -7$ , o Teorema do Anulamento nos dá um  $c \in (-3, 0)$  tal que  $f(c) = 0$ , ou seja,  $c$  é uma solução da equação.

**Exemplo 1.58.** Existe algum número real que é exatamente um a mais que seu cubo?

**SOLUÇÃO.** Queremos encontrar uma solução real para a equação  $x = x^3 + 1$ . Defina  $f(x) = x^3 + 1 - x$ . Como  $f$  é uma função polinomial, ela é contínua. Além disso,  $f(0) = 1 > 0$  e  $f(-2) = -9 < 0$ . Segue então do Teorema do Anulamento que existe  $c \in (-2, 0)$  tal que  $f(c) = 0$ , ou seja,  $c = c^3 + 1$ .

**Exemplo 1.59.** A equação  $2 \operatorname{tg} x - x = 1$  tem alguma solução real?

**SOLUÇÃO.** Defina  $f(x) = 2 \operatorname{tg} x - x - 1$ . Note que no intervalo  $[0, \frac{\pi}{4}]$  a função  $f$  é contínua, pois é soma de funções contínuas. Veja também que  $f(0) = -1 < 0$  e  $f(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ . Logo, do Teorema do Anulamento existe  $c \in (0, \frac{\pi}{4})$  tal que  $f(c) = 0$ , isto é,  $2 \operatorname{tg}(c) - c = 1$ .

**Teorema 1.60 (TEOREMA DE WEIERSTRASS).** Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua, então existirão  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Neste caso, dizemos que  $f(x_1)$  é um **valor mínimo** de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  e  $f(x_2)$  é um **valor máximo** em  $[a, b]$ . O Teorema de Weierstrass diz que, se  $f$  for contínua em um intervalo fechado e limitado, então  $f$  assumirá os valores máximo e mínimo neste intervalo.

Se o intervalo não for limitado o Teorema de Weierstrass não vale necessariamente, por exemplo,  $f(x) = x^3$  não é limitada em  $[0, +\infty)$ . Se o intervalo não for fechado, o resultado também pode não ser válido, por exemplo, a função identidade  $f(x) = x$  não possui valor máximo nem valor mínimo em  $(0, 2)$ . Se a função não for contínua, o resultado também não vale necessariamente, por exemplo, considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 1 \\ x & \text{se } 1 < x < 3 \\ 2 & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Como uma consequência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado:

**Corolário 1.61.** Sejam  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua,  $m = \min\{f(x): x \in [a, b]\}$  e  $M = \max\{f(x): x \in [a, b]\}$ . Então  $Im(f) = f([a, b]) = [m, M]$ .

## 1.7 Indeterminações e limites infinitos

Consideremos a função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Quando  $x$  se aproxima de 0, a função  $x^2$  também se aproxima de 0 (por valores positivos) e  $\frac{1}{x^2}$  fica muito grande. De fato, os valores de  $f(x)$  podem ficar arbitrariamente grandes, desde que tomemos valores de  $x$  cada vez mais próximos de 0. Para indicar este comportamento usamos a notação

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

**Noção Intuitiva.** Sejam  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $x_0$  um ponto no fecho de  $D_f$ .

(i) Dizemos que **o limite de  $f(x)$  é infinito quando  $x$  tende a  $x_0$** , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty,$$

se podemos fazer os valores de  $f(x)$  ficarem arbitrariamente grandes tomando valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0$ .

(ii) Dizemos que **o limite de  $f(x)$  é menos infinito quando  $x$  tende a  $x_0$** , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

se podemos fazer os valores de  $f(x)$  ficarem arbitrariamente grandes e negativos, tomando valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0$ .

(iii) As definições no caso de limites laterais infinitos seguem análogas ao caso real.

**Exemplo 1.62.** Determine  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x-3}$  e  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{x-3}$ .

**SOLUÇÃO.** Para valores  $x > 3$  próximos de 3,  $x - 3$  é um número positivo muito pequeno, e  $\frac{2}{x-3}$  é um número positivo grande. Então intuitivamente  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty$ . Analogamente, vemos que  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{x-3} = -\infty$ .

**Definição 1.63 (LIMITES INFINITOS).** Sejam  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $x_0$  um ponto no fecho de  $D_f$ . Então dizemos que:

(a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  se dado  $K > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > K$  para todo  $0 < |x - x_0| < \delta$ ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  se dado  $K < 0$  existir  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < K$  para todo  $0 < |x - x_0| < \delta$ .

**Exemplo 1.64.** Prove que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .

**SOLUÇÃO.** Dado  $K > 0$  devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{1}{x} > K \quad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta,$$

ou seja

$$x < \frac{1}{K} \quad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta.$$

Isto sugere que devemos tomar  $\delta = \frac{1}{K}$ . De fato se  $K > 0$  é dado, escolha  $\delta = \frac{1}{K}$ . Se  $0 < x < \delta$ , então

$$0 < x < \delta \quad \text{implica que} \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = K,$$

o que mostra que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .

**Proposição 1.65 (Propriedades dos Limites Infinitos).** Seja  $L$  um número real. Temos as seguintes propriedades para os limites infinitos:

1. Se  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \end{cases}$  então  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$
2. Se  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \end{cases}$  então  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = +\infty, \text{ se } L > 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = -\infty, \text{ se } L < 0 \end{cases}$
3. Se  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \end{cases}$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = -\infty$
4. Se  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \end{cases}$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = +\infty$
5. Se  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \end{cases}$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = -\infty$
6. Se  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \end{cases}$  então  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$
7. Se  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \end{cases}$  então  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = -\infty, \text{ se } L > 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = +\infty, \text{ se } L < 0. \end{cases}$

As propriedades acima são válidas se, em lugar de  $\rightarrow x_0$ , usarmos  $x \rightarrow x_0^+$  ou  $x \rightarrow x_0^-$ . Tais propriedades nos dizem como operar com os símbolos  $+\infty$  e  $-\infty$ .

Temos as seguintes **indeterminações**:

$$+\infty - \infty, \quad -\infty - (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad (\pm\infty)^0.$$

**Exemplo 1.66.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{1}{x^2} = 1 \cdot +\infty = +\infty.$$

A seguinte proposição será útil para calcular limites.

**Proposição 1.67.** Suponha que  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0$  e que existe  $r > 0$  tal que  $f(x) > 0$  (respectivamente  $f(x) < 0$ ) para  $0 < |x - x_0| < r$ . Então,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$  (respectivamente  $-\infty$ ).

Vale um resultado análogo para  $x \rightarrow x_0^+$  e para  $x \rightarrow x_0^-$ .

**Exemplo 1.68.** Calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}.$$

**SOLUÇÃO.** Temos  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)$ ,  $x-1 > 0$  para  $x > 1$  e  $x-1 < 0$  para  $x < 1$ . Portanto

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \quad \text{não existe.}$$

**Exemplo 1.69.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} \frac{x^2 + 3x}{x+2} = +\infty \cdot \frac{5}{2} = +\infty.$$

**Exemplo 1.70.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2}$ . Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} (x^2 + x + 1) = -\infty \cdot 3 = -\infty.$$

## 1.8 Limites no infinito

Vamos analisar o comportamento de uma função  $f(x)$  quando os valores de  $x$  ficam arbitrariamente grandes. Consideremos a função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ . Então  $f(x)$  assume os seguintes valores:

| $x$  | $f(x)$  |
|------|---------|
| 0    | -1      |
| 1    | 0       |
| 10   | 0,98    |
| 100  | 0,9998  |
| 1000 | 0,99999 |

Observemos que, quando tomamos valores muito grandes para a variável  $x$ , os valores de  $f(x)$  se aproximam de 1. Este fato pode ser denotado da seguinte forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

### Noção Intuitiva

(a) Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $(a, +\infty)$ , para algum  $a \in \mathbb{R}$ . Então dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

se podemos fazer com que os valores de  $f(x)$  fiquem arbitrariamente próximos de  $L$ , tomando valores suficientemente grandes da variável  $x$ .

(b) Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $(-\infty, a)$ , para algum  $a \in \mathbb{R}$ . Então dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

se podemos fazer com que os valores de  $f(x)$  fiquem arbitrariamente próximos de  $L$ , tomando valores suficientemente grandes da variável  $x$  em valor absoluto, mas negativos.

Podemos estabelecer a definição precisa de limite no infinito.

#### Definição 1.71 (LIMITES NO INFINITO).

- (a) Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo  $(a, +\infty)$ . Então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  para todo  $x > R$ .
- (b) Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo  $(-\infty, a)$ . Então  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $R < 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  para todo  $x < R$ .

**Exemplo 1.72.** Temos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

**SOLUÇÃO.** Dado  $\varepsilon > 0$ , queremos achar  $R > 0$  suficientemente grande tal que

$$x > R > 0 \text{ implica que } |f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Tomando  $R = \frac{1}{\varepsilon} > 0$  temos

$$x > R > 0 \text{ implica que } 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{R} = \varepsilon.$$

Portanto, segue da definição que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . A prova para  $x \rightarrow -\infty$  é análoga.

As propriedades de limites são também válidas se  $x \rightarrow x_0$  for substituído por  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ .

**Exemplo 1.73.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n}$  onde  $n$  é um inteiro positivo.

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right)^n = 0.$$

Em geral, temos que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0$  onde  $r$  é um número real positivo.

**Exemplo 1.74.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right)}{x^5 \left( 2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}}{2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Um cálculo análogo mostra que o limite, quando  $x \rightarrow -\infty$ , também é  $\frac{1}{2}$ .

**IMPORTANTE:** a estratégia para calcular limites no infinito de uma função racional consiste em colocar em evidência a mais alta potência de  $x$  no denominador e numerador.

**Exemplo 1.75.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{\sin x}{x} \right)$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$  para  $x > 0$ . Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  segue do Teorema do Confronto que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ . Portanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2 + 0 = 2.$$

## Limites infinitos no infinito

Utilizamos a notação

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

para indicar que podemos fazer os valores de  $f(x)$  ficarem tão grandes quanto desejarmos, desde que tomemos valores grandes para a variável  $x$ . De forma análoga utilizamos as notações

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

**Exemplo 1.76.** Encontre  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$ .

**SOLUÇÃO.** Quando  $x$  torna-se grande,  $x^2$  também fica muito grande. Por exemplo,  $10^2 = 100$ ,  $100^2 = 10.000$ ,  $1000^2 = 1.000.000$ . Portanto vemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ .

Podemos estabelecer a definição precisa de limites infinitos no infinito.

**Definição 1.77 (LIMITES INFINITOS NO INFINITO).** Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $(a, +\infty)$  para algum  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  se dado  $K > 0$  existir  $R > 0$  tal que  $f(x) > K$  sempre que  $x > R$ ;
- (b) Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  se, dado  $K < 0$ , existir  $R > 0$  tal que  $f(x) < K$  sempre que  $x > R$ .

Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $(-\infty, a)$  para algum  $a \in \mathbb{R}$ .

- (c) Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  se dado  $K > 0$  existir  $R < 0$  tal que  $f(x) > K$  sempre que  $x < R$ ;
- (d) Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  se, dado  $K < 0$ , existir  $R < 0$  tal que  $f(x) < K$  sempre que  $x < R$ .

Todas as propriedades de limites infinitos dadas continuam válidas se substituirmos  $x \rightarrow x_0$  por  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ . Além disso temos as mesmas **indeterminações**:

$$+\infty - \infty, \quad -\infty - (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad (\pm\infty)^0.$$

**Exemplo 1.78.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que temos uma indeterminação da forma  $+\infty - \infty$ . Não podemos aplicar a propriedade da soma. Contudo, podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - 1) = +\infty \cdot +\infty = +\infty.$$

**Exemplo 1.79.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty.$$

**Exemplo 1.80.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{1 - 2x^2}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{1 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - 2\right)} = (-\infty) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = +\infty.$$

**Exemplo 1.81.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1}$ .

**SOLUÇÃO.** Escrevemos  $\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1} = e^{(x+1)\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)}$ . Agora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right) = +\infty \cdot -\infty = -\infty,$$

e como a função exponencial é contínua

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x+1)\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) = 0.$$

## 1.9 Assíntotas

**Definição 1.82 (Assíntota Vertical).** A reta  $x = x_0$  é chamada de **assíntota vertical** da função  $f$  se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$

**Exemplo 1.83.** A reta  $x = 3$  é assíntota vertical de  $f(x) = \frac{2}{x-3}$ .

**SOLUÇÃO.** Note que  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ . Além disso, temos também  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ .

As assíntotas verticais podem aparecer em pontos nos quais a função é descontínua, e também em pontos de acumulação de  $D_f$ .

Note que se  $f$  é contínua num ponto  $x_0$  então  $x = x_0$  não é uma assíntota vertical de  $f$ , uma vez que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  e, portanto, nenhuma das condições da Definição 1.82 está satisfeita. Com isso em mente, o seguinte resultado é bastante útil.

**Proposição 1.84.** Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então  $f$  não possui assíntotas verticais.

Note que no resultado acima estamos pedindo que  $f$  esteja definida e seja contínua em toda a reta real  $\mathbb{R}$ .

**Definição 1.85 (Assíntota Horizontal).** A reta  $y = L$  é chamada de:

(a) **assíntota horizontal em  $+\infty$**  da função  $f$  se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

(b) **assíntota horizontal em  $-\infty$**  da função  $f$  se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

**Exemplo 1.86.** Encontre as assíntotas horizontais de  $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x + 5}$ .

**SOLUÇÃO.** Considerando  $x \rightarrow +\infty$  temos  $x > 0$  e assim

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(2 + \frac{1}{x^2})}}{x(3 + \frac{5}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x(3 + \frac{5}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{3 + \frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Agora considerando  $x \rightarrow -\infty$  temos  $x < 0$  e assim

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x(3 + \frac{5}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{3 + \frac{5}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Logo a reta  $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$  é assíntota em  $+\infty$  e  $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$  é assíntota em  $-\infty$  para  $y = f(x)$ .

**Definição 1.87 (Assíntota Oblíqua).** A reta  $y = mx + n$  é chamada de:

(a) **assíntota oblíqua em  $+\infty$**  da função  $f$  se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

(b) **assíntota oblíqua em  $-\infty$**  da função  $f$  se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Note que toda assíntota horizontal  $y = L$  de  $f$  é também uma assíntota oblíqua (com  $m = 0$  e  $n = L$ ). Assim, se você encontrou uma assíntota horizontal de  $f$  em  $+\infty$  (ou em  $-\infty$ ) não é necessário tentar encontrar assíntota oblíqua em  $+\infty$  (ou em  $-\infty$ ), pois ela coincidirá com a assíntota horizontal já encontrada.

**Exemplo 1.88.** Determine todas as assíntotas (verticais, horizontais e oblíquas) da função  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ .

**SOLUÇÃO.** Note que  $f$  está definida e é contínua para todo  $x \in \mathbb{R}$ , pois  $x^2 + 1 \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Segue então da Proposição 1.84  $f$  não possui assíntotas verticais.

Além disso veja que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  e, portanto, não há assíntotas horizontais. Escrevemos

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1},$$

então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0.$$

Portanto, a reta  $y = x$  é uma assíntota oblíqua de  $f$  tanto em  $+\infty$  quanto em  $-\infty$ .

#### PROCEDIMENTO PARA DETERMINAR ASSÍNTOTAS OBLÍQUAS/HORIZONTAIS:

**Passo 1:** Primeiro determine  $m$ , caso exista, através do limite

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Se  $m$  não for um número real (isto é, se o limite não existe) então  $f$  não possui assíntota oblíqua em  $+\infty$ . Se  $m$  for um número real, vá para o Passo 2.

**Passo 2:** Determine  $n$ , caso exista, através do limite

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx].$$

Se  $n$  não for um número real (isto é, se o limite não existe) então  $f$  não possui assíntota oblíqua em  $+\infty$ . Se  $n$  for um número real então  $y = mx + n$  será assíntota em  $+\infty$ . No caso em que  $m = 0$ , a assíntota oblíqua é também a assíntota horizontal de  $f$ .

Repita o procedimento para  $x \rightarrow -\infty$  para encontrar a assíntota em  $-\infty$ .

**Exemplo 1.89.** Determine todas as assíntotas de  $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$ .

**SOLUÇÃO.** Veja que  $D_f = \mathbb{R}$  (pois  $4x^2 + x + 1 \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ) e  $f$  é contínua. Segue então da Proposição 1.84 que  $f$  não possui assíntotas verticais. Como

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

$f$  não possui assíntotas horizontais.

Aplicamos o procedimento para determinar as assíntotas oblíquas (se existirem) de  $f$ . Primeiro faremos em  $+\infty$ .

**Passo 1.** Calculemos  $m$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{|x|\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2.$$

Como  $m = 2$  é um número real, passamos ao Passo 2.

**Passo 2.** Calculemos  $n$ :

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, como  $n = \frac{1}{4}$  é um número real, a reta  $y = mx + n = 2x + \frac{1}{4}$  é assíntota oblíqua de  $f$  em  $+\infty$ .

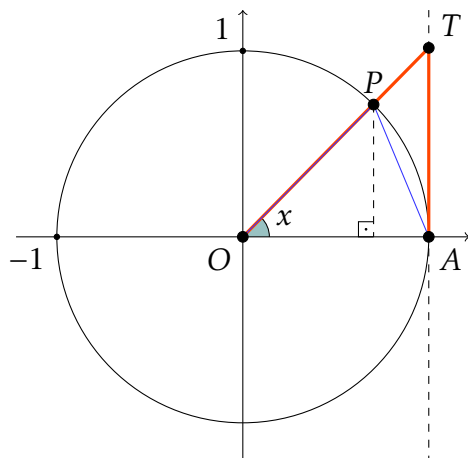
Repetindo o procedimento para  $-\infty$ , vemos que  $y = -2x - \frac{1}{4}$  é assíntota oblíqua de  $f$  em  $-\infty$ .

## 1.10 Limites Fundamentais

**Teorema 1.90 (O PRIMEIRO LIMITE FUNDAMENTAL).** Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

*Demonstração.* Como na demonstração da continuidade das funções trigonométricas, iremos considerar seguinte figura para um ângulo  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ :



Temos

$$0 < \text{área}(\triangle OPA) < \text{área}(\text{setor OPA}) < \text{área}(\triangle OTA),$$

ou seja

$$0 < \frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg } x}{2} \quad \text{e portanto} \quad 0 < \text{sen } x < x < \text{tg } x.$$

Dividindo essa desigualdade por  $\text{sen } x$  (que é positivo, então a desigualdade não se altera) obtemos

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

e, conseqüentemente, invertendo as desigualdades, obtemos

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1. \quad (1.2)$$

Por outro lado, se  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , aplicando (1.2) a  $-x$ , (note que agora  $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ ) obtemos

$$\cos(-x) < \frac{\text{sen}(-x)}{-x} < 1.$$

Utilizando o fato de que o cosseno é uma função par (isto é,  $\cos(-x) = \cos x$ ) e o seno é uma função ímpar (isto é,  $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$ ) obtemos

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1 \quad \text{para todo } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

□

**Exemplo 1.91.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{x}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{5x} \stackrel{u=5x}{=} 5 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u} = 5.$$

**Exemplo 1.92.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

**Exemplo 1.93.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(2x)}{x}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} = 2.$$

**Exemplo 1.94.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.95.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**SOLUÇÃO.** Fazendo  $u = \frac{1}{x}$ , temos  $u \rightarrow 0^+$  quando  $x \rightarrow +\infty$ . Portanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } u}{u} = 1.$$

**Exemplo 1.96.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^4}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = 1 \cdot +\infty = +\infty.$$

A seguir apresentamos, sem prova, o Segundo Limite Fundamental. A demonstração de tal resultado necessita do auxílio da teoria de séries numéricas, e o leitor interessado pode consultar a seção “The number  $e$ ” no livro [3]. Mais adiante, quando aprendermos a *Regra de L'Hospital* apresentaremos uma prova alternativa para esse limite.

**Proposição 1.97 (SEGUNDO LIMITE FUNDAMENTAL).** Temos

$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Usando este limite iremos calcular outros, que serão úteis mais adiante.

**Exemplo 1.98.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

**SOLUÇÃO.** Fazendo  $t = -x - 1$ , isto é,  $x = -(t + 1)$ , temos

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)^{-t-1} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(\frac{t+1}{t}\right).$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$  temos  $t \rightarrow +\infty$ , logo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(\frac{t+1}{t}\right) = e.$$

**Exemplo 1.99.**  $\lim_{h \rightarrow 0^+} (1 + h)^{1/h} = e.$

**SOLUÇÃO.** Fazendo  $h = \frac{1}{x}$ , temos  $h \rightarrow 0^+$  quando  $x \rightarrow +\infty$ . Logo

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (1 + h)^{1/h} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Analogamente, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} (1 + h)^{1/h} = e,$$

e, combinados, esses limites nos dão:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} = e.$$

Uma das maneiras de se definir o número  $e$  é defini-lo como sendo o valor do limite acima, e essa definição dá exatamente o mesmo valor do que a definição apresentada em [3] (ainda bem, pois se não, não seria uma definição muito boa!).

**Exemplo 1.100.**  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

**SOLUÇÃO.** Fazendo  $u = e^h - 1$  ou  $h = \ln(1 + u)$  temos

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(u + 1)} = \frac{1}{\ln(u + 1)^{\frac{1}{u}}}.$$

Para  $h \rightarrow 0$  temos  $u \rightarrow 0$ , e assim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(u + 1)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Um caso mais geral do que o exemplo anterior é o seguinte:

**Exemplo 1.101.** Se  $a > 0$  e  $a \neq 1$  então  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$ .

**SOLUÇÃO.** Fazendo  $u = a^h - 1$  ou  $h = \frac{\ln(1+u)}{\ln a}$  temos

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{u \ln a}{\ln(u + 1)} = \frac{\ln a}{\ln(u + 1)^{\frac{1}{u}}}.$$

Para  $h \rightarrow 0$  temos  $u \rightarrow 0$  e assim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(u + 1)^{\frac{1}{u}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a.$$



# Capítulo 2

## Derivadas

### 2.1 Reta tangente e velocidade instantânea

Consideremos  $f$  uma função com  $x_0 \in D_f$  e consideremos a seguinte questão: é possível encontrar uma equação para a **reta tangente** ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$ ?

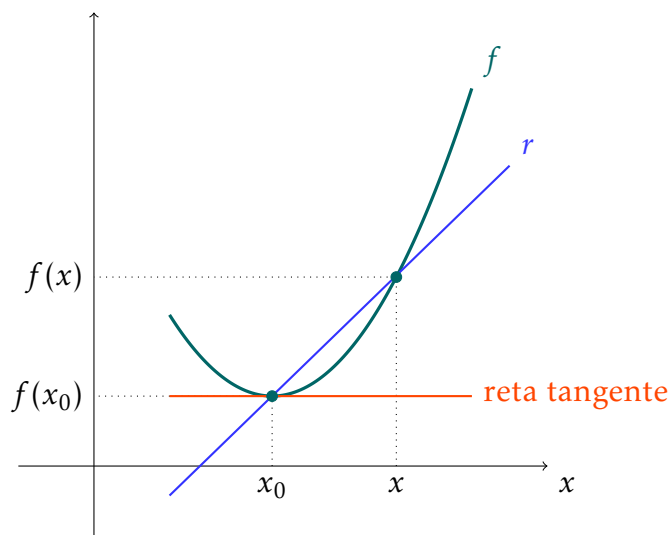
Para responder a essa pergunta, precisamos primeiro entender *o que é* a reta tangente. Grossoiramente falando, a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$  é a reta que *somente toca* o gráfico de  $f$  nesse ponto, sem cruzá-lo. Gottfried Wilhelm Leibniz, matemático alemão considerado um dos pais do Cálculo (juntamente com Isaac Newton), definiu a reta tangente a uma curva plana num dado ponto  $(x_0, y_0)$  como sendo a reta que passa por  $(x_0, y_0)$  e um outro ponto da curva  $(x, y)$  que está *arbitrariamente próximo* de  $(x_0, y_0)$ . Essa expressão “arbitrariamente próximo” nos lembra dos limites, não?

Vamos então tentar usar o conceito de limites para tentar encontrar uma expressão pra reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$ , onde  $x_0 \in D_f$ . Sabemos da Geometria Analítica Plana, que uma reta que passa por  $(x_0, f(x_0))$  tem equação dada por

$$y - f(x_0) = m(x - x_0),$$

onde  $m$  é o *coeficiente angular* dessa dada reta. Nossa tarefa então é calcular o valor (se possível) desse coeficiente angular  $m$ .

Para isso, seguiremos a definição de Leibniz: consideramos a reta que passa por  $(x_0, f(x_0))$  e um outro ponto  $(x, f(x))$  do gráfico de  $f$ , como na figura abaixo:



Sabemos, da Geometria Analítica Plana, que o coeficiente angular da reta  $r$ , que chamaremos de  $m_x$  (pois muda quando  $x$  muda), é dado por

$$m_x = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Note que, quando fazemos  $x$  arbitrariamente próximo de  $x_0$  (ou seja, quando  $x \rightarrow x_0$ ) o coeficiente angular  $m_x$  da reta  $r$  fica arbitrariamente próximo do coeficiente angular  $m$  da reta. Tal afirmação, escrita matematicamente, fica

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} m_x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Observação:** note que nem sempre é possível encontrar  $m$ , pois o limite acima pode não existir. Nesse caso, não é possível definir a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$ .

Quando conseguimos calcular  $m$ , isto é, quando o limite acima existe, dizemos que  $f$  é **diferenciável em  $x_0$**  e escrevemos  $m = f'(x_0)$ , ou seja

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

e o valor  $f'(x_0)$  é chamado de **derivada de  $f$  em  $x_0$** . Com isso, podemos fazer a seguinte definição:

**Definição 2.1 (RETA TANGENTE).** Sejam  $f$  uma função e  $x_0 \in D_f$ , com  $f$  diferenciável em  $x_0$ . A **reta tangente** ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$  é a reta de equação

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Em muito lugares, quando a função  $f$  é conhecida, nos referimos ao ponto  $(x_0, f(x_0))$  como o **ponto de abscissa  $x_0$** .

**Exemplo 2.2.** Seja  $f(x) = 2x^2 - 3$ . Determine a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  nos pontos de abscissas 0 e 2.

**SOLUÇÃO.** Vejamos se é possível calcular  $f'(0)$ . Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0,$$

assim  $f'(0) = 0$ , e a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 0 (que é o ponto  $(0, f(0)) = (0, -3)$ ) é dada por

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \implies y - (-3) = 0 \cdot x \implies y = -3.$$

Note que esta é uma reta horizontal.

Para o ponto de abscissa 2 (que é o ponto  $(2, f(2)) = (2, 5)$ ) temos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} 2(x + 2) = 8.$$

Portanto  $f'(2) = 8$  e a reta tangente tem equação

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \implies y - 5 = 8(x - 2) \implies y = 8x - 11.$$

**Exemplo 2.3.** Determine a equação da reta que é

- tangente ao gráfico de  $f(x) = 2x^2 - 3$ ;
- paralela à reta  $y = 2x + 3$ .

**SOLUÇÃO.** Sabemos da Geometria Analítica Plana que duas retas são paralelas se e só se seus coeficientes angulares são iguais. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  num ponto de abscissa  $x_0$  é  $f'(x_0)$ , já o coeficiente angular da reta  $y = 2x + 3$  é 2. Assim, nosso trabalho é encontrar o ponto  $x_0$  (ou os pontos, pois pode haver mais de um) tal que  $f'(x_0) = 2$ .

Para isso, calculemos  $f'(x_0)$  para um ponto  $x_0$  qualquer. Temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 3 - (2x_0^2 - 3)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 2(x + x_0) = 4x_0.$$

Portanto  $f'(x_0) = 4x_0$  para qualquer que seja  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Logo, queremos encontrar  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $4x_0 = 2$ , isto é,  $x_0 = \frac{1}{2}$ . Portanto, estamos buscando a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $\frac{1}{2}$ , que tem equação

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \implies y + \frac{5}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \implies y = 2x - \frac{7}{2}.$$

Vamos agora focar em outro problema: seja  $s$  uma função que descreve a posição de uma partícula sobre uma linha reta, em função do tempo  $t$ . Dito de outra maneira, para cada instante de tempo  $t$  real, a partícula se encontra na posição  $s(t)$  da reta real. A **velocidade média**  $v_m$  dessa partícula, entre dois instantes  $t_0$  e  $t$  é dada por

$$v_m = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Sabendo disso, como podemos encontrar a **velocidade instantânea**  $v(t_0)$  dessa partícula no instante  $t_0$ ? Pensando um pouco, não é difícil ver que podemos calcular  $v(t_0)$  calculando a velocidade média  $v_m$  da partícula entre os instantes  $t_0$  e  $t$ , e fazer com que  $t$  fique *arbitrariamente próximo* de  $t_0$ . Ou seja a **velocidade instantânea** (ou simplesmente **velocidade**) da partícula no instante  $t_0$  é dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Nesse caso, quando esse limite existe, vemos que a velocidade é a **derivada** da função posição da partícula.

## 2.2 Derivada: definição

**Definição 2.4.** Sejam  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $x_0 \in D_f$ .

(a) Dizemos que  $f$  é **diferenciável em  $x_0$**  (ou **derivável em  $x_0$** ) quando o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe;

(b) Quando  $f$  é diferenciável em  $x_0$ , definimos

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

e  $f'(x_0)$  é chamada de **derivada de  $f$  em  $x_0$** ;

(c) se  $A \subset D_f$  e  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $A$ , diremos que  $f$  é **diferenciável (derivável) em  $A$** ;

(d) quando  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $D_f$ , diremos simplesmente que  $f$  é **diferenciável (derivável)**.

**Observação:** veja que, fazendo a mudança de variável  $h = x - x_0$  no limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  obtemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Isso significa que podemos usar qualquer um dos dois limites acima (pois são iguais) para calcular a derivada de  $f$  em  $x_0$ . É bom saber dessas duas opções, pois a escolha entre uma forma ou outra pode facilitar a visualização de como calcular a derivada.

**Exemplo 2.5.** Seja  $f(x) = 7x^3$ . Mostre que  $f$  é diferenciável e calcule  $f'(x_0)$  para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**SOLUÇÃO.** Seja  $x_0 \in \mathbb{R}$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{7x^3 - 7x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{7(x^3 - x_0^3)}{x - x_0}.$$

Como  $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$ , obtemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{7(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 7(x^2 + xx_0 + x_0^2) = 21x_0^2.$$

Portanto, como esse limite existe,  $f$  é diferenciável em  $x_0$  e  $f'(x_0) = 21x_0^2$  para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Observação:** para ilustrar a “diferença” ao usarmos uma das duas possíveis maneiras de se calcular a derivada, faremos esse exemplo usando também o segundo limite. Veja que, nesse caso, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7(x_0 + h)^3 - 7x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7[(x_0 + h)^3 - x_0^3]}{h}.$$

Aqui, ao invés de usarmos a fatoração como acima, usamos que  $(x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3$ , e obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{21x_0^2h + 31x_0h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (21x_0^2 + 31x_0h + h^2) = 21x_0^2.$$

Claramente chegamos à mesma conclusão, porém por caminhos distintos. Vai de você analisar, em cada caso, qual dos limites parece mais fácil de ser resolvido!

**Exemplo 2.6.** Mostre que  $f(x) = |x|$  não é diferenciável em  $x_0 = 0$ .

**SOLUÇÃO.** Como  $f(x) = |x|$  tem comportamentos distintos para  $x > 0$  e  $x < 0$ , precisaremos recorrer aos limites laterais. Como  $f(x) = x$  para  $x > 0$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Para  $x < 0$  temos  $f(x) = -x$ , e assim

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 = -1.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

não existe, o que mostra que  $f$  não é diferenciável em  $x_0 = 0$ .

## 2.3 Derivadas laterais

Assim como os limites laterais, temos as **derivadas laterais**.

**Definição 2.7 (DERIVADAS LATERAIS).** Sejam  $f$  uma função e  $x_0 \in D_f$ .

(a) **Derivada lateral à esquerda.** Dizemos que  $f$  é **diferenciável (derivável) à esquerda em  $x_0$**  se o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, e nesse caso, seu valor é denotado por  $f'_-(x_0)$  e é chamado de **derivada à esquerda de  $f$  em  $x_0$** ;

(b) **Derivada lateral à direita.** Dizemos que  $f$  é **diferenciável (derivável) à direita em  $x_0$**  se o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, e nesse caso, seu valor é denotado por  $f'_+(x_0)$  e é chamado de **derivada à direita de  $f$  em  $x_0$** ;

Como no caso de limites, vemos que  $f$  é diferenciável em  $x_0$  se, e somente se,  $f$  é diferenciável à esquerda e à direita em  $x_0$  e as derivadas laterais são iguais.

## 2.4 Diferenciabilidade e continuidade

O seguinte teorema estabelece uma relação entre continuidade e diferenciabilidade.

**Teorema 2.8.** Se  $f$  for diferenciável em  $x_0 \in D_f$  então  $f$  será contínua em  $x_0$ .

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Note que, para  $x \neq x_0$ , temos

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0), \end{aligned}$$

o que mostra que  $f$  é contínua em  $x_0$ . □

Note que não vale a implicação contrária desse resultado, isto é, uma função  $f$  pode ser contínua num ponto  $x_0$  sem que  $f$  seja diferenciável em  $x_0$ . A função  $f(x) = |x|$  do Exemplo 2.6 é contínua em  $x = 0$  mas não é diferenciável em  $x = 0$ .

Esse resultado nos dá um critério de **não diferenciabilidade**:

$f$  não é contínua em  $x_0$  então  $f$  não é diferenciável em  $x_0$ .

**Exemplo 2.9.** A função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1, \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é diferenciável em  $x = 1$ ?

**SOLUÇÃO.** Como o  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ , a função  $f$  não é contínua em  $x = 1$ , logo não é diferenciável em  $x = 1$ .

## 2.5 Derivada como uma função

Nas seções anteriores, calculamos a derivada de uma função  $f$  num ponto fixado  $x_0$  de seu domínio  $D_f$ . Queremos definir o que chamaremos de **derivada de  $f$** , ou seja, queremos ver a derivada como uma operação entre funções. Para isso, definimos

$$D_{f'} = \{x \in D_f : f \text{ é diferenciável em } x\},$$

e a função  $f' : D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada de **derivada de  $f$**  é a função que a cada ponto  $x \in D_{f'}$  associa a derivada  $f'(x)$  de  $f$  em  $x$ .

Aqui não há segredos nem nada complicado, só estamos trocando o número fixo  $x_0$  do limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

por uma variável  $x$ , ou seja,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

A **derivada de  $f$**  é então uma *função*. Veja que para calcular precisamente  $f'$ , precisamos encontrar  $D_{f'}$  e  $f'(x)$  para cada  $x \in D_{f'}$ .

**Exemplo 2.10.** Calcule a derivada de  $f(x) = \sqrt{x-1}$ .

**SOLUÇÃO.** Veja que o domínio  $D_f$  da função  $f$  é o intervalo  $[1, +\infty)$ . Para  $x \geq 1$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-1) - (x-1)}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

Aqui, temos que tomar o seguinte cuidado: assumimos que  $x \geq 1$ , mas veja que a última passagem **não** é vlálida para  $x = 1$ , pois nesse caso o limite não existe.

Assim,  $f$  é diferenciável somente para  $x > 1$ , isto é,  $D_{f'} = (1, +\infty)$  e para  $x > 1$  temos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

A derivada  $f'$  de  $f$  é também chamada de **derivada primeira de  $f$**  ou de **derivada de ordem 1 de  $f$**  (a escolha desses nomes se dá pelo fato de que, mais adiante, veremos derivadas de ordens superiores de  $f$ ).

*Notações alternativas.* Temos outras maneira de denotar a derivada de  $f$  num ponto  $x$ , a saber:

$$f'(x), \quad \frac{df}{dx}(x) \quad \text{ou} \quad Df(x).$$

O símbolo  $dx$  na notação acima se refere à variável  $x$ . Assim, se estivermos trabalhando, por exemplo, com uma função  $g$  de variável  $t$ , as notações ficam

$$g'(t), \quad \frac{dg}{dt}(t) \quad \text{ou} \quad Dg(t).$$

Usaremos, durante esse curso, as duas primeiras. Há também um outro tipo de notação, quando escrevemos a função na forma  $y = f(x)$ , que é dada por

$$y' \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}.$$

## 2.6 Regras de derivação

De agora em diante, iremos trabalhar da seguinte maneira:

- ★ encontrar, usando a definição, a derivada de certas funções elementares (potências e raízes, senos e cossenos, exponencial e logaritmo);
- ★ estabelecer regras para derivação de funções mais complicadas;
- ★ usar essas regras para efetivamente calcular derivadas de funções mais complicadas.

Começemos com o cálculo de derivadas, usando a definição, das funções elementares.

**Proposição 2.11 (DERIVADAS DE FUNÇÕES ELEMENTARES).** São válidas as seguintes:

- (a) sejam  $k \in \mathbb{R}$  e  $f(x) = k$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  então

$$f'(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R};$$

- (b) sejam  $n$  um inteiro positivo e  $f(x) = x^n$  para  $x \in \mathbb{R}$  então

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{para } x \in \mathbb{R};$$

- (c) sejam  $n \geq 2$  um inteiro positivo e  $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$  para  $x \in D_f$  ( $D_f = \mathbb{R}$  se  $n$  é ímpar e  $D_f = [0, +\infty)$  se  $n$  é par) então

$$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  se  $n$  é ímpar e para  $x > 0$  se  $n$  é par;

- (d) se  $f(x) = \sin x$  para  $x \in \mathbb{R}$  então

$$f'(x) = \cos x \quad \text{para } x \in \mathbb{R};$$

- (e) se  $f(x) = \cos x$  para  $x \in \mathbb{R}$  então

$$f'(x) = -\sin x \quad \text{para } x \in \mathbb{R};$$

(f) se  $f(x) = e^x$  para  $x \in \mathbb{R}$  então

$$f'(x) = e^x \quad \text{para } x \in \mathbb{R};$$

(g) se  $f(x) = \ln x$  para  $x > 0$  então

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{para } x > 0.$$

*Demonstração.* (a) Note que para  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0,$$

isto é,  $f$  é diferenciável para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $f'(x) = 0$ .

(b) Lembremos que

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}).$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1},$$

o que mostra que  $f(x) = x^n$  é diferenciável em cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ . Trocando  $x_0$  por  $x$ , o resultado segue.

(c) Fazendo  $y = \sqrt[n]{x}$  e  $y_0 = \sqrt[n]{x_0}$  vemos que  $y \rightarrow y_0$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Assim

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{y^n - y_0^n} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{y^n - y_0^n}{y - y_0}} = \frac{1}{ny_0^{n-1}} = \frac{1}{nx_0^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1},$$

logo  $f$  é diferenciável em  $x_0$  e  $f'(x_0) = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1}$ . Trocando  $x_0$  por  $x$ , o resultado segue.

(d) Note que para  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x, \end{aligned}$$

onde usamos os resultados da seção de limites fundamentais. Logo  $f$  é diferenciável para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $f'(x) = \cos x$ .

(e) Note que para  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right) = -\sin x, \end{aligned}$$

onde usamos os resultados da seção de limites fundamentais. Logo  $f$  é diferenciável para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $f'(x) = -\sin x$ .

(f) Para  $x \in \mathbb{R}$ , veja que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x,$$

onde usamos os resultados da seção de limites fundamentais. Logo  $f$  é diferenciável para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $f'(x) = -e^x$ .

(g) Para  $x > 0$  temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Fazendo a mudança  $u = \frac{h}{x}$  temos  $u \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ , e assim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},$$

onde usamos os resultados da seção de limites fundamentais. Logo  $f$  é diferenciável para todo  $x > 0$  e  $f'(x) = \frac{1}{x}$ . □

Sabendo as derivadas dessas funções básicas, vamos usar a definição de derivadas para obter algumas regras de derivação, e o seguinte teorema nos fornece algumas dessas regras:

**Teorema 2.12 (REGRAS DE DERIVAÇÃO).** Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis num ponto  $x$ . Então:

(a) **Regra do múltiplo constante.** Se  $k \in \mathbb{R}$  então  $kf$  é diferenciável em  $x$  e

$$(kf)'(x) = kf'(x),$$

isto é, constantes “saem” da derivada;

(b) **Regra da soma.**  $f + g$  é diferenciável em  $x$  e

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

isto é, a derivada da soma é a soma das derivadas;

(c) **Regra do produto.**  $f \cdot g$  é diferenciável em  $x$  e

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

**Cuidado!** A derivada do produto **não é** o produto das derivadas!

(d) **Regra do quociente.** Se  $g(x) \neq 0$  então  $\frac{f}{g}$  é diferenciável em  $x$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

*Demonstração.* (a) Veja que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(kf)(x+h) - (kf)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = kf'(x),$$

logo  $kf$  é diferenciável em  $x$  e  $(kf)'(x) = kf'(x)$ .

(b) Temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x), \end{aligned}$$

logo  $f+g$  é diferenciável em  $x$  e  $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .

(c) Antes de começarmos, lembremos que como  $g$  é diferenciável em  $x$ ,  $g$  é também contínua em  $x$ , ou seja,  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ .

Agora, veja que

$$(fg)(x+h) - (fg)(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x).$$

Assim, usaremos um artifício bastante conhecido na matemática (conhecido como “somar 0”) que consiste em somar e subtrair o mesmo valor na expressão, o que não altera seu valor. Somaremos e subtrairemos o valor  $f(x)g(x+h)$  na expressão acima e obtemos

$$\begin{aligned} (fg)(x+h) - (fg)(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= [f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]. \end{aligned}$$

Assim, usando esses cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

(d) Como no item anterior, começamos lembrando que como  $f$  e  $g$  são diferenciáveis em  $x$ , elas são também contínuas em  $x$ , isto é,  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$  e  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ .

Veja que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}.$$

No numerador, usando a mesma técnica do item anterior, somaremos e subtrairemos a expressão  $f(x)g(x)$ , para obter

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \{ [f(x+h) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+h) - g(x)] \}. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \end{aligned}$$

pois  $g(x) \neq 0$ . Com isso, provamos que  $\frac{f}{g}$  é diferenciável em  $x$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

□

**Exemplo 2.13.** Com as regras vistas acima, combinadas com as derivadas das funções elementares, é simples ver que:

- Se  $f(x) = x^8 + 12x^5 - 6x + 2$  então  $f'(x) = 8x^7 + 60x^4 - 6$ .
- Se  $f(x) = x \cos x$  então  $f'(x) = \cos x - x \sin x$ .
- Se  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3 + 6}$  então  $f'(x) = \frac{2x(x^3 + 6) - (x^2 - 2)3x^2}{(x^3 + 6)^2} = \frac{-x^4 + 6x^2 + 12x}{(x^3 + 6)^2}$  para  $x \neq -\sqrt[3]{6}$ .
- Se  $n$  é um inteiro positivo e  $f(x) = x^{-n}$  então  $f'(x) = -nx^{-n-1}$  para  $x \neq 0$ .
- Se  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  e  $f(x) = \log_a x$  para  $x > 0$  então  $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$  para  $x > 0$ , já que  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ .

**Exemplo 2.14.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$  no ponto de abscissa 1.

**SOLUÇÃO.** Como  $f'(x) = \frac{e^x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ , temos  $f'(1) = 0$ . Logo a equação da reta tangente é

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \implies y - \frac{e}{2} = 0 \implies y = \frac{e}{2}.$$

Podemos apresentar as fórmulas de derivação em uma notação alternativa que facilita a

compreensão. Denotando  $u = f(x)$  e  $v = g(x)$ , temos

$$(u + v)' = u' + v', \quad (uv)' = u'v + uv' \quad \text{e} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

quando essas derivadas são possíveis.

## 2.7 Regra da Cadeia

Uma das operações mais importantes que podemos realizar com funções é a *composição*. Já vimos como tratar o limite de uma composta de funções, e a *Regra da Cadeia* nos fornece uma fórmula para derivar a composta  $h = f \circ g$ , usando as derivadas de  $f$  e  $g$ . Apresentaremos a seguir o resultado sem sua demonstração, que pode ser encontrada, por exemplo, em [3].

**Teorema 2.15 (REGRA DA CADEIA).** Sejam  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $g(D_g) \subset D_f$ , e considere a composta  $h = f \circ g$ .

Se  $g$  é diferenciável em  $x_0 \in D_g$  e  $f$  é diferenciável em  $g(x_0)$ , então  $h$  é diferenciável em  $x_0$  e

$$h'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0). \quad (2.1)$$

**Exemplo 2.16.** Calcule a derivada de  $h(t) = \cos(\sqrt{t})$ .

**SOLUÇÃO.** Tomemos  $g(t) = \sqrt{t}$ , que tem domínio  $D_g = [0, \infty)$  e  $f(x) = \cos x$ , com  $D_f = \mathbb{R}$ . Assim  $h(t) = f(g(t))$  para  $t \geq 0$ . Além disso, temos  $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$  para todo  $t > 0$  e  $f'(x) = -\sin x$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Pela *Regra da Cadeia* obtemos

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = -\sin(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{para todo } t > 0.$$

**Exemplo 2.17.** Calcule a derivada de  $h(t) = \ln(4t - 2)$ .

**SOLUÇÃO.** Consideramos  $g(t) = 4t - 2$  e  $f(x) = \ln x$ . Aqui, para termos a composta bem definida, como  $D_f = (0, +\infty)$ , devemos ter  $g(t) = 4t - 2 > 0$ , o que nos dá  $D_g = (\frac{1}{2}, +\infty)$ . Assim  $h(t) = f(g(t))$  para  $t \in D_g$ ,  $g'(t) = 4$  para todo  $t \in D_g$  e  $f'(x) = \frac{1}{x}$  para todo  $x > 0$ . Pela *Regra da Cadeia* temos

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = \frac{1}{4t-2}4 = \frac{4}{4t-2} \quad \text{para todo } t > \frac{1}{2}.$$

**Exemplo 2.18.** Se  $f(x) = e^{ax}$  então  $f'(x) = ae^{ax}$ .

**SOLUÇÃO.** Consideremos  $g(x) = ax$  e  $h(x) = e^x$ , com  $D_g = D_h = \mathbb{R}$ . Aqui temos  $f(x) = h(g(x))$  para cada  $x \in \mathbb{R}$  e, aplicando a **Regra da Cadeia**, como  $g'(x) = a$  e  $h'(x) = e^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , obtemos

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = e^{ax}a = ae^{ax} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 2.19.** Podemos usar a Regra da Cadeia para derivar a função exponencial  $a^x$  com base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , e obter

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

**SOLUÇÃO.** De fato, seja  $a > 0$  com  $a \neq 1$ . Escrevemos  $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$  e pela **Regra da Cadeia** obtemos

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \frac{d}{dx}(x \ln a) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

isto é

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

**Observação:** note, na fórmula acima, que quando  $a = e$  obtemos novamente a derivada da função exponencial.

**Exemplo 2.20. Regra da Potência.** Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $x > 0$  então

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

**SOLUÇÃO.** Escrevemos  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x}$  e pela **Regra da Cadeia** obtemos

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \frac{d}{dx}e^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x} \frac{d}{dx}(\alpha \ln x) = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

ou seja

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{para todo } x > 0.$$

**Exemplo 2.21.** Calcule a derivada de  $f(x) = x^x$  para  $x > 0$ .

**SOLUÇÃO.** Escrevemos  $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$  e aplicamos a **Regra da Cadeia** para obter

$$(x^x)' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln x + 1) \quad \text{para todo } x > 0.$$

## 2.8 Derivada da função implícita

Em geral, as funções são dadas *explicitamente* na forma  $y = f(x)$  como, por exemplo,

$$y = \sin x, \quad y = e^{3x^2+1}, \quad y = \frac{7x^2+1}{8x^3-9},$$

e assim por diante. Entretanto, algumas funções são definidas **implicitamente** por uma relação entre  $x$  e  $y$ , isto é, a regra que define a função  $y = f(x)$  não é explícita, mas é dada por uma expressão envolvendo tanto  $x$  quanto  $y$  (e, em geral, não conseguimos isolar a variável  $y$  como nas expressões explícitas acima).

Por exemplo, imagine que a única coisa que sabemos sobre a função  $y = f(x)$  é que ela satisfaz a equação

$$x^2 + y^2 = 25,$$

isto é, que para cada  $x \in D_f$ , temos

$$x^2 + [f(x)]^2 = 25.$$

Não sabemos dizer exatamente qual o valor de  $f(x)$  para cada  $x \in D_f$ , uma vez que, nesse caso, podemos ter

$$y = f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

para cada  $x \in D_f$ .

Algumas vezes ainda não somos capazes nem de encontrar quais os possíveis valores de  $y$  para cada  $x$  dado, como por exemplo na equação

$$x^3 + y^3 = 6xy.$$

Mas fazemos aqui a seguinte pergunta: será que sabendo a expressão que relaciona  $x$  e  $y = f(x)$ , somos capazes de encontrar uma expressão para a derivada  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ? A resposta é SIM, e para isso usamos o conceito de **derivação implícita** que consiste em derivar ambos os lados da equação em relação a  $x$  e então resolver a equação resultante para  $y'$ .

Lembre-se que para a derivação implícita, estamos supondo que  $y = f(x)$  é uma função de variável  $x$ .

**Exemplo 2.22.** Se  $x^2 + y^2 = 25$  encontre  $\frac{dy}{dx}$ .

**SOLUÇÃO.** Sempre que derivamos ambos os lados de uma equação que envolva  $x$  e  $y$ , e estamos olhando  $y$  como uma função da variável  $x$ , diremos que estamos **derivando implicitamente a equação**.

Assim, derivando implicitamente a equação dada temos

$$(x^2 + y^2)' = (25)' \implies (x^2)' + (y^2)' = 0.$$

Pela **Regra da Cadeia** temos

$$(y^2)' = 2y \frac{dy}{dx},$$

e assim obtemos

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \implies x + y \frac{dy}{dx} = 0,$$

isto é, a derivada  $\frac{dy}{dx}$  de  $y$  satisfaz a equação

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0.$$

**Observação:** para os pontos  $x \in D_y$  tais que  $y \neq 0$ , podemos isolar  $\frac{dy}{dx}$  na equação acima e obter  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ .

**Exemplo 2.23.** Se  $x^3 + y^3 = 6xy$ , encontre  $\frac{dy}{dx}$ .

**SOLUÇÃO.** Derivando implicitamente a equação obtemos

$$3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'$$

isto é,

$$x^2 - 2y + (y^2 - 2x) \frac{dy}{dx} = 0.$$

**Observação:** para os pontos  $x \in D_y$  tais que  $y^2 - 3x \neq 0$ , podemos isolar  $\frac{dy}{dx}$  na equação acima e obter

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

## 2.9 Derivada da função inversa

Vamos usar a derivação implícita para encontrar a derivada da função inversa  $f^{-1}$  de uma função inversível  $f: A \rightarrow B$ . Como  $f$  é inversível, sabemos que para cada  $x \in B$  temos

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Dito de outra maneira, se  $y = f^{-1}(x)$ , então  $y$  é dada implicitamente pela equação

$$f(y) = x.$$

Assumindo que  $f$  e  $f^{-1}$  é diferenciável, derivando essa equação implicitamente temos

$$f'(y)y' = (x)' = 1.$$

Se  $f'(y) \neq 0$ , temos

$$y' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Com isso, demos a ideia da prova do seguinte resultado:

**Proposição 2.24 (DERIVADA DE FUNÇÕES INVERSAS).** Seja  $f$  inversível e diferenciável em  $f^{-1}(x_0)$ , com  $f'(f^{-1}(x_0)) \neq 0$ . Se  $f^{-1}$  for contínua em  $x_0$ , então  $f^{-1}$  será diferenciável em  $x_0$  e

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

O que fizemos anteriormente demonstra o caso onde já sabemos que  $f^{-1}$  é diferenciável em  $x_0$ . Se assumirmos somente que  $f^{-1}$  é contínua em  $x_0$ , a demonstração segue notando que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \frac{1}{f'(y_0)},$$

onde fizemos as mudanças  $y_0 = f^{-1}(x_0)$  e  $y = f^{-1}(x)$ . Como  $f^{-1}$  é contínua em  $x_0$  temos  $y \rightarrow y_0$  se  $x \rightarrow x_0$ . Logo  $f^{-1}$  é diferenciável em  $x_0$  e a prova segue como antes.

**Exemplo 2.25.** Se  $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$  então  $g'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ , onde  $x > 0$  se  $n$  for par e  $x \neq 0$  se  $n$  for ímpar ( $n \geq 2$ ).

**SOLUÇÃO.** Note que  $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$  é a função inversa de  $f(x) = x^n$ . Podemos encontrar  $g'(x)$  de duas maneiras, uma aplicando diretamente a Proposição 2.24 e outra aplicando a ideia da demonstração dessa proposição utilizando derivação implícita. Faremos das duas maneiras.

**Método 1:** Aplicando diretamente a Proposição 2.24 temos

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

**Método 2:** Temos

$$y = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{se, e somente se,} \quad y^n = x.$$

Derivando implicitamente obtemos

$$ny^{n-1}y' = 1,$$

isto é

$$y' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

**Exemplo 2.26.** A inversa da função  $f(x) = \sin x$ , com domínio  $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  e imagem  $\text{Im}_f = [-1, 1]$ , é a função  $g(x) = \arcsen x$ , com domínio  $D_g = [-1, 1]$ . Qual é a derivada de  $g(x)$ ?

**SOLUÇÃO.** Podemos encontrar  $g'(x)$  de duas maneiras, uma aplicando diretamente a Proposição 2.24 e outra aplicando a ideia da demonstração dessa proposição utilizando a derivação implícita. Faremos das duas maneiras.

**Método 1:** Aplicando diretamente a Proposição 2.24 temos

$$\arcsen' x = \frac{1}{\cos(\arcsen x)}.$$

Agora,  $1 = \cos^2(\arcsen x) + \sin^2(\arcsen x) = \cos^2(\arcsen x) + x^2$ , logo  $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$  pois  $\cos y \geq 0$  para  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ . Portanto

$$\arcsen' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Note que  $\arcsen' x$  está definida somente em  $(-1, 1)$ , pois a derivada não existe quando  $x = \pm 1$ .

**Método 2:** Temos

$$y = \arcsen x \quad \text{se, e somente se,} \quad \sin y = x,$$

para  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ . Derivando implicitamente

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Agora  $1 = \cos^2 y + \sin^2 y = \cos^2 y + x^2$ . Como  $\cos y \geq 0$  para  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ , concluímos

$$\arcsen' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{para} \quad -1 < x < 1.$$

**Observação:** de maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do  $\cos x$ ,  $\text{tg } x$ ,  $\sec x$  e  $\text{cotg } x$ , denominadas  $\arccos x$ ,  $\text{arctg } x$ ,  $\text{arcsec } x$  e  $\text{arccotg } x$ .

## 2.10 Derivadas de ordens superiores

Na Seção 2.5 vimos que dada uma função  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ , sua **derivada** (ou **derivada primeira**, ou **derivada de ordem 1**) é definida como sendo a função  $f': D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $D_{f'} = \{x \in D_f: f \text{ é diferenciável em } x\}$  e para cada  $x \in D_{f'}$ ,  $f'(x)$  é a derivada de  $f$  em  $x$ .

Podemos então repetir esse processo, mas começando com a função  $f': D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$  e calcular a sua derivada, que será chamada **derivada segunda de  $f$**  (ou **derivada de ordem 2 de  $f$** ), e será denotada por  $f'': D_{f''} \rightarrow \mathbb{R}$ . Isto é

$$D_{f''} = \{x \in D_{f'} : f' \text{ é diferenciável em } x\},$$

e para  $x \in D_{f''}$  temos  $f''(x) = (f')'(x)$ . Veja que para  $x \in D_{f''}$  temos

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

Também podemos escrever

$$f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2} = D^2 f.$$

A **derivada terceira de  $f$**  (ou **derivada de ordem 3 de  $f$** ) é a derivada de  $f''$ , e é denotada por  $f''': D_{f'''} \rightarrow \mathbb{R}$ . Também escrevemos

$$f''' = f^{(3)} = \frac{d^3 f}{dx^3} = D^3 f.$$

Para  $n \in \mathbb{N}^*$ , quando existir, a **derivada  $n$ -ésima de  $f$**  (ou **derivada de ordem  $n$  de  $f$** ) é a derivada de  $f^{(n-1)}$ ,  $f^{(n)}: D_{f^{(n)}} \rightarrow \mathbb{R}$ . Também escrevemos

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = D^n f.$$

**Exemplo 2.27.** Seja  $f(x) = 3x^2 - 4x$ . Calcule  $f'$ ,  $f''$  e  $f'''$ .

**SOLUÇÃO.** Temos  $f'(x) = 6x - 4$ ,  $f''(x) = 6$  e  $f'''(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Note também que  $f^{(n)}(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \geq 3$ .

**Exemplo 2.28.** Se  $f(x) = \frac{1}{x}$  então

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

**SOLUÇÃO.** Veja que  $f(x) = x^{-1}$ . Assim

$$f'(x) = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2}.$$

Também

$$f''(x) = -(-2)x^{-3} = 2x^{-3}.$$

Vemos então que para  $n = 1$  e  $n = 2$  a fórmula acima é verdadeira. Repetindo esse processo  $n$  vezes, chegamos em

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

**Observação:** o que fizemos acima foi provar a fórmula para os dois primeiros casos e então usamos a nossa *intuição* para acreditar que a fórmula é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Porém, só a intuição não basta na Matemática, e se quiséssemos demonstrar de fato esse resultado precisaríamos do *Princípio da Indução Finita*. Não faremos a demonstração nessas notas, mas pergunte ao seu professor como esse princípio funciona e como ele é usado para provar esse exemplo!

**Exemplo 2.29.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Calcule  $f'$  e  $f''$ , quando existirem.

**SOLUÇÃO.** Para  $x < 0$  temos  $f(x) = -x^2$ , o que nos dá  $f'(x) = -2x$ . Para  $x > 0$  temos  $f(x) = x^2$ , e portanto  $f'(x) = 2x$ . Em  $x = 0$ , não temos como escapar de usar a definição para calcular a derivada de  $f$ . Note que para  $x \neq 0$  temos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = 2|x|,$$

e portanto

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2|x| = 0.$$

Assim  $f$  é diferenciável e  $f'(x) = 2|x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Agora, temos  $f''(x) = 2$  para  $x > 0$ ,  $f''(x) = -2$  para  $x < 0$  e  $f$  não tem a derivada de ordem 2 em  $x = 0$ , isto é,  $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0, \\ 2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$



## Capítulo 3

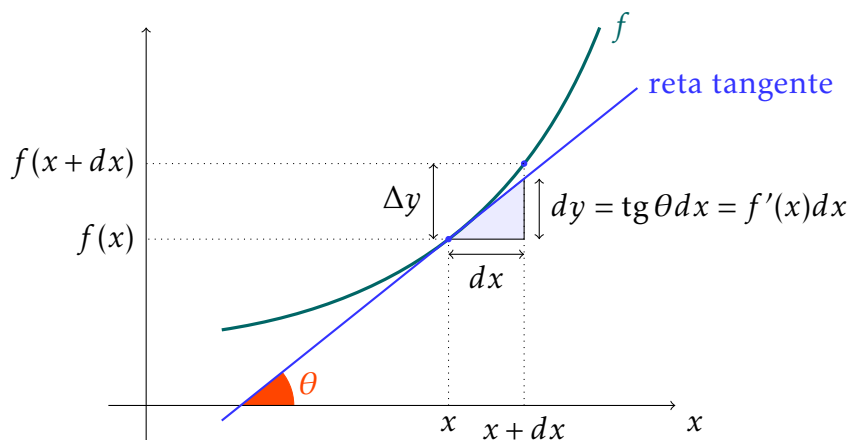
# Aplicações da Derivada

No capítulo anterior aprendemos sobre a derivada de uma função, além de várias maneiras de calculá-la. Vimos também como a [Regra da Cadeia](#) pode ser usada para calcular derivadas de funções implícitas, e usamos isso para obter derivadas de funções inversas, criando assim uma extensa lista de funções que conseguimos derivar.

Contudo, saber derivar funções não adianta muito se não soubermos os variados usos da derivada na solução de problemas matemáticos e/ou reais. Esse capítulo é dedicado a isso: veremos situações nas quais o uso da derivada é essencial para suas resoluções. Vamos lá!

### 3.1 Diferencial

Consideremos  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, e usamos a notação  $y = f(x)$ . Vamos adicionar à variável  $x$  uma quantidade  *muito pequena*   $dx$ , e considerar a situação ilustrada na figura abaixo:



Na figura acima, temos as seguintes quantidades:

- a pequena variação  $dx$  adicionada à variável  $x$ ;
- a variação  $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$ , que é a diferença entre os valores de  $f(x + dx)$  e  $f(x)$ ;
- o ângulo  $\theta$  formado entre a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x))$  e o eixo  $x$ , cuja tangente sabemos ser a inclinação dessa reta, que é dada por  $f'(x)$ ;
- a variação diferencial  $dy$  que ocorre ao adicionarmos  $dx$  na variável  $x$ , que é dada por  $dy = \operatorname{tg} \theta dx = f'(x)dx$ .

Note que a diferença entre  $\Delta y$  e  $dy$  converge a zero, quando comparamos isso a  $dx$  e fazemos  $dx$  ir a zero. Isto é, sabemos que

$$\frac{\Delta y - dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x) - f'(x)dx}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} - f'(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando } dx \rightarrow 0.$$

Em particular, isso significa que quando  $dx$  é pequeno, não erramos muito ao aproximar a variação  $\Delta y$  por  $dy$ , isto é,

$$\Delta y \approx dy \quad \text{para } dx \text{ suficientemente pequeno,}$$

que pode ser escrito como

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx \quad \text{quando } dx \text{ é pequeno.} \quad (3.1)$$

**Definição 3.1.** Seja  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e denote  $y = f(x)$ . Então a **diferencial de  $f$  em  $x$**  (ou simplesmente a **diferencial de  $f$** ) é dada por

$$dy = f'(x)dx,$$

e é definida em termos de um incremento  $dx$  pequeno (que pode ser positivo ou negativo).

**Exemplo 3.2.** Temos um aparelho que mede o raio de uma dada esfera, com erro de no máximo 0,25% (para mais ou para menos). Ao medir uma esfera com esse aparelho, obtemos o raio de 20 cm.

Qual é o erro máximo cometido ao usar esse valor de raio para computar o volume da esfera?

**SOLUÇÃO.** Com o erro de 0,25%, se o raio da esfera for de 20 cm então o erro absoluto cometido na medição é de, no máximo, 0,05 cm.

Denotaremos por

- $r$  o raio da esfera;
- $dr$  o erro máximo absoluto cometido na medida do raio;
- $V(r)$  o volume da esfera que tem raio  $r$ , que é dado por

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

O erro cometido ao calcular o volume da esfera é  $\Delta V$ , que pode ser aproximado pela diferencial de  $V$  em  $r$ , dada por

$$dV = V'(r)dr = 4\pi r^2 dr.$$

Assim, quando  $r = 20$  cm e  $dr = 0,05$  cm, temos

$$\Delta V \approx dV = 4\pi(20 \text{ cm})^2 0,05 \text{ cm} = 80\pi \text{ cm}^3.$$

**Observação:** podemos ainda usar uma aproximação de  $\pi$  para obter um valor para  $\Delta V$ , mas note que essa aproximação também afeta o valor do erro cometido. Por exemplo, usando  $\pi \approx 3$  obtemos  $\Delta V \approx 240 \text{ cm}^3$ , enquanto que  $\pi \approx 3,1415$  obtemos  $\Delta V \approx 251,32 \text{ cm}^3$ , o que representa uma diferença considerável. Aqui, o ideal é usarmos uma aproximação para  $\pi$  que cometa erro consideravelmente menor do que aquele que já cometemos na medição do raio para que ele não influencie tanto o resultado. Enquanto na primeira o erro cometido é de mais de 4,5%, na segunda o erro é menor do que 0,003%.

**Exemplo 3.3.** Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para o acréscimo  $\Delta y$  que a função  $y = x^3$  sofre quando se passa de  $x = 1$  para  $x + dx = 1,01$ . Calcule o erro  $\Delta y - dy$ .

**SOLUÇÃO.** Note que  $dy = 3x^2 dx$  e  $dx = 0,01$ . Assim

$$\Delta y \approx dy = 3x^2 dx = 3 \cdot 0,01 = 0,03.$$

Nesse caso, conseguimos calcular explicitamente  $\Delta y$ , pois

$$\Delta y = (1,01)^3 - 1 = 1,030301 - 1 = 0,030301,$$

e, assim,  $\Delta y - dy = 0,000301$ .

A equação (3.1) é chamada de **aproximação linear de  $f$  em  $x$** , e é usada para aproximar

(obviamente) o valor de  $f(x + dx)$ . Veremos como fazer isso com um exemplo.

**Exemplo 3.4.** Encontre um valor aproximado para  $\sqrt{4,05}$ .

**SOLUÇÃO.** Consideremos a função  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 4$  e  $dx = 0,05$ . Assim  $\sqrt{4,05} = f(x + dx)$ .

Usando a (3.1) sabemos que

$$\sqrt{4,05} = f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx = f(4) + f'(4) \cdot 0,05.$$

Como  $f(4) = \sqrt{4} = 2$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  e  $f'(4) = \frac{1}{4}$ , temos

$$\sqrt{4,05} \approx 2 + \frac{0,05}{4} = 2,0125.$$

**Observação:** ao calcular o valor de  $\sqrt{4,05}$  numa calculadora, obtemos

$$\sqrt{4,05} \approx 2,012461179749811,$$

que é um valor bem próximo do que obtivemos usando a aproximação linear. A calculadora utiliza aproximações mais precisas do que a linear, usando termos de ordens maiores para o cálculo. Veremos uma aproximação melhor do que a linear mais adiante, na Seção 3.11.

## 3.2 Taxa de variação

Como aplicação direta da **Regra da Cadeia**, temos as **taxas de variação** (também chamadas de **taxas relacionadas**), que aparecem basicamente quando uma quantidade (função)  $h$  depende de uma quantidade (variável)  $u$ , isto é,  $h = f(u)$  para alguma função  $f$ , e  $u$  por sua vez é uma quantidade (função) que também depende de uma terceira quantidade (variável)  $x$ , isto é,  $u = g(x)$  para alguma função  $g$ . Nesse cenário, vemos que  $h$  também depende de  $x$  via a regra

$$h(x) = f(g(x)),$$

isto é,  $h$  é a composta de  $f$  e  $g$ , com variável  $x$ . Seguindo a **Regra da Cadeia**, temos

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Isso, que é somente a Regra da Cadeia, pode ser usado nos seguintes exemplos.

**Exemplo 3.5.** Suponha que está sendo bombeado ar para dentro de um balão esférico, e seu volume cresce a uma taxa de  $50 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ . Quão rápido o raio do balão está crescendo quando o raio é 5 cm?

**SOLUÇÃO.** Aqui, a variável inicial é o tempo  $t$ , medido em segundos. Consideramos que o raio  $r$  da esfera seja uma função de  $t$ , isto é,  $r = r(t)$ . Sabemos que o volume  $V$  da esfera depende de seu raio  $r$ , pela regra  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Assim, vemos que o volume da esfera também depende do tempo  $t$ , pela regra

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3.$$

Usando a **Regra da Cadeia**, obtemos

$$V'(t) = 4\pi[r(t)]^2 r'(t).$$

Sabemos que no instante  $t$  tal que  $r(t) = 5$  cm, a taxa de variação do seu volume (que é dada por  $V'(t)$ ) é de  $50 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ . Assim, obtemos

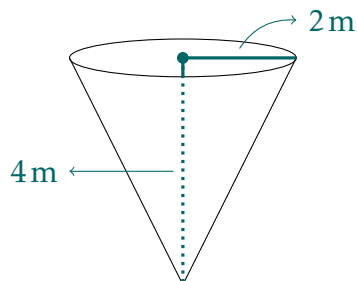
$$50 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = 4\pi(5 \text{ cm})^2 r'(t),$$

o que nos dá

$$r'(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

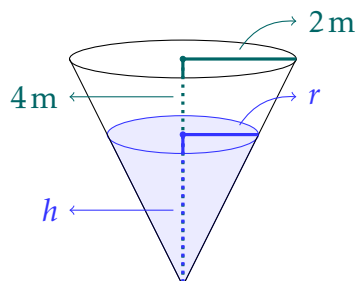
que é a taxa de variação do raio do balão (ou seja, quão rápido ele está crescendo) quando seu raio é de 5 cm.

**Exemplo 3.6.** Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido com base de raio 2 m e altura igual a 4 m, conforme a figura abaixo:



Se a água está sendo bombeada dentro do tanque a uma taxa de  $2 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ , encontre a taxa na qual o nível da água está elevando quando a água está a 3 m de profundidade.

**SOLUÇÃO.** A variável aqui é o tempo  $t$ , medido em minutos. O volume  $V$  da coluna de água dentro desse tanque, mostrada na figura abaixo:



depende da sua altura  $h$  e de seu raio  $r$ , pela fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Usando semelhança de triângulos, sabemos que

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \implies r = \frac{h}{2}.$$

Substituindo na expressão para  $V$ , e lembrando que  $h = h(t)$  (pois a altura da coluna de água depende do tempo decorrido), obtemos

$$V(t) = \frac{\pi}{12}[h(t)]^3.$$

Derivando essa expressão com respeito à variável  $t$  e usando a [Regra da Cadeia](#) temos

$$V'(t) = \frac{1}{4}[h(t)]^2 h'(t).$$

Sabendo que  $V'(t) = 2 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$  e avaliando a expressão acima no instante em que  $h(t) = 3 \text{ m}$  chegamos em

$$h'(t) = \frac{8}{9\pi} \frac{\text{m}}{\text{min}}.$$

### 3.3 Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio

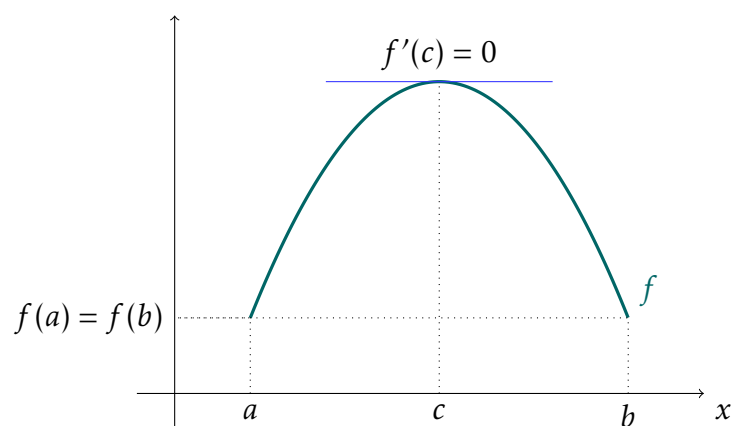
O [Teorema do Valor Médio](#) é um dos teoremas mais importantes do Cálculo. Dele seguem as mais diversas aplicações, e é usado extensivamente na Matemática.

Para demonstrá-lo, precisaremos do [Teorema de Rolle](#), enunciado a seguir, cuja demonstração não conseguimos exibir agora, por falta de algumas definições e resultados adicionais necessários. Mais adiante mostraremos como prová-lo.

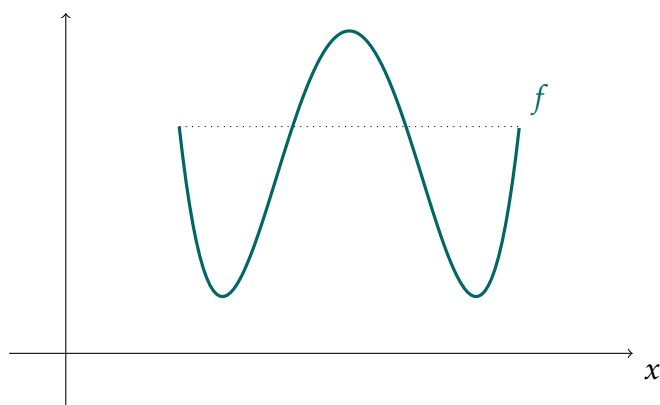
**Teorema 3.7 (TEOREMA DE ROLLE).** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, que é diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Se  $f(a) = f(b)$  então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

Uma interpretação física para o [Teorema de Rolle](#) é a seguinte: imagine que uma partícula se move horizontalmente, com função posição  $f(t)$  na variável de tempo  $t$ . Se a partícula se desloca entre os instantes de tempo inicial  $t = a$  e final  $t = b$  e ela começa e termina na mesma posição, isto é,  $f(a) = f(b)$ , então deve existir um tempo  $t = c$  entre  $a$  e  $b$  de maneira que nesse instante a velocidade da partícula é zero, isto é,  $f'(c) = 0$ .

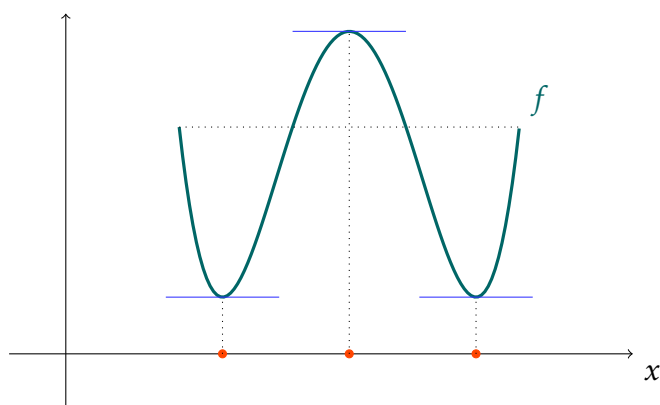
A representação gráfica do [Teorema de Rolle](#) é dada na figura abaixo:



A figura acima pode nos levar a crer que existe somente um valor de  $c$  tal que  $f'(c) = 0$ . Isso não é verdade, e podemos ter vários valores possíveis de  $c$  tais que  $f'(c) = 0$ . Por exemplo, na função  $f$  cujo gráfico está representado na figura abaixo é possível identificar três possíveis valores para  $c$ . Você consegue identificá-los?



Se você marcou os três pontos destacados abaixo, você está correto!



Com o [Teorema de Rolle](#) em mãos, podemos enunciar e demonstrar o Teorema do Valor Médio.

**Teorema 3.8 (TEOREMA DO VALOR MÉDIO (TVM)).** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Então existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

ou seja, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Demonstração.* A reta que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  é dada por

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Vamos definir a função  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h(x) = f(x) - r(x) \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

e notemos que

- Como  $f$  é contínua por hipótese e  $r$  é uma função contínua (pois é um polinômio) temos  $h$  contínua.
- Analogamente ao item anterior,  $h$  é diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ ;
- Note que  $r(a) = f(a)$  e  $r(b) = f(b)$ , assim  $h(a) = h(b) = 0$ .

Assim todas as hipóteses do **Teorema de Rolle** estão verificadas para  $h$ , o que garante que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$ . Mas

$$h'(x) = f'(x) - r'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{para todo } x \in (a, b),$$

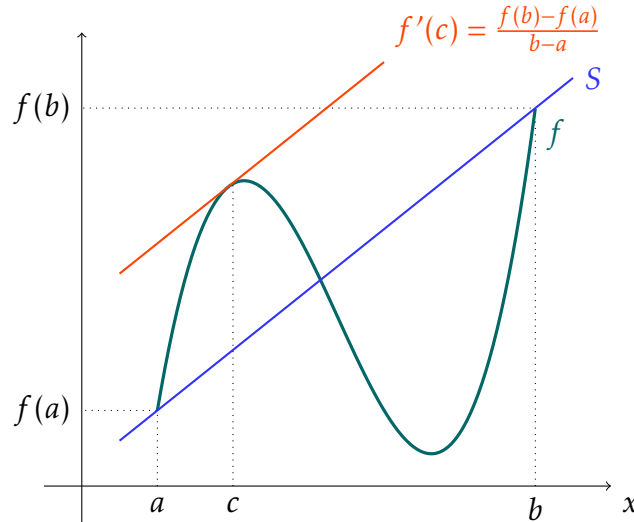
o que nos dá

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Uma interpretação física para o **TVM** é a seguinte: imagine que uma partícula se move horizontalmente, com função posição  $f(t)$  na variável de tempo  $t$ . Se a partícula se desloca entre os instantes de tempo inicial  $t = a$  e final  $t = b$ , então deve existir um tempo  $t = c$  entre  $a$  e  $b$  de maneira que nesse instante a velocidade da partícula é igual à sua velocidade média nesse intervalo, isto é,  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Geometricamente, o TVM nos diz que se  $f$  for contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c)$  é o coeficiente angular da reta  $S$  que passa por  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , como mostrado na figura abaixo.



Como no Teorema de Rolle, não é de se esperar que exista somente um valor de  $c$  para o qual  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . O TVM garante a existência de um valor de  $c$ , mas podem existir vários. No exemplo acima, existe mais um valor possível para  $c$ , você consegue identificá-lo?

Note também que o TVM é uma generalização do Teorema de Rolle. De fato, quando  $f(a) = f(b)$ , o TVM nos dá a existência de  $c$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

que é exatamente o que garante o Teorema de Rolle. Porém, eles são enunciados e provados separadamente uma vez que a demonstração do TVM depende do Teorema de Rolle.

### 3.4 Crescimento e decrescimento de funções

Já mencionamos anteriormente que o TVM é muito importante para o Cálculo. Vamos usá-lo agora para estudar o comportamento (de crescimento ou decrescimento de uma função) usando o sinal da sua derivada.

Assuma que  $f$  é uma função diferenciável num intervalo aberto  $(a, b)$  e fixemos  $x \in (a, b)$ . Suponha também que  $f$  é crescente em  $(a, b)$ . Assim, fixado  $x \in (a, b)$ , para  $h > 0$  pequeno temos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

pois  $f(x) \leq f(x+h)$  (pois  $f$  é crescente). Portanto

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

onde a última desigualdade segue do **Teorema da Comparação de Limites**. Com isso, concluímos que

se  $f$  é diferenciável e crescente em  $(a, b)$  temos  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .

Analogamente, se  $f$  é diferenciável e decrescente em  $(a, b)$  então  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .

Usando o **TVM**, somos capazes de mostrar que a afirmação recíproca também é verdadeira, como mostra o resultado a seguir.

**Proposição 3.9 (TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA PARA CRESCIMENTO DE FUNÇÕES).** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, com  $f$  diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ .

(a) Se  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in (a, b)$  então  $f$  será crescente em  $[a, b]$ .

(b) Se  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in (a, b)$  então  $f$  será decrescente em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Provaremos (a), e a prova de (b) é análoga. Para provar (a) sejam  $x, y \in [a, b]$  com  $x < y$ . A restrição da função  $f$  ao intervalo  $[x, y]$  é contínua e diferenciável em  $(x, y)$ . Portanto, segue do **TVM** que existe  $c \in (x, y)$  tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0,$$

pois  $f'(c) \geq 0$  (por hipótese) e  $y - x > 0$ . Isso nos dá  $f(y) \geq f(x)$  e mostra que  $f$  é crescente em  $[a, b]$ .  $\square$

Uma proposição parecida também se aplica quando a derivada tem sinal definido, como mostra o resultado a seguir.

**Proposição 3.10 (TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA PARA O CRESCIMENTO ESTRITO DE FUNÇÕES).** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, que é diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ .

(a) Se  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  será estritamente crescente em  $[a, b]$ .

(b) Se  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$  então  $f$  será estritamente decrescente em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Como na proposição anterior provaremos (a), e a prova de (b) é análoga. Sejam  $x, y \in [a, b]$  com  $x < y$ . A restrição da função  $f$  ao intervalo  $[x, y]$  é contínua e diferenciável em  $(x, y)$ . Portanto, segue do **TVM** que existe  $c \in (x, y)$  tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0,$$

pois  $f'(c) > 0$  por hipótese e  $y - x > 0$ . Isso nos dá  $f(y) > f(x)$  e mostra que  $f$  é estritamente crescente em  $[a, b]$ .  $\square$

**Exemplo 3.11.** Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

**SOLUÇÃO.** Para isso, usaremos a Proposição 3.10, isto é, calcularemos a derivada de  $f$  e analisaremos o seu sinal. Temos

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x - 1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Para analisar o sinal, é interessante fazer os seguintes passos (não são absolutamente necessários, mas são um auxílio visual interessante!):

**Passo 1.** Desenhe o domínio de  $f$  (nesse caso, toda a reta real  $\mathbb{R}$ ) e marque todos os pontos nos quais  $f'(x) = 0$ . Nesse caso, são os pontos  $x = 1$  e  $x = \frac{1}{3}$ .



Isso divide o domínio de  $f$  em alguns intervalos (três, nesse caso), e passamos para o Passo 2, que consiste em analisar o sinal da derivada em cada um desses intervalos.

**Passo 2.** Para analisar o sinal da derivada em cada um desses intervalos, basta calcular o sinal de  $f'$  em *um único ponto* de cada um desses intervalos (pois como já marcamos todos os zeros de  $f'$ , o Teorema do Anulamento nos garante que o sinal de  $f'$  não pode mudar nesses intervalos).

- No intervalo  $(-\infty, \frac{1}{3})$  escolhemos, por exemplo, o ponto  $x = 0$  para obter  $f'(0) = 1 > 0$ . Logo  $f'(x) > 0$  em  $(-\infty, \frac{1}{3})$ . Marcamos essa informação na reta real desenhada acima, da seguinte maneira:



- Em  $(\frac{1}{3}, 1)$  escolhemos, por exemplo,  $x = \frac{1}{2}$  e obtemos  $f'(\frac{1}{2}) < 0$  (note que não precisamos nem efetivamente calcular o valor de  $f'(\frac{1}{2})$ , basta saber seu sinal. Como, para  $x = \frac{1}{2}$  temos  $x < 1$  e  $x > \frac{1}{3}$ , obtemos  $x - 1 < 0$  e  $x - \frac{1}{3} > 0$ , assim  $f'(x) = 3(x - 1)(x - \frac{1}{3}) < 0$  para  $x = \frac{1}{2}$ ). Anotando isso na nossa reta real:



- Finalmente, em  $(1, +\infty)$ , escolhemos por exemplo  $x = 2$  e como, neste caso,  $x - 1 > 0$  e  $x - \frac{1}{3} > 0$  temos  $f'(2) > 0$ . Anotando na nossa reta real, temos:



Com isso, passamos ao Passo 3, que consiste em usar a Proposição 3.10 para analisar o crescimento de  $f$  usando o sinal da derivada: sinal positivo (+) a função é estritamente crescente (que denotamos com um sinal de  $\nearrow$ ) e sinal negativo (-) a função é decrescente (que denotamos com um sinal de  $\searrow$ ).

**Passo 3.** Analisar o crescimento de  $f$ . Na nossa representação da reta real, ficamos com:



Com isso, terminamos a nossa análise e concluímos que

- $f$  é estritamente crescente em  $(-\infty, \frac{1}{3}]$ ;
- $f$  é estritamente decrescente  $[\frac{1}{3}, 1]$ ;
- $f$  é estritamente crescente em  $[1, +\infty)$ .

**Exemplo 3.12.** Mostre que  $e^x > x + 1$  para todo  $x > 0$ .

**SOLUÇÃO.** Defina  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = e^x - x - 1$ . Veja que  $f'(x) = e^x - 1 > 0$  para  $x > 0$ , o que mostra que  $f$  é estritamente crescente em  $[0, +\infty)$ , pela Proposição 3.10. Portanto  $f(x) > f(0)$  para todo  $x > 0$ . Mas  $f(0) = 0$ , o que nos dá  $e^x > x + 1$  para todo  $x > 0$ .

## 3.5 Máximos e mínimos

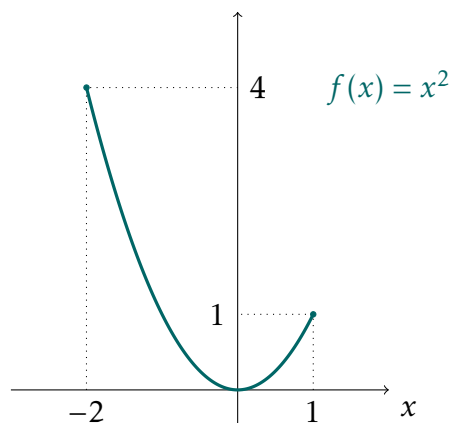
Além de saber estudar o crescimento de uma função, é importante saber encontrar pontos nos quais a função atinge um máximo (ou um mínimo). Vamos ver precisamente essas definições a seguir.

**Definição 3.13.** Sejam  $I$  um intervalo e  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

- (a) Diremos que  $x_0 \in I$  é um **ponto de máximo local** de  $f$ , se existir  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \leq f(x_0)$ , para todo  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ . Neste caso, diremos que  $f(x_0)$  é um **máximo local** de  $f$  (ou um **valor de máximo local** de  $f$ ).
- (b) Diremos que  $x_0 \in I$  é um **ponto de mínimo local** de  $f$ , se existir  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \geq f(x_0)$ , para todo  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ . Neste caso, diremos que  $f(x_0)$  é **mínimo local** de  $f$  (ou um **valor de mínimo local** de  $f$ ).
- (c) Um ponto  $x_0 \in I$  será dito um **ponto de extremo local**, se  $x_0$  for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local. Neste caso  $f(x_0)$  é chamado de **extremo local** de  $f$  (ou um **valor de extremo local** de  $f$ ).
- (d) Diremos que  $x_0 \in I$  é um **ponto de máximo global** (ou **absoluto**) de  $f$  se  $f(x) \leq f(x_0)$  para todo  $x \in I$ . Neste caso, diremos que  $f(x_0)$  é **máximo global (absoluto)** de  $f$  (ou um **valor de máximo global (absoluto)** de  $f$ ).
- (e) Diremos que  $x_0 \in I$  é um **ponto de mínimo global (absoluto)** de  $f$  se  $f(x) \geq f(x_0)$  para todo  $x \in I$ . Neste caso, diremos que  $f(x_0)$  é **mínimo global (absoluto)** (ou um **valor de mínimo global (absoluto)** de  $f$ ).
- (f) Um ponto  $x_0 \in I$  será dito um **ponto de extremo global**, se  $x_0$  for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global. Nesse caso  $f(x_0)$  é um **extremo global (absoluto)** de  $f$  (ou um **valor de extremo global (absoluto)** de  $f$ ).

**Exemplo 3.14.** O valor de máximo global de  $f(x) = \cos x$  é 1, e  $f$  tem infinitos pontos de máximo global, a saber todos os pontos da forma  $x = 2n\pi$  com  $n \in \mathbb{Z}$ . O valor de mínimo absoluto de  $f$  é  $-1$ , e temos infinitos pontos de mínimo absoluto, a saber todos os pontos da forma  $x = (2n + 1)\pi$  com  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 3.15.** Considere a função  $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$ , cujo gráfico é apresentado na figura abaixo:



Essa função possui dois pontos de máximo local:  $x = -2$ , que também é ponto de máximo absoluto de  $f$ , com valor máximo absoluto  $f(-2) = 4$ , e  $x = 1$  com valor de máximo local  $f(1) = 1$ . Além disso  $f$  tem um ponto de mínimo absoluto em  $x = 0$ , com valor de mínimo absoluto  $f(0) = 0$ .

**Exemplo 3.16.** A função  $f(x) = e^x$  não tem pontos de extremo local.

O seguinte resultado é bastante interessante, e nos será útil mais adiante.

**Proposição 3.17.** Considere  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Se  $c \in (a, b)$  for um ponto de extremo local de  $f$  então  $f'(c) = 0$ .

*Demonstração.* Vamos fazer a prova no caso em que  $c$  é um ponto de máximo local (a prova no caso em que  $c$  é um ponto de mínimo local é análoga).

Se  $c \in (a, b)$  é um ponto de máximo local então existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \leq f(c)$  para todo  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ . Para  $c < x < c + \delta$  temos

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

pois  $f(x) - f(c) \leq 0$  e  $x - c > 0$ , onde usamos o **Teorema da Comparação de Limites**.

Para  $c - \delta < x < c$  temos

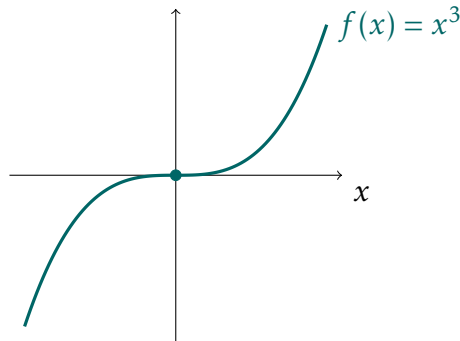
$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

pois  $f(x) - f(c) \leq 0$  e  $x - c < 0$ , onde usamos o **Teorema da Comparação de Limites**. Combinando estas duas desigualdades obtemos  $f'(c) = 0$ . □

Algumas importantes observações a respeito desse resultado devem ser feitas:

- Note que se não considerarmos  $f$  definida num intervalo aberto o resultado acima poderá não ser verdadeiro. Por exemplo, se  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  for dada por  $f(x) = x$ , então os pontos extremos serão  $x = 0$  e  $x = 1$ . Em ambos os casos, teremos  $f'(x) = 1$ .

- Note que não vale a recíproca. Um exemplo que ilustra este fato é a função  $f(x) = x^3$  que satisfaz  $f'(0) = 0$ , mas  $x = 0$  não é um ponto de extremo local de  $f$  (veja na figura abaixo).



- Note que não podemos tirar a hipótese de diferenciabilidade. A função  $f(x) = |x|$  tem um ponto de mínimo local (e absoluto) em  $x = 0$ , mas  $f'(0)$  não existe.

### Demonstração do Teorema de Rolle

Quando apresentamos o **Teorema de Rolle** ainda não éramos capazes de demonstrá-lo. Agora, com a definição de pontos de extremo local e com a Proposição 3.17, juntamente com o **Teorema de Weierstrass** somos capazes de prová-lo.

*Demonstração do Teorema de Rolle.* Se  $f$  for constante em  $[a, b]$  então  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in (a, b)$  e  $c$  pode ser qualquer número em  $(a, b)$ .

Assim, nos resta provar o caso em que  $f$  não é constante. Como  $f$  é contínua, pelo **Teorema de Weierstrass** existem  $x_1, x_2 \in (a, b)$  tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Na nossa nova linguagem, existem um ponto de mínimo absoluto  $x_1 \in [a, b]$  de  $f$  e um ponto de máximo absoluto  $x_2 \in [a, b]$  de  $f$ . Mais ainda, ambos são pontos de extremo local de  $f$ .

Como estamos trabalhando no caso onde  $f$  não é constante, devemos  $f(x_1) < f(x_2)$  (pois do contrário  $f$  seria constante). Como  $f(a) = f(b)$ , um dentre  $x_1$  e  $x_2$  deve estar em  $(a, b)$ . Então da Proposição 3.17 segue que ou  $f'(x_1) = 0$  ou  $f'(x_2) = 0$ . Portanto, mostramos que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ , e o Teorema de Rolle está demonstrado.  $\square$

**Definição 3.18.** Seja  $f$  uma função. Um ponto  $c \in D_f$  é chamado de **ponto crítico**  $f$  se  $f'(c) = 0$  ou se  $f'(c)$  não existe.

**Exemplo 3.19.** Os pontos críticos de  $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$  são  $\frac{3}{2}$  e 0.

**SOLUÇÃO.** Temos  $f'(x) = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$ . Então,  $f'(x) = 0$  se  $12 - 8x = 0$ , ou seja  $x = \frac{3}{2}$  e  $f'(0)$  não existe.

A Proposição 3.17 pode ser reescrita da seguinte maneira: se  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável então todo ponto de extremo local é um ponto crítico de  $f$ . Isso nos dá uma dica de onde buscar extremos locais: começamos analisando os pontos críticos de  $f$ !

### 3.6 Critérios para determinar máximos e mínimos

Nosso objetivo aqui é conseguir determinar se um dado ponto crítico de  $f$  é um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local de  $f$ . Para isso, temos o seguinte resultado:

**Proposição 3.20 (TESTE DO CRESCIMENTO PARA CLASSIFICAR PONTOS DE EXTREMO LOCAL).** Sejam  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $c \in (a, b)$ .

- (a) Se existe  $r > 0$  tal que  $f$  é crescente em  $(c - r, c]$  e decrescente em  $[c, c + r)$  então  $c$  é um ponto de máximo local de  $f$ .
- (b) Se existe  $r > 0$  tal que  $f$  é decrescente em  $(c - r, c]$  e crescente em  $[c, c + r)$  então  $c$  é um ponto de mínimo local de  $f$ .

*Demonstração.* Faremos a prova de (a), e a prova de (b) é análoga. Como  $f$  é crescente em  $(c - r, c]$  então  $f(x) \leq f(c)$  para todo  $c - r < x \leq c$ . Como  $f$  é decrescente em  $[c, c + r)$  então  $f(x) \leq f(c)$  para todo  $c \leq x < c + r$ . Assim  $f(x) \leq f(c)$  para todo  $x \in (c - r, c + r)$ , o que mostra que  $c$  é um ponto de máximo local de  $f$ .  $\square$

**Exemplo 3.21.** Determine os valores de máximo e mínimo locais da função

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + 3x^2}.$$

**SOLUÇÃO.** Vamos usar a Proposição 3.20 para encontrar os pontos de extremo local de  $f$ , mas primeiro faremos a análise do crescimento de  $f$  usando o **Teste da Derivada Primeira para Crescimento Estrito de Funções**. Veja que  $D_f = \mathbb{R}$  e

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{(1 + 3x^2)^2}.$$

Como o denominador de  $f'$  é sempre positivo, o sinal de  $f'$  é determinado pelo sinal de seu numerador. Assim, precisamos analisar o sinal de  $3x^2 + 2x - 1$ . Temos

$$3x^2 + 2x - 1 = 3(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

A análise de sinal nos dá a seguinte visualização:



Portanto, obtemos o seguinte:

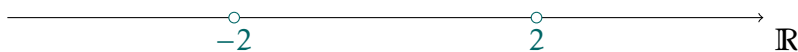
- $f$  é estritamente crescente em  $(-\infty, -1]$ ;
- $f$  é estritamente decrescente em  $[-1, \frac{1}{3}]$ ;
- $f$  é estritamente crescente em  $[\frac{1}{3}, +\infty)$ .

Segue da Proposição 3.20 que  $x = -1$  é um ponto de máximo local de  $f$  e  $x = \frac{1}{3}$  é um ponto de mínimo local de  $f$ . Assim  $f(-1) = \frac{1}{2}$  é um valor máximo local de  $f$  e  $f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{6}$  é um valor mínimo local de  $f$ .

**Exemplo 3.22.** Determine os valores de máximo local e mínimo local de

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}.$$

**SOLUÇÃO.** Veja que nesse caso temos  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ , e aqui, na nossa representação visual, já começamos desenhando a reta real *sem* os pontos  $\pm 2$ , que não estão no domínio de  $f$ , isto é:



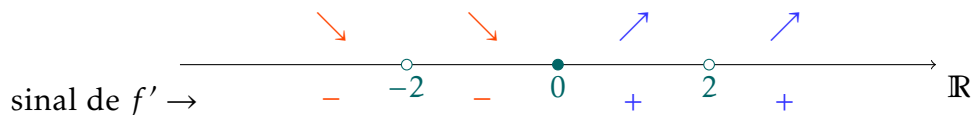
Temos

$$f'(x) = \frac{8x}{(4 - x^2)^2} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

O único ponto crítico de  $f$  é  $x = 0$ , pois  $f'(0) = 0$ . Colocamos esse ponto na nossa representação visual:



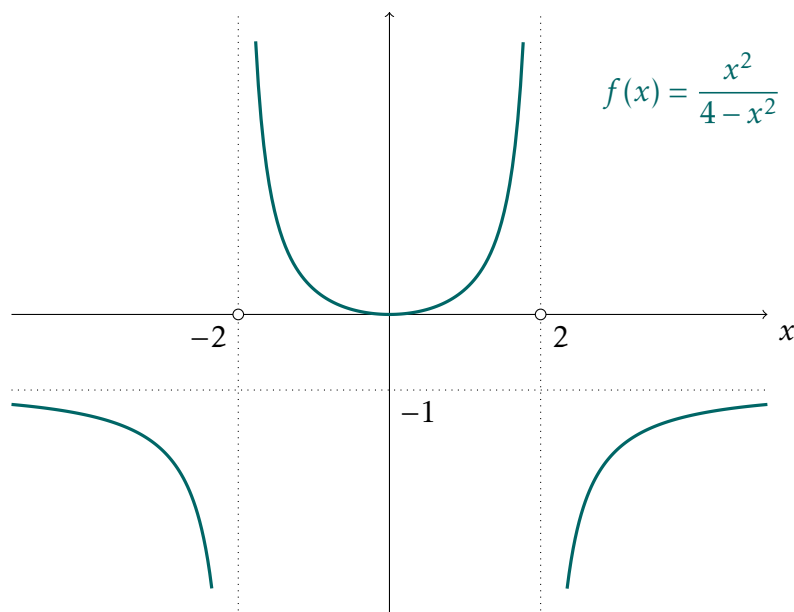
Notamos que o sinal de  $f'$  é determinado pelo seu numerador  $8x$ , uma vez que seu denominador é estritamente positivo. Além disso,  $8x > 0$  para  $x > 0$  e  $8x < 0$  para  $x < 0$ , o que nos dá a seguinte representação visual para o sinal de  $f'$ :



Com isso concluímos que:

- $f$  é estritamente crescente em  $(-\infty, -2)$ ;
- $f$  é estritamente crescente em  $(-2, 0]$ ;
- $f$  é estritamente decrescente em  $[0, 2)$ ;
- $f$  é estritamente decrescente em  $(2, +\infty)$ .

Portanto  $x = 0$  é um ponto de mínimo local com valor mínimo  $f(0) = 0$ . Apresentamos o gráfico de  $f$  na figura abaixo:



Note que, nesse caso,  $x = 0$  não é ponto de mínimo absoluto de  $f$  e 0 não é valor mínimo absoluto de  $f$ .

Existe também um teste envolvendo a derivada segunda para determinar se um dado ponto é um ponto de extremo local de  $f$ , além de classificá-lo. Tal resultado é útil em algumas situações, nas quais a análise do crescimento da função  $f$  é muito complicado. Apresentamos ele a seguir, sem sua prova.

**Proposição 3.23 (TESTE DA DERIVADA SEGUNDA NO EXTREMO LOCAL).** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha que  $f$  tenha derivada  $f'$  e derivada segunda  $f''$  em  $(a, b)$ , e assuma que  $f''$  é uma função contínua em  $(a, b)$ . Dado  $c \in (a, b)$ , vale o seguinte:

- (a) se  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) > 0$  então  $c$  é ponto de mínimo local de  $f$ ;
- (b) se  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) < 0$  então  $c$  será ponto de máximo local de  $f$ .

**Exemplo 3.24.** Usando a Proposição 3.23, classifique os pontos de extremo local de

$$f(x) = x^2 e^{-5x}.$$

**SOLUÇÃO.** Como  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , os pontos de extremo local de  $f$  estarão entre seus pontos críticos (que nesse caso são os pontos  $c$  tais que  $f'(c) = 0$ ).

Como

$$f'(x) = (2x - 5x^2)e^{-5x},$$

os pontos críticos de  $f$  são  $x = 0$  e  $x = \frac{2}{5}$ . Além disso, como

$$f''(x) = (2 - 20x + 25x^2)e^{-5x},$$

temos  $f''(0) = 2 > 0$  e  $f''(\frac{2}{5}) = -10e^{-2} < 0$ . Logo, pela Proposição 3.23,  $x = 0$  é ponto de mínimo local e  $x = \frac{2}{5}$  é ponto de máximo local.

## O Método do Intervalo Fechado

O Teorema de Weierstrass afirma que uma função contínua definida num intervalo fechado  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possui um valor máximo global e um valor mínimo absoluto, isto é, existem  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

mas não diz quem são ou como encontrá-los.

Uma análise do que fizemos até o momento nos dá uma importante informação nesse caso: um ponto de extremos absoluto deve ser ou um ponto crítico de  $f$  no intervalo aberto  $(a, b)$ ,

ou um dos *pontos de fronteira* do intervalo  $[a, b]$  (isto é, ou  $a$  ou  $b$ ). Com essa informação em mãos, somos capazes de apresentar o **Método do Intervalo Fechado** para encontrar os pontos de máximo absoluto e mínimos absoluto de uma função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

**Passo 1.** Encontre os pontos críticos de  $f$  no intervalo  $(a, b)$ .

**Passo 2.** Com os pontos críticos encontrados no passo anterior, que nomeamos de  $c_1, c_2, \dots$ , monte a seguinte tabela:

| $x$      | $f(x)$   |
|----------|----------|
| $a$      | $f(a)$   |
| $b$      | $f(b)$   |
| $c_1$    | $f(c_1)$ |
| $c_2$    | $f(c_2)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

Na coluna da esquerda colocamos os pontos de fronteiras  $a$  e  $b$  do intervalo  $[a, b]$  e os pontos críticos  $c_1, c_2, \dots$  encontrados no passo anterior. Na coluna da direita calculamos o valor de  $f$  em cada um desses pontos.

**Passo 3.** Analise a tabela acima para encontrar o maior valor e o menor valor da coluna da direita. Eles são, respectivamente, o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de  $f$ .

**Exemplo 3.25.** Utilizando o Método do Intervalo Fechado, encontre os pontos de máximo absoluto e mínimo absoluto da função

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 1,$$

no intervalo  $[0, \frac{3}{2}]$ .

**SOLUÇÃO.** Como  $f$  é uma função polinomial, ela é contínua e, portanto, podemos utilizar o Método do Intervalo Fechado.

**Passo 1.** Como  $f$  é diferenciável, encontrar os pontos críticos de  $f$  é encontrar os pontos nos quais  $f'(x) = 0$ . Como

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2),$$

os pontos críticos de  $f$  são  $x = 1$  e  $x = 2$ . Porém, veja que para o método, precisamos dos pontos críticos que estão no intervalo  $(0, \frac{3}{2})$ , ou seja, só queremos o ponto crítico  $c_1 = 1$ .

**Passo 2.** Montamos a tabela, e nesse caso,  $a = 0$  e  $b = \frac{3}{2}$ . Assim

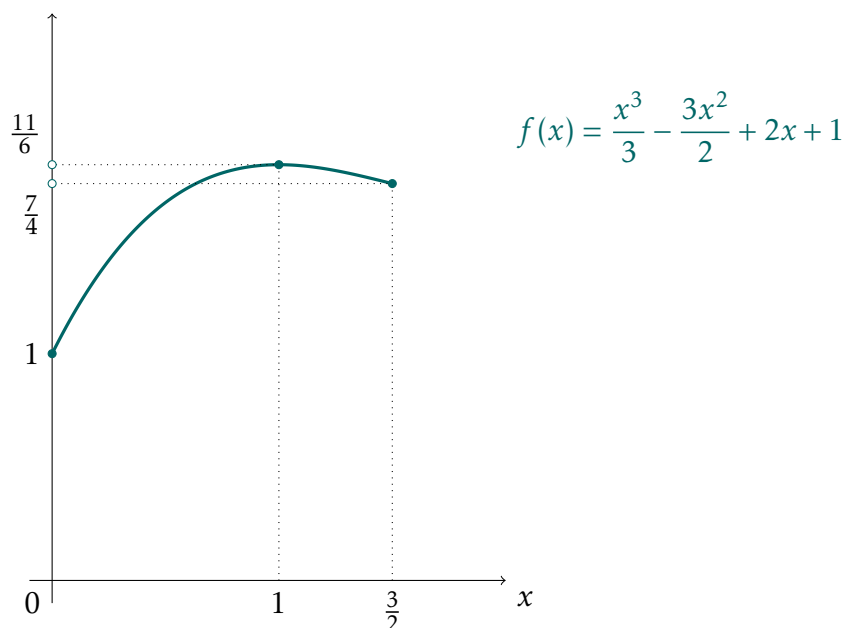
| $x$               | $f(x)$                         |
|-------------------|--------------------------------|
| $a = 0$           | $f(0) = 1$                     |
| $b = \frac{3}{2}$ | $f(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$ |
| $c_1 = 1$         | $f(1) = \frac{11}{6}$          |

**Passo 3.** Identificando os pontos de máximo absoluto e mínimo absoluto na tabela, obtemos:

| $x$           | $f(x)$         | identificação |
|---------------|----------------|---------------|
| 0             | 1              | ← menor valor |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{4}$  |               |
| 1             | $\frac{11}{6}$ | ← maior valor |

Portanto  $x = 0$  é o ponto de mínimo absoluto de  $f$  em  $[0, \frac{3}{2}]$  e o valor mínimo absoluto de  $f$  em  $[0, \frac{3}{2}]$  é 1, e  $x = 1$  é o ponto de máximo absoluto de  $f$  em  $[0, \frac{3}{2}]$  e o valor máximo absoluto de  $f$  em  $[0, \frac{3}{2}]$  é  $\frac{11}{6}$ .

O gráfico dessa função está na figura abaixo:



### 3.7 Concavidade e pontos de inflexão

Já estudamos o crescimento de uma dada função  $f$ , agora é a vez de estudarmos a sua **conca-vidade**. Em termos mais simples, estudar a concavidade de  $f$  é separar o domínio de  $f$  nos pedaços aonde o gráfico de  $f$  tem curvatura no formato  $\cup$  (que chamamos de **convexa**) ou tem curvatura no formato  $\cap$  (que chamamos de **côncava**).

Matematicamente, definimos da seguinte maneira:

**Definição 3.26.** Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que

(a)  $f$  é **convexa** em  $(a, b)$  se para todos  $x, y \in (a, b)$  e  $\alpha \in (0, 1)$  temos

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

(b)  $f$  é **estritamente convexa** em  $(a, b)$  se para todos  $x, y \in (a, b)$  e  $\alpha \in (0, 1)$  temos

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

(c)  $f$  é **côncava** em  $(a, b)$  se para todos  $x, y \in (a, b)$  e  $\alpha \in (0, 1)$  temos

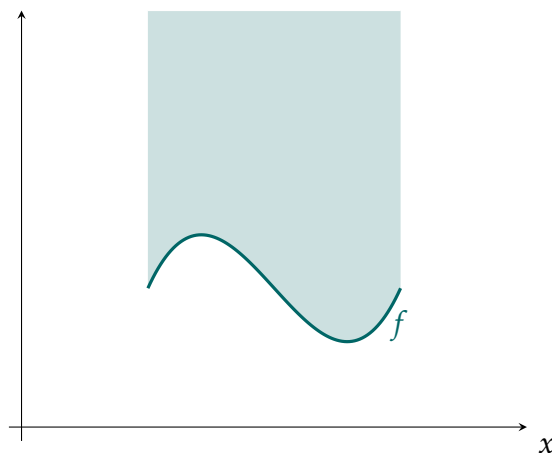
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

(d)  $f$  é **estritamente côncava** em  $(a, b)$  se para todos  $x, y \in (a, b)$  e  $\alpha \in (0, 1)$  temos

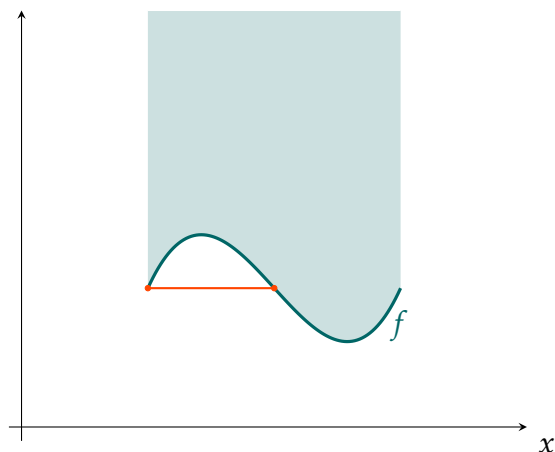
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Note que  $f$  é (estritamente) convexa em  $(a, b)$  se, e somente se,  $-f$  é (estritamente) côncava em  $(a, b)$ . Definições análogas valem para quando  $f$  está definida em intervalos da forma  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  ou  $[a, b]$ .

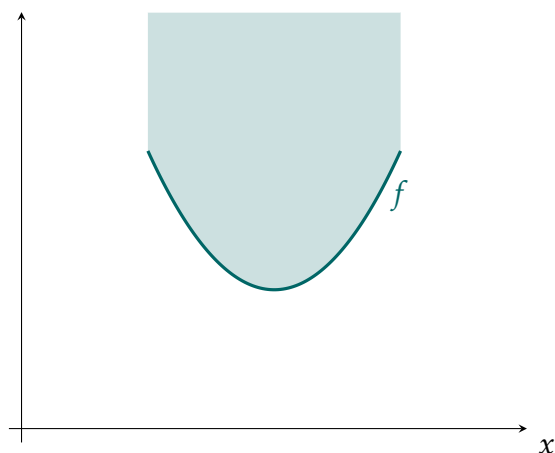
Geometricamente, uma função  $f$  é convexa dados dois pontos no gráfico de  $f$ , o segmento de reta que liga esses dois pontos está acima do gráfico de  $f$ . Consideremos a função dada na figura a seguir, e a região sombreada é a parte do plano que fica acima do gráfico de  $f$ .



No exemplo acima,  $f$  não é convexa! Considere a figura abaixo:



Note que o segmento de reta desenhado ali liga dois pontos do gráfico de  $f$ , mas não está na região acima do gráfico de  $f$ . Um exemplo de função  $f$  convexa é a seguinte:



**Observação:** em alguns livros é comum se referir ao termo *convexo* como *côncava para cima*, e *côncava* como *côncava para baixo*. Muitos acham que o uso desses termos facilita a compreensão desse conteúdo!

O próximo teorema, que apresentaremos sem prova, estabelece condições suficientes para que uma função  $f$  seja estritamente convexa ou estritamente côncava, usando informações sobre sua segunda derivada.

**Teorema 3.27 (TESTE DA CONCAVIDADE PELA DERIVADA SEGUNDA).** Seja  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável até segunda ordem em  $(a, b)$ . Valem as afirmações:

- (i) se  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$  então  $f$  será estritamente convexa em  $(a, b)$ ;
- (ii) se  $f''(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$  então  $f$  será estritamente côncava em  $(a, b)$ .

Veja que esse teste é bem parecido com a análise do crescimento de uma função utilizando o sinal de sua derivada primeira, e os passos para a análise são análogos.

**Exemplo 3.28.** Estude a concavidade de  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

**SOLUÇÃO.** Começamos notando que  $D_f = \mathbb{R}$ . Derivando  $f$  duas vezes chegamos em

$$f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Como  $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , o sinal de  $f''$  é determinado pelo sinal de  $x^2 - 1$ . Como antes, faremos uma visualização gráfica e desenharemos o domínio de  $f$  (nesse caso,  $\mathbb{R}$ ) e nele destacaremos os pontos nos quais  $f''(x) = 0$  (nesse caso, os pontos nos quais  $x^2 - 1 = 0$ , isto é,  $x = \pm 1$ ):



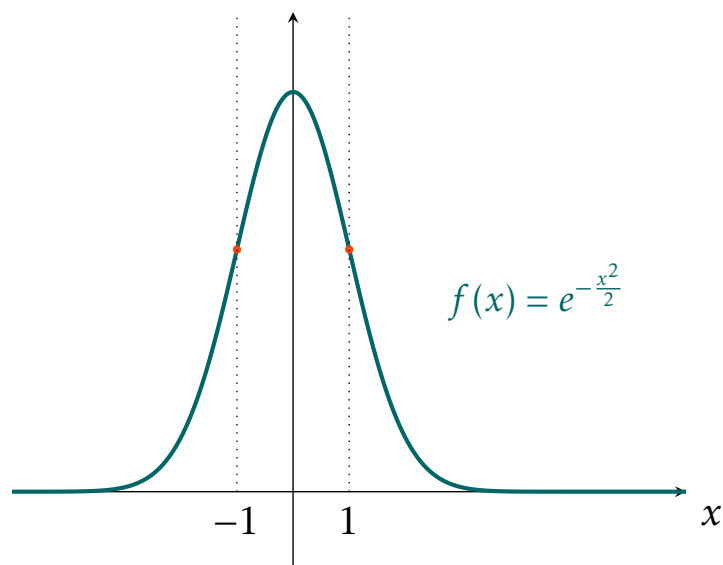
Em cada um dos intervalos restantes (nesse caso, três), o sinal de  $f''$  pode ser verificado avaliando  $f''$  em um ponto daquele intervalo. Analisando esses sinais, chegamos na seguinte representação visual:



Aqui usamos  $\cup$  para representar que no intervalo especificado a função é estritamente convexa e  $\cap$  para estritamente côncava. Com isso, temos a seguinte análise:

- $f$  é estritamente convexa em  $(-\infty, -1)$ ;
- $f$  é estritamente côncava em  $(-1, 1)$ ;
- $f$  é estritamente convexa em  $(1, +\infty)$ .

O gráfico de  $f$  e os intervalos com as diferentes concavidades estão representados na figura abaixo.



Os pontos nos quais a função muda de concavidade são importantes e devem ser destacados, como veremos a seguir.

**Definição 3.29.** Seja  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Diremos que  $x_0$  é **ponto de inflexão de  $f$**  se uma das duas afirmações abaixo é válida:

- $f|_{(a, x_0)}$  é côncava e  $f|_{(x_0, b)}$  é convexa;
- $f|_{(a, x_0)}$  é convexa e  $f|_{(x_0, b)}$  é côncava.

Isto é, um ponto de inflexão é um ponto onde a concavidade da função muda.

Quando  $f$  é diferenciável em  $x_0$  e  $f'(x_0) = 0$ , diremos que  $x_0$  é um **ponto de inflexão horizontal**. Em qualquer outro caso, diremos que  $x_0$  é um ponto de inflexão oblíquo.

**Exemplo 3.30.** Os pontos  $x = -1$  e  $x = 1$  são pontos de inflexão oblíquos de  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

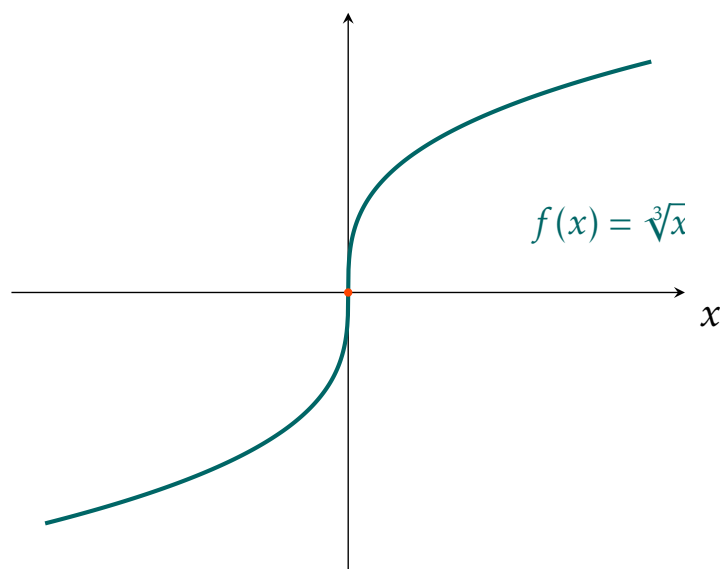
**SOLUÇÃO.** Já vimos acima que  $x = -1$  e  $x = 1$  são pontos nos quais a concavidade de  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  muda de sinal. Agora, como  $f'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ , vemos que  $f$  é diferenciável tanto em  $x = -1$  quanto em  $x = 1$  e além disso  $f'(-1) \neq 0$  e  $f'(1) \neq 0$ , portanto, ambos são pontos de inflexão oblíquos de  $f$ .

**Exemplo 3.31.** O ponto  $x = 0$  é um ponto de inflexão de  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  oblíquo.

**SOLUÇÃO.** Temos  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}}$  e  $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$  para  $x \neq 0$ . A visualização gráfica para o estudo da concavidade de  $f$  fica:



Assim,  $f$  muda de concavidade em  $x = 0$ , e portanto  $x = 0$  é um ponto de inflexão. Como  $f$  não é diferenciável em  $x = 0$ , ele é um ponto de inflexão oblíquo. O gráfico de  $f$  está representado abaixo:



**Exemplo 3.32.** O ponto  $x = 0$  é um ponto de inflexão horizontal de  $f(x) = x^3$ , já que  $f''(x) = 6x$  muda de sinal em  $x = 0$  e  $f'(0) = 0$ .

### 3.8 Esboço de gráficos

Quando juntamos todas as informações do que estudamos até o momento sobre uma função  $f$  (seu domínio, seus zeros, a análise de seu crescimento e concavidade, e o estudo de suas assíntotas) somos capazes de esboçar com relativa semelhança o gráfico de  $f$  sem o auxílio de softwares. Hoje em dia, não há uma razão particularmente importante para fazermos isso, já que é relativamente fácil plotar um gráfico de uma função real (por exemplo, no site [desmos.com](https://www.desmos.com)). Porém, é interessante sabermos analisar todos esses aspectos de uma função, pois podemos nos deparar com problemas que dependem de parâmetros, e plotar o gráfico nesse caso pode não ser sempre simples, ou o gráfico (sem os devidos cálculos matemáticos) não seja de grande ajuda.

A lista a seguir nos dá um método para o esboço de um gráfico para uma função  $f$ .

- (1) Diga quem é o domínio de  $f$  e, se possível (e simples de fazer) encontre os zeros de  $f$ , isto é, os pontos  $x$  para os quais  $f(x) = 0$ .
- (2) Analise o crescimento da função  $f$ , encontre seus pontos críticos e classifique-os. Se possível, calcule o valor de  $f$  nesses pontos críticos.
- (3) Analise a concavidade da função  $f$ , encontre seus pontos de inflexão e classifique-os. Se possível, calcule o valor de  $f$  nesses pontos de inflexão.
- (4) Encontre todas as assíntotas de  $f$  (verticais, horizontais e/ou oblíquas).
- (5) Usando todas as informações anteriores, esboce o gráfico de  $f$ .

**Exemplo 3.33.** Seguindo a lista acima, esboce o gráfico de  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ .

**SOLUÇÃO.** Vamos seguir os passos.

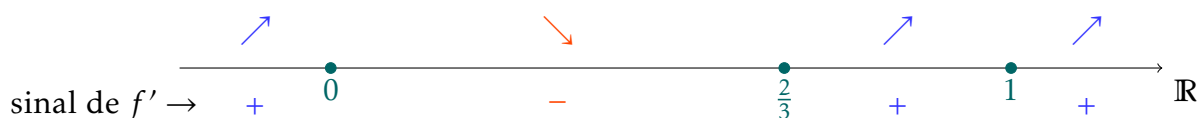
(1) Sabemos que  $D_f = \mathbb{R}$ . Além disso  $f(x) = 0$  se e só se  $x^3 - x^2 = 0$ , ou seja,  $x = 0$  ou  $x = 1$ .

(2) Vamos analisar o crescimento de  $f$ . Veja que

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}} \quad \text{para } x \neq 0, 1.$$

Os pontos críticos de  $f$  são os pontos onde  $f'$  não existe (a saber,  $x = 0$  e  $x = 1$ ), e os pontos nos quais  $f'$  é zero (a saber,  $x = \frac{2}{3}$ ). Ou seja, encontramos três pontos críticos:  $0$ ,  $\frac{2}{3}$  e  $1$ .

O sinal de  $f'$  depende somente do numerador, já que o denominador é positivo. O numerador de  $f'$  é  $3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ . A análise do sinal dessa função nos dá a seguinte representação visual:



Temos então:

- $f$  estritamente crescente em  $(-\infty, 0]$ ;
- $f$  estritamente crescente em  $[0, \frac{2}{3}]$ ;
- $f$  estritamente crescente em  $[\frac{2}{3}, +\infty)$ .

Isso nos dá que:

- $x = 0$  é um ponto de máximo local, com  $f(0) = 0$ ;
- $x = \frac{2}{3}$  é um ponto de mínimo local, com  $f(\frac{2}{3}) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ .
- (item adicional) o ponto crítico  $x = 1$  não é um ponto de extremo local, como podemos ver na representação acima.

(3) Vamos analisar a concavidade de  $f$ . Veja que

$$f''(x) = -\frac{2x^2}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^5}} \quad \text{para } x \neq 0, 1.$$

Veja que  $f''$  não está definida em  $x = 0$  e  $x = 1$ , assim faremos a análise de sinal nos intervalos representados abaixo:



Analisando o sinal de  $f''$  (cuidado que aqui o que não influencia no sinal é o numerador  $2x^2$ , e devemos então analisar o sinal do denominador), obtemos:



Temos então:

- $f$  estritamente convexa em  $(-\infty, 1)$ ;
- $f$  estritamente côncava em  $(1, +\infty)$ .

Isso nos dá que:

- $x = 1$  é o único ponto de inflexão de  $f$ , e ele é um ponto de inflexão oblíquo, já que  $f$  não é diferenciável em  $x = 1$ .

(4) Vamos analisar as assíntotas de  $f$ .

**Assíntotas verticais.** Como  $D_f = \mathbb{R}$  e  $f$  é contínua, segue da Proposição 1.84 que  $f$  não possui assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais. Veja que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2(x-1)} = +\infty,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2(x-1)} = -\infty,$$

o que mostra que  $f$  também não possui assíntotas horizontais.

**Assíntotas oblíquas.** Vamos fazer o procedimento para encontrar assíntota oblíqua em  $+\infty$ . Calculamos

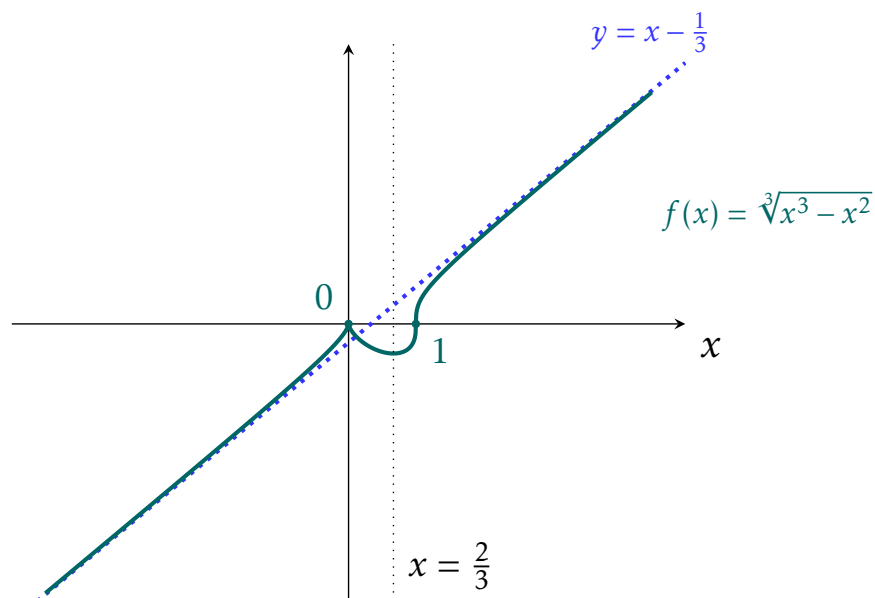
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

Como  $m = 1$  é um número real, calculamos

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x) \frac{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

e obtemos que a reta  $y = x - \frac{1}{3}$  é assíntota oblíqua de  $f$  em  $+\infty$ . Para o cálculo desse último limite usamos o fato de que  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$  e tomamos  $a = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$  e  $b = x$ . Repetindo o processo para  $-\infty$  (note que os limites acima não mudam se trocarmos  $x \rightarrow +\infty$  por  $x \rightarrow -\infty$ ) obtemos que a reta  $y = x - \frac{1}{3}$  é também assíntota oblíqua de  $f$  em  $-\infty$ .

(5) Por fim, esboçamos o gráfico de  $f$  com as informações obtidas.



### 3.9 Problemas de maximização e minimização

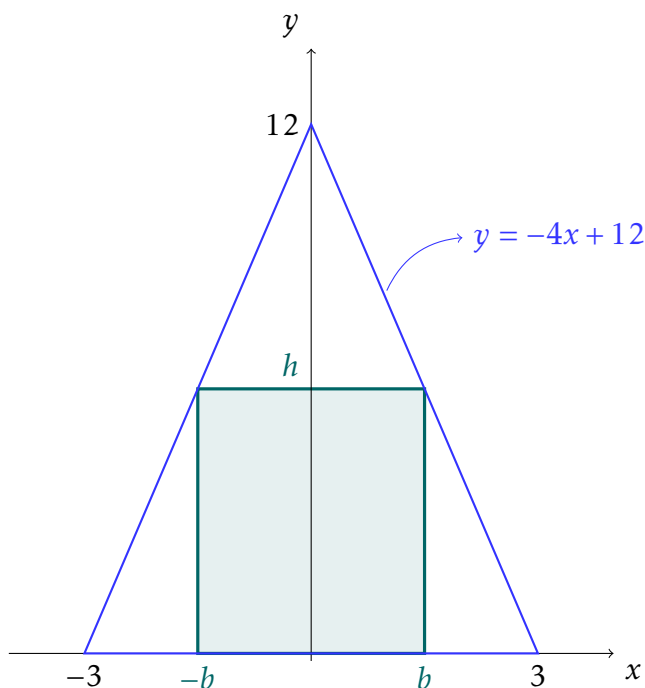
Os métodos desenvolvidos na Seção 3.6 para encontrar os pontos críticos e classificá-los, além do Método do Intervalo Fechado para encontrar os pontos máximos e mínimos absolutos, podem ser aplicados para resolver problemas práticos.

É nossa tarefa também, dar o primeiro passo para compreender o problema e convertê-lo em um problema matemático, estabelecendo qual é a função que deverá ser estudada.

Abordaremos esse assunto por meio de exemplos.

**Exemplo 3.34.** Um triângulo isósceles tem uma base de 6 unidades e uma altura de 12 unidades. Encontre o retângulo que está dentro do triângulo, que tem um dos lados sobre a base do triângulo, e que possui a maior área possível.

**SOLUÇÃO.** Introduzimos um sistema de coordenadas cartesianas de modo a que a base do triângulo esta sobre o eixo  $x$ , e que o eixo  $y$  divida o triângulo na metade. Claramente, o retângulo buscado (com base de tamanho  $2b$  e altura  $h$ ) está dentre os que têm os vértices superiores em contato com o triângulo e que são simétricos em relação o eixo  $y$ , como mostra a figura abaixo:



Logo, nosso problema é determinar qual desses retângulos possui a maior área. A área desse retângulo é dada por

$$A = 2bh,$$

que é uma função que depende de duas variáveis,  $b$  e  $h$ . Precisamos eliminar uma delas se quisermos aplicar o que aprendemos. Veja que a altura  $h$  é obtida a partir de  $b$ , pois está sobre a reta  $y = -4x + 12$ , isto é,  $h = -4b + 12$ . Dessa maneira, a área  $A$  do retângulo é uma função da variável  $b$  (que varia de 0 a 3), e é dada por

$$A(b) = 2b(-4b + 12) = 24b - 8b^2 \quad \text{para } 0 \leq b \leq 3.$$

Nossa tarefa é encontrar o ponto de máximo absoluto da função contínua  $A$  no intervalo fechado  $[0, 3]$  e, para isso, usaremos o Método do Intervalo Fechado.

**Passo 1.** Encontrar os pontos críticos de  $A$  em  $(0, 3)$ .

Veja que  $A'(b) = 24 - 16b$ , e  $A'(b) = 0$  se e só se  $b = \frac{3}{2}$ . Logo o único ponto crítico de  $A$  em  $(0, 3)$  é  $b = \frac{3}{2}$ .

**Passo 2.** Montar a tabela com as fronteiras do intervalo (os pontos 0 e 3), os pontos críticos encontrados no Passo 1 (no caso, somente o ponto  $b = \frac{3}{2}$ ) e o valor de  $A$  em cada um desses pontos:

| $b$           | $A(b)$                |
|---------------|-----------------------|
| 0             | $A(0) = 0$            |
| 3             | $A(3) = 0$            |
| $\frac{3}{2}$ | $A(\frac{3}{2}) = 18$ |

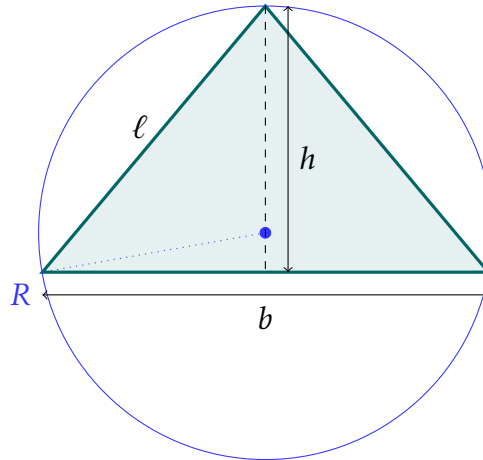
**Passo 3.** Identificar o maior valor na coluna da esquerda:

| $b$           | $A(b)$ | identificação |
|---------------|--------|---------------|
| 0             | 0      |               |
| 3             | 0      |               |
| $\frac{3}{2}$ | 18     | ← maior valor |

o que nos dá que quando  $b = \frac{3}{2}$  a área do retângulo é máxima, isto é, nosso retângulo tem tamanho de base de  $2b = 3$  unidades e altura  $h = -4b + 12 = 6$  unidades, com respectiva área de 18 unidades<sup>2</sup>.

**Exemplo 3.35.** Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que esteja inscrito na circunferência de raio  $R$ , isto é, os três vértices do triângulo estão sobre a circunferência.

**SOLUÇÃO.** Rotacionando a figura, se necessário, podemos assumir que a base do triângulo seja horizontal  $x$ . Denotemos por  $h$  a altura do triângulo,  $b$  a sua base e  $\ell$  a medida de um dos lados congruentes, como mostra a figura abaixo:



A área do triângulo é  $A = \frac{bh}{2}$  onde a base  $b$  e a altura  $h$  podem variar entre 0 e  $2R$ . Novamente temos uma função em duas variáveis,  $b$  e  $h$ , e precisamos nos livrar de uma delas. Utilizando Teorema de Pitágoras temos

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (h - R)^2 = R^2 \quad \text{e portanto} \quad b = 2\sqrt{2Rh - h^2}.$$

Assim, substituindo isso na expressão da área, ela fica dependente somente da variável  $h$ , o que nos dá

$$A(h) = h\sqrt{2Rh - h^2} \quad \text{para } 0 \leq h \leq 2R.$$

Precisamos então *maximizar* a função  $A$  no intervalo fechado  $[0, 2R]$ , e como antes usaremos o Método do Intervalo Fechado.

Temos

$$A'(h) = \frac{h(3R - 2h)}{\sqrt{2Rh - h^2}},$$

e  $h = \frac{3}{2}R$  é o único ponto crítico de  $A$  no intervalo aberto  $(0, 2R)$ . A tabela nos dá

| $h$            | $A(h)$                 | identificação |
|----------------|------------------------|---------------|
| 0              | 0                      | ← maior valor |
| $2R$           | 0                      |               |
| $\frac{3R}{2}$ | $\frac{3\sqrt{3}R}{4}$ |               |

Portanto  $x = \frac{3R}{2}$  é ponto de máximo absoluto de  $A$  em  $[0, 2R]$ , e as dimensões do triângulo procurado são

$$\text{altura } h = \frac{3R}{2} \quad \text{e base } b = \sqrt{3}R.$$

Note que isso nos dá

$$\ell^2 = \frac{9}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2 = 3R^2,$$

isto é,  $\ell = \sqrt{3}R$  e o triângulo com a maior área é o equilátero.

**Exemplo 3.36.** Uma empresa de fabricação de latas de tinta, feitas de metal e com capacidade para um litro de tinta, precisa encontrar as dimensões da lata que minimizarão o custo do metal para produzi-la. Assumindo que o custo do metal é o mesmo para todas as partes da lata (lateral, fundo e tampa), encontre essas dimensões.

**SOLUÇÃO.** Sejam  $r$  o raio da lata e  $h$  a altura em cm. Para minimizar o custo do material minimizamos a área da superfície total (lateral, fundo e tampa) dada por  $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ . Agora, como o volume  $V = \pi r^2 h$  tem  $1000 \text{ cm}^3$ , temos  $\pi r^2 h = 1000$  ou seja  $h = \frac{1000}{\pi r^2}$ . Substituindo na expressão da área total obtemos  $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ . Logo, nosso problema é minimizar a função

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \quad \text{para } r > 0.$$

Veja que aqui não utilizaremos o Método do Intervalo Fechado, pois o intervalo de definição da função  $S$  é  $(0, +\infty)$ .

Temos

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2} \quad \text{para } r > 0.$$

O ponto crítico é  $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ , e a análise do crescimento de  $S$  nos dá:



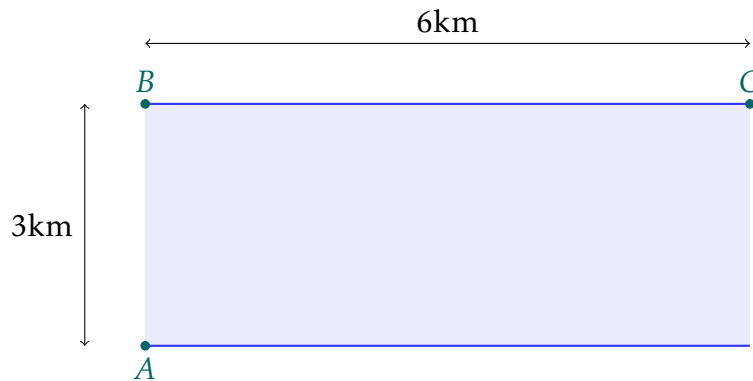
Concluimos que  $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$  é um ponto de mínimo local de  $S$ . Vendo que  $S$  é estritamente decrescente antes desse ponto, e estritamente crescente depois dele, vemos que ele é, na verdade, um ponto de mínimo absoluto de  $S$ .

Logo as dimensões da lata que exigem menor quantidade de material são:

$$\text{raio } r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \quad \text{e altura } h = \frac{1000}{\pi} \left( \frac{\pi}{500} \right)^{2/3} = 2 \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r,$$

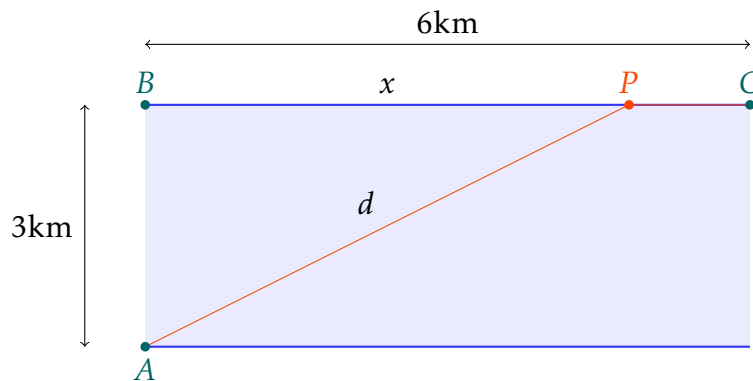
e veja que a altura deve ser igual ao diâmetro da tampa lata.

**Exemplo 3.37.** Os pontos  $A$  e  $B$  estão em lados opostos de um rio reto com 3km de largura. O ponto  $C$  está na mesma margem que  $B$ , mas 6km rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de  $A$  até  $C$ , conforme a figura abaixo.



Se o custo por km de cabo é 25% maior sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo para que a companhia tenha o menor custo?

**SOLUÇÃO.** Seja  $P$  um ponto na mesma margem que  $B$  e  $C$  e entre  $B$  e  $C$ , de tal forma que o cabo será estendido de  $A$  para  $P$  e deste para  $C$ , e denotaremos por  $x$  (em km) a distância de  $B$  a  $P$ , como na figura abaixo:



Assim,  $x$  pode variar entre 0 e 6, e a distância entre  $P$  e  $C$  é de  $6 - x$  km. A distância  $d$  entre  $A$  e  $P$  pode ser obtida a partir de  $x$ , usando o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = x^2 + 9 \quad \implies \quad d = \sqrt{x^2 + 9}.$$

Denotaremos por  $c$  o custo por km do cabo em terra, e assim o custo do km do cabo por água é  $\frac{5c}{4}$ . O custo total do cabeamento é então obtido como uma função de  $x$ , descrita por

$$C(x) = \frac{5c}{4} \sqrt{x^2 + 9} + c(6 - x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 6,$$

que é uma função contínua definida num intervalo fechado. Usaremos então o Método do Intervalo Fechado para encontrar o valor mínimo para o custo.

Temos

$$C'(x) = \frac{5cx}{4\sqrt{x^2+9}} - c,$$

e  $C'(x) = 0$  se, e somente se,  $x = \pm 4$ . Destes, apenas  $x = 4$  está no intervalo aberto  $(0, 6)$ , e é o único ponto crítico de  $C$  que consideraremos. Montando nossa tabela, obtemos:

| $x$ | $C(x)$                  | identificação |
|-----|-------------------------|---------------|
| 0   | $\frac{39c}{4}$         |               |
| 6   | $\frac{15\sqrt{5}c}{4}$ |               |
| 4   | $\frac{33c}{4}$         | ← menor valor |

Logo para minimizar o custo, devemos estender o cabo sob a água de  $A$  até o ponto  $P$  que dista 4km de  $B$  e estender o cabo por terra nos 2km restantes de  $P$  até  $C$ .

**Observação.** Aqui usamos o fato de que  $15\sqrt{5} > 33$ . Para ver isso sem o auxílio de uma calculadora podemos ver, por exemplo, que  $(15\sqrt{5})^2 = 1125$  e  $33^2 = 1089$ . Logo  $(15\sqrt{5})^2 > 33^2$ , e tirando a raiz obtemos o que queríamos.

### 3.10 Regras de L'Hospital

As regras de L'Hospital se aplicam a cálculos de limites que apresentam as indeterminações  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ . Elas representam uma importante aplicação da derivada e facilitam o cálculo de muitos limites. Porém, duas observações são mais do que necessárias:

- ✓ é preciso cuidado para utilizar as Regras de L'Hospital. Precisamos nos assegurar que estamos nas condições necessárias para usá-las;
- ✓ as Regras de L'Hospital são úteis em inúmeros limites, mas é necessário usá-las com sabedoria. Às vezes elas complicam mais dos que ajudam, e alguns limites podem ser facilmente resolvidos sem elas.

**Teorema 3.38 (REGRAS DE L'HOSPITAL).** Sejam  $f$  e  $g$  funções.

- Seja  $x_0 \in \mathbb{R}$  e assuma que existe  $r > 0$  tal que  $f, g$  são diferenciáveis em  $J_{x_0, r}$ , com  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in J_{x_0, r}$ . Assuma ainda que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  e que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ exista} \quad \text{ou que} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Seja  $x_0 \in \mathbb{R}$  e assumamos que existe  $r > 0$  tal que  $f, g$  são diferenciáveis em  $J_{x_0, r}$ , com  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in J_{x_0, r}$ . Assumamos ainda que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$  e que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ exista} \quad \text{ou que} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Um importante comentário sobre essas regras precisa ser feito:

- ✓ com as hipóteses análogas as Regras de L'Hospital continuam válidas se trocamos  $x \rightarrow x_0$  por  $x \rightarrow x_0^+$ , ou por  $x \rightarrow x_0^-$ , ou por  $x \rightarrow +\infty$  ou por  $x \rightarrow -\infty$ .

**Exemplo 3.39.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{x}$ .

**SOLUÇÃO.** Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , pela Regra de L'Hospital temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{2x})'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^{2x}}{1} = -2.$$

**Exemplo 3.40.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .

**SOLUÇÃO.** Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , pela Regra de L'Hospital temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

**Exemplo 3.41.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ .

**SOLUÇÃO.** Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , pela Regra de L'Hospital temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

**Exemplo 3.42.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$ .

**SOLUÇÃO.** Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x - x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ , pela Regra de L'Hospital temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 x - 1 = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$  usamos mais uma vez a Regra de L'Hospital para obter

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}.$$

Como ainda o numerador e o denominador tendem a zero, usamos pela terceira vez a Regra de L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2 \sec^4 x}{6} = \frac{1}{3}.$$

As regras de L'Hospital se aplicam a indeterminações da forma  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$ . As outras formas de indeterminação ( $0 \cdot \infty$ ,  $+\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  e  $1^\infty$ ) podem ser reduzidas a estas através de manipulações algébricas.

**Exemplo 3.43.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que é uma indeterminação da forma  $0 \cdot -\infty$ . Escrevendo  $x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$  obtemos uma indeterminação da forma  $\frac{-\infty}{\infty}$ . Pela Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0.$$

**Exemplo 3.44.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que é uma indeterminação da forma  $\infty - \infty$ . Escrevendo

$$\left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x},$$

obtemos uma indeterminação da forma  $\frac{0}{0}$  e podemos aplicar a Regra de L'Hospital. Assim

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x - 1) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x + x \cos x) = 0$ , usamos a Regra de L'Hospital uma

vez mais, e obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0,$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0.$$

**Exemplo 3.45.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que é uma indeterminação da forma  $0^0$ . Escrevemos  $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ , e como a função exponencial é contínua, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

**Exemplo 3.46.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que é uma indeterminação da forma  $\infty^0$ . Escrevemos  $x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ , e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}.$$

Observe que temos uma indeterminação da forma  $\frac{\infty}{\infty}$ , então pela Regra de L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

### Demonstração do Segundo Limite Fundamental

Usando as Regras de L'Hospital, conseguimos apresentar a demonstração do Segundo Limite Fundamental.

*Demonstração do Segundo Limite Fundamental.* Escrevendo

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)},$$

temos no expoente uma indeterminação da forma  $0 \cdot \infty$ , que pode ser transformada em uma do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ , fazendo

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Assim, pela Regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1,$$

e da continuidade da função exponencial obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = e^1 = e.$$

□

### 3.11 Polinômios de Taylor de primeira e segunda ordens

Os polinômios são as funções mais fáceis de manipular, já que os valores das funções polinomiais podem ser obtidos através de simples adições e multiplicações. Parece natural, portanto, aproximar funções mais complicadas por funções polinomiais.

Já fizemos isso com polinômio de grau 1, lembra? Na Seção 3.1 estudamos a **aproximação linear** (dada pela equação (3.1)), que aproximava o valor de  $f(x + dx)$  por  $f(x) + f'(x)dx$  para  $dx$  pequeno. Para uma dada função  $f$  diferenciável e  $x_0 \in D_f$ , o polinômio

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é chamado de **polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em torno de  $x_0$** . Vamos estudar esse polinômio, e também o análogo de ordem 2, com mais cuidado nessa seção.

**Definição 3.47 (Polinômio de Taylor de ordem 1).** Sejam  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $x_0 \in [a, b]$ . O polinômio

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é chamado de **polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em torno de  $x_0$** .

Vamos estudar algumas propriedades (que já sabemos em partes, da Seção 3.1) de  $P_1$ . Note primeiramente que

$$P_1(x_0) = f(x_0) \quad \text{e} \quad P_1'(x_0) = f'(x_0),$$

isto é,  $P_1$  passa também pelo ponto  $(x_0, f(x_0))$  e tem a mesma inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  nesse ponto.

Definimos o erro que se comete ao aproximar  $f(x)$  por  $P_1(x)$  por

$$E_1(x) = f(x) - P_1(x).$$

Observemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0,$$

ou seja, quando  $x \rightarrow x_0$ , o erro  $E_1(x)$  tende a zero *mais rapidamente* do que  $x - x_0$ . Com isso, obtemos também que

$$f(x) \approx P_1(x) \quad \text{para } x \text{ próximo de } x_0.$$

**Exemplo 3.48.** O polinômio de Taylor de grau 1 da função  $f(x) = (1 - x)^{-2}$  ao redor do ponto  $x_0 = 0$  é  $P_1(x) = 1 + 2x$ .

**Exemplo 3.49.** Usando o polinômio de Taylor de ordem 1, dê um valor aproximado para os números  $\sqrt{3,98}$  e  $\sqrt{4,05}$ .

**SOLUÇÃO.** Vamos usar a função  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $x_0 = 4$ . O polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em torno de  $x_0 = 4$  é

$$P_1(x) = f(4) + f'(4)(x - 4) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{x}{4} + 1.$$

Assim

$$\sqrt{3,98} = f(3,98) \approx P_1(3,98) = 1,995$$

e

$$\sqrt{4,05} = f(4,05) \approx P_1(4,05) = 2,0125.$$

**Exemplo 3.50.** Usando o polinômio de Taylor de ordem 1, calcule um valor aproximado para  $e^{0,03}$ .

**SOLUÇÃO.** O polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f(x) = e^x$  em torno de  $x_0 = 0$  é dado por

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + x.$$

Assim

$$e^{0,03} = f(0,03) \approx P_1(0,03) = 1,03.$$

Já sabemos que podemos aproximar o valor de  $f(x)$  por  $P_1(x)$  quando  $x$  está próximo de  $x_0$ , mas uma pergunta que precisa ser respondida é: qual o erro máximo que estamos cometendo ao fazer essa aproximação? Dito de outra maneira: qual o valor máximo de  $E_1(x)$ ?

Veremos agora, sem provas, uma fórmula para o cálculo exato do erro cometido ao aproximarmos  $f(x)$  por  $P_1(x)$ , e também nos dá uma estimativa para o erro máximo cometido.

**Teorema 3.51.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável e  $x_0 \in [a, b]$ . Então dado  $x \in [a, b]$  existe  $c$  entre  $x$  e  $x_0$  tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Além disso, se  $|f''(t)| \leq M$  para todo  $t \in [a, b]$  então

$$|E_1(x)| \leq \frac{M|x - x_0|^2}{2} \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

**Exemplo 3.52.** Dê uma estimativa máxima para o erro cometido ao aproximar  $e^{0,03}$  usando o polinômio de Taylor de ordem 1.

**SOLUÇÃO.** No Exemplo 3.50 usamos o polinômio de Taylor de  $f(x) = e^x$  em torno de  $x_0 = 0$  para encontrar  $e^{0,03} \approx 1,03$ . Usaremos o intervalo  $[a, b] = [0, 1]$  (poderia ser qualquer outro intervalo que tivesse o zero). Veja que para  $t \in [0, 1]$  temos

$$|f''(t)| = e^t \leq e \leq 3.$$

Do Teorema 3.51 sabemos que

$$|E_1(0,03)| \leq \frac{M|0,03|^2}{2} = \frac{3}{2}(0,03)^2 = 0,00135,$$

e este é o erro cometido, que nos diz que pelo menos até a segunda casa decimal estamos corretos.

**Observação.** Usando uma calculadora (que usa aproximações melhores) obtemos

$$e^{0,03} \approx 1,030454533953517,$$

e vemos que comparando-a com a nossa aproximação temos

$$1,030454533953517 - 1,03 = 0,000454533953517 < 0,00135,$$

que é a estimativa que encontramos para o erro, e de fato nossa aproximação estava correta até a segunda casa decimal (na verdade, estávamos corretos até a terceira casa decimal nesse caso).

**Exemplo 3.53.** Calcule o valor de  $\sqrt{15,995}$  e dê uma estimativa máxima para o erro cometido.

**SOLUÇÃO.** Usando  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 16$ , e  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , o polinômio de Taylor de  $f$  em torno de 16 é

$$P_1(x) = 4 + \frac{1}{8}(x - 16) = \frac{x}{8} + 2.$$

Temos assim

$$\sqrt{15,995} = f(15,995) \approx P_1(\sqrt{15,995}) = 3,999375.$$

Agora  $f''(t) = -\frac{1}{4\sqrt{t}^3}$  e para todo  $t \geq 1$  temos

$$|f''(t)| \leq \frac{1}{4},$$

e uma estimativa para o erro cometido é

$$|E_1(15,995)| \leq \frac{1}{8}|15,995 - 16|^2 = \frac{1}{8}(0,005)^2 = 0,000003125,$$

ou seja, o aproximação está correta até, pelo menos, a quinta casa decimal.

**Observação.** Utilizando uma calculadora encontramos

$$\sqrt{15,995} \approx 3,999374951164244,$$

e vemos realmente que nossa aproximação estava correta *somente* até a quinta casa decimal. Essa é uma das limitações do polinômio de Taylor de ordem 1: apesar de útil, ele não nos fornece aproximações muito precisas, a não ser que estejamos com  $x$  realmente muito próximo de  $x_0$ .

Por esses exemplos, nos motivamos a buscar aproximações para  $f$  que sejam melhores do que o polinômio de Taylor de ordem 1. Para isso, suponhamos que a função  $f$  seja duas vezes diferenciável e vamos buscar um polinômio  $p$ , de grau no máximo 2, tal que

$$f(x_0) = p(x_0), \quad f'(x_0) = p'(x_0) \text{ e } f''(x_0) = p''(x_0).$$

Escrevendo  $p$  na forma  $p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2$ , vamos usar as informações acima para encontrar os valores dos coeficientes  $c_0, c_1$  e  $c_2$ . Temos:

- $f(x_0) = p(x_0) = c_0$ ;
- $f'(x_0) = p'(x_0) = c_1$ ;
- $f''(x_0) = p''(x_0) = 2c_2$ , logo  $c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$ .

Concluimos, portanto, que  $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ .

**Definição 3.54 (Polinômio de Taylor de ordem 2).** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável e  $x_0 \in [a, b]$ . O polinômio

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

é chamado de **polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f$  em torno de  $x_0$** .

Assim como anteriormente, definimos o erro que se comete ao aproximar  $f(x)$  por  $P_2(x)$  por

$$E_2(x) = f(x) - P_2(x).$$

Observemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2},$$

e, utilizando as Regras de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - f''(x_0) \right] = 0,$$

ou seja, o erro  $E_2(x)$  tende a zero *mais rapidamente* que  $(x - x_0)^2$  (o que é bastante melhor do que o erro  $E_1(x)$ ).

**Exemplo 3.55.** O polinômio de Taylor de ordem 2 da função  $f(x) = e^x$  ao redor do ponto  $x_0 = 0$  é  $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ .

Assim como para a ordem 1, temos um teorema que nos dá uma expressão exata para o erro, bem como uma estimativa para o erro máximo cometido ao aproximar  $f(x)$  por  $P_2(x)$ .

**Teorema 3.56 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange).** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função três vezes diferenciável e  $x_0 \in [a, b]$ . Então dado  $x \in [a, b]$  existe  $c$  entre  $x$  e  $x_0$  tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Além disso, se  $|f'''(t)| \leq M$  para todo  $t \in [a, b]$  então

$$|E_2(x)| \leq \frac{M|x - x_0|^3}{3!} \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

**Exemplo 3.57.** Utilizando polinômio de Taylor de ordem 2 calcule um valor aproximado para  $\ln(1,03)$  e encontre uma estimativa para o erro cometido ao fazer essa aproximação.

**SOLUÇÃO.** O polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f(x) = \ln x$  em volta de  $x_0 = 1$  é

$$P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$

Logo

$$\ln(1,03) = f(1,03) \approx P_2(1,03) = 0,03 - \frac{1}{2}(0,03)^2 = 0,02955.$$

Vamos agora encontrar uma estimativa para o erro  $E_2(1,03)$  cometido ao fazermos essa aproximação. Temos  $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$  e assim

$$|f'''(t)| \leq 2 \quad \text{para todo } t \geq 1.$$

Pelo teorema acima, temos

$$|E(1,03)| \leq \frac{2}{3!}(0,03)^3 = \frac{1}{3}(0,03)^3 = 9 \times 10^{-6} < 10^{-5},$$

ou seja, estamos corretos até a quinta casa decimal.

**Observação.** Usando uma calculadora, vemos que

$$\ln(1,03) \approx 0,029558802241544,$$

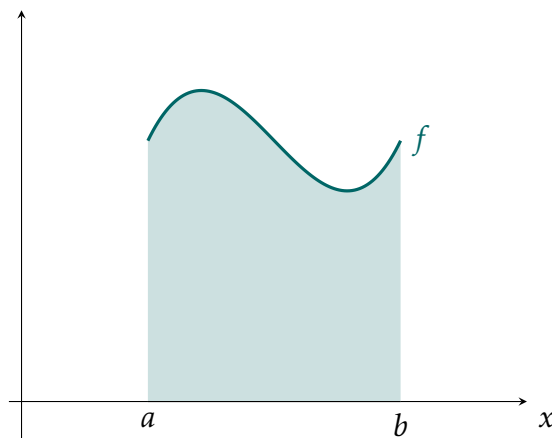
e nossa aproximação está correta *somente* até a quinta casa decimal. A diferença desse exemplo para o Exemplo 3.53 é que lá 15,995 está bem mais próximo de 16 do que 1,03 está de 1. Aqui conseguimos a aproximação na quinta casa decimal, mas com um número bem *mais longe* de  $x_0$  do que tínhamos no caso do polinômio de Taylor de ordem 1.

# Capítulo 4

## Integrais

### 4.1 A integral de Riemann e o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

A motivação para a definição da integral é resolver o problema de se calcular a área da região que fica entre o eixo  $x$  e o gráfico de uma função  $f: [a, b]$ , como por exemplo, a que está representada na figura abaixo:



Para entender um problema matemático, é sempre bom começar compreendendo o problema num exemplo simples. Muitas teorias consolidadas atualmente começaram exatamente assim: alguém sentou para entender um pequeno problema, com muito esforço e trabalho conseguiu resolvê-lo, e no processo acabou descobrindo muito mais do que se imaginava inicialmente.

Aqui, porém, como o procedimento que leva ao cálculo da área como na figura acima já é consolidado, mostraremos como ele funciona de maneira geral, pois exemplo muito simples nos dariam figuras que já sabemos calcular a área, e exemplos um pouco mais complicados

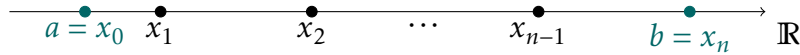
resultam num esforço igual (ou maior) do que entender o método já na sua forma mais geral.

Para construir a integral, começamos com a seguinte definição: uma **partição** de um intervalo fechado  $[a, b]$  é uma divisão do intervalo  $[a, b]$ , isto é, é um conjunto de pontos

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\},$$

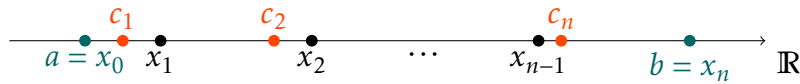
onde  $n \in \mathbb{N}$ . Nesse caso, escrevemos  $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ .

Uma partição  $P$  de  $[a, b]$  divide o intervalo em  $n$  subintervalos, como na figura abaixo:



Os intervalos são  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ , ...,  $[x_{n-1}, x_n]$ . Definimos  $\Delta_P = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ , que é o maior comprimento dentre os comprimentos  $x_i - x_{i-1}$  dos subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  da partição  $P$ , e é chamada de **malha de  $P$** .

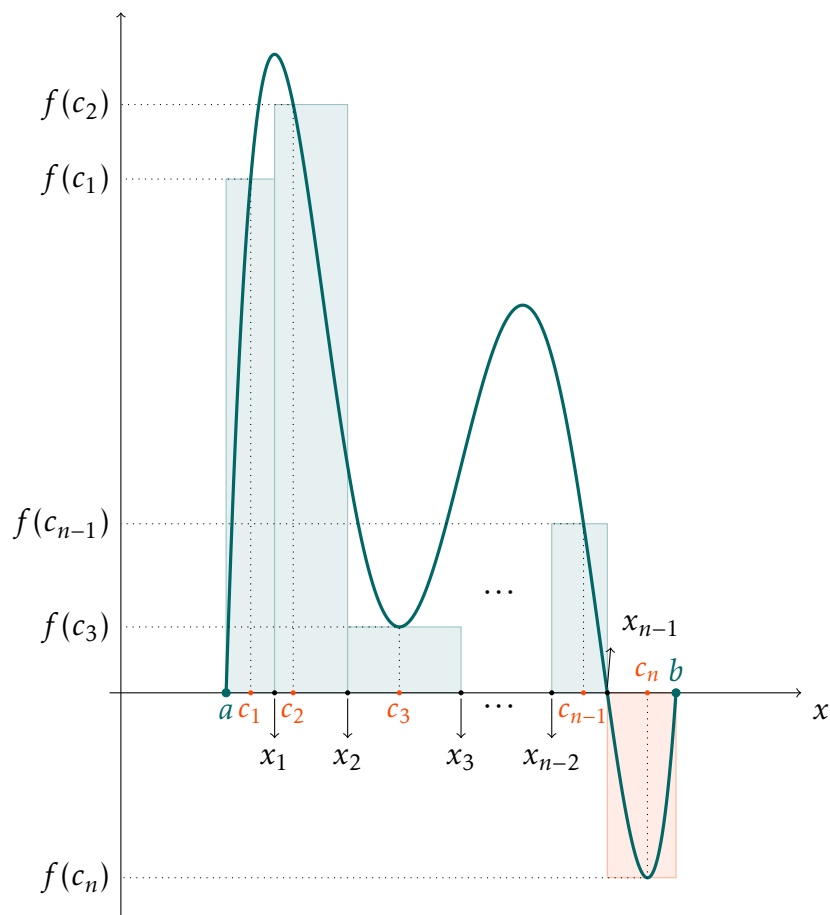
Dada uma partição  $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ , uma **marcação** de  $P$  é uma escolha de pontos  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , onde  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  para  $i = 1, \dots, n$ . Isto é, escolhemos um ponto  $c_i$  em cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , como exemplifica a figura abaixo:



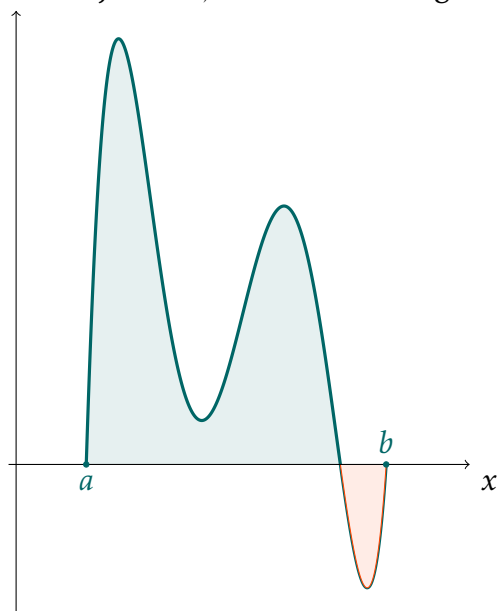
Denotaremos uma marcação de  $P$  por  $c = \{c_i\}_{i=1}^n$ .

**Definição 4.1.** Sejam  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $P = \{x_i\}_{i=0}^n$  uma partição de  $[a, b]$  e  $c = \{c_i\}_{i=1}^n$  uma marcação de  $P$ . A **soma de Riemann** de  $f$  em relação à partição  $P$  com marcação  $c$  é dada por

$$S(f, P, c) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$



A soma de Riemann  $S(f, P, c)$  é igual à soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo  $x$  (em cor verde claro) menos a soma das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo  $x$  (em cor laranja claro). Considere a seguinte figura:



Denotamos por  $A_1$  a área da região verde e  $A_2$  a área da região laranja. Vemos que, na soma de Riemann, se tomarmos a partição com malha muito pequena, aproximamos bem o valor  $A = A_1 - A_2$ , isto é,

$$S(f, P, c) \approx A$$

quando a malha de  $P$  é muito pequena.

Quanto menor a malha, melhor é a aproximação. Escrevendo isso na linguagem que conhe-

cegos de limites, temos

$$\lim_{\Delta_P \rightarrow 0} S(f, P, c) = A.$$

Uma observação importante é que devemos ter essa aproximação *independentemente* das marcações escolhidas. Nem sempre isso é possível! Existem funções “esquisitas” cuja região que fica embaixo de seu gráfico é tão complicada que é impossível definir com precisão o que é sua área. As funções cujo processo acima nos dá um valor são chamadas de funções **integráveis**. Apresentamos agora a definição formal de integral:

**Definição 4.2.** Diremos que uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **Riemann integrável**, ou simplesmente **integrável**, se existir um número  $A \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{\Delta_P \rightarrow 0} S_R(f, P, c) = A,$$

independente da marcação  $c$  escolhida em cada partição. Isto é, se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|S(f, P, c) - A| < \varepsilon,$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  com  $\Delta_P < \delta$  e qualquer que seja a marcação  $c$  escolhida para  $P$ . Neste caso, escrevemos

$$A = \int_a^b f(x) dx,$$

que é chamada **integral definida** ou simplesmente **integral** de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

Dizemos que uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **contínua por partes** se existe uma partição  $P = (x_i)$  de  $[a, b]$  tal que  $f|_{(x_i, x_{i+1})}$  é contínua para todo  $i = 0, \dots, n-1$ , e também os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$  existem (lembrando que para  $x_0 = a$  somente temos o limite à direita, e para  $x_n = b$  temos somente o limite à esquerda). Em particular, toda função contínua é contínua por partes. Usaremos, sem demonstração, a seguinte propriedade.

**Teorema 4.3.** Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua por partes então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

O resultado acima nos diz que as funções “usuais” que encontraremos nesse curso são integráveis. Quando  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável, definiremos

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

**Proposição 4.4 (PROPRIEDADES DA INTEGRAL).** Sejam  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis. Temos as seguintes propriedades:

(a) A integral é **única**, isto é,  $f$  tem no máximo uma integral definida.

(b) A integral é **linear**, isto é, para todo  $k \in \mathbb{R}$ , a função  $f + kg$  é integrável e

$$\int_a^b (f(x) + kg(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + k \int_a^b g(x) dx.$$

(c) A integral é **positiva**, isto é, se  $f(x) \geq 0$ , para todo  $x \in [a, b]$ , então  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . Em particular, se  $g(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , então

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

(d) A integral é **aditiva**, isto é, se existirem as integrais  $\int_a^c f(x) dx$  e  $\int_c^b f(x) dx$ , com  $c \in [a, b]$ , então existirá a integral  $\int_a^b f(x) dx$  e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Isto quer dizer que se  $f$  for integrável em todos os subintervalos de um intervalo  $[a, b]$ , então  $f$  será integrável em  $[a, b]$ . Em particular, quando  $c = a$ , teremos  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .

## O Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

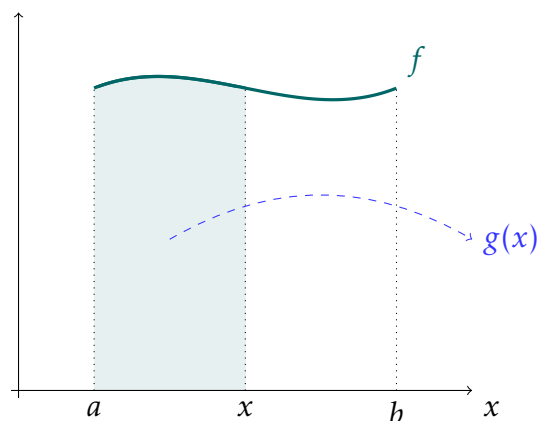
O **Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo** estabelece uma conexão entre as integrais e as derivadas, e é, como seu próprio nome diz, fundamental para o Cálculo. Consideremos uma função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $f(t) \geq 0$  como, por exemplo, a função cujo gráfico está representado na figura abaixo:



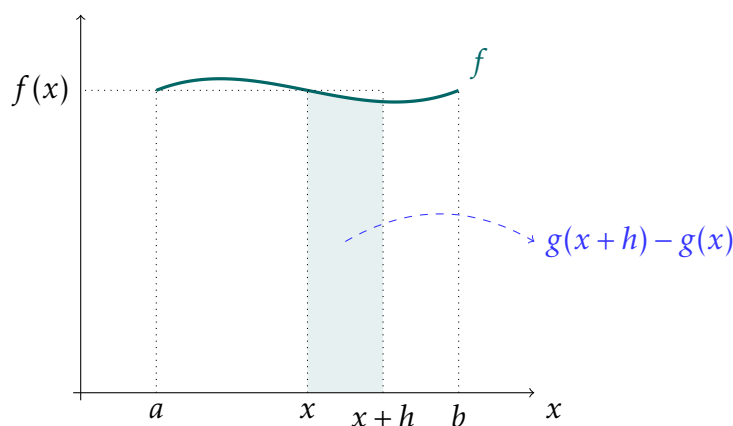
Definimos a função  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{para } x \in [a, b].$$

Veja que  $g(x)$  representa a área da figura delimitada pelo gráfico de  $f$ , o eixo  $x$ , entre  $a$  e  $x$ , que está destacada na figura abaixo:



Para calcular  $g'(x)$ , primeiro observamos que para  $h > 0$ , a diferença  $g(x+h) - g(x)$  representa a área da figura sob o gráfico de  $f$  de  $x$  até  $x+h$ , como na figura abaixo:



Veja que para  $h > 0$  pequeno, essa área  $g(x+h) - g(x)$  é aproximadamente igual à área do retângulo com altura  $f(x)$  e largura  $h$ , isto é

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x), \quad \text{ou seja} \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x).$$

Portanto, intuitivamente, esperamos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Um raciocínio análogo pode ser feito para  $h < 0$  pequeno, para concluirmos que, intuitivamente, teremos

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x),$$

o que nos dá que

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

O Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que isso é o que realmente ocorre.

**Teorema 4.5 (PRIMEIRO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO - 1º TFC).** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, e defina  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{para } x \in [a, b].$$

Então  $g$  é diferenciável em  $[a, b]$  e

$$g'(x) = f(x) \quad \text{para } x \in [a, b].$$

**Observação.** Aqui, nos pontos de fronteira, as derivadas são as laterais, isto é, em  $x = a$  a função  $g$  é somente diferenciável à direita com  $g'_+(a) = f(a)$ , e em  $x = b$  a função  $g$  é diferenciável à esquerda com  $g'_-(b) = f(b)$ .

*Demonstração.* Sejam  $x \in [a, b]$  e  $h > 0$  pequeno de forma que  $x + h \in [a, b]$ . Então

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt, \end{aligned}$$

e logo temos

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Como  $f$  é contínua em  $[x, x+h]$ , pelo **Teorema de Weierstrass** existem  $x_{1,h}$  e  $x_{2,h}$  em  $[x, x+h]$  tais que  $f(x_{1,h}) \leq f(t) \leq f(x_{2,h})$  para todo  $t \in [x, x+h]$ . Assim

$$f(x_{1,h})h \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(x_{2,h})h,$$

o que nos dá

$$f(x_{1,h}) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(x_{2,h}),$$

ou equivalentemente

$$f(x_{1,h}) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(x_{2,h}).$$

Veja que quando  $h \rightarrow 0^+$  temos  $x+h \rightarrow x$ , e como  $x_{1,h}, x_{2,h} \in [x, x+h]$  obtemos  $x_{1,h} \rightarrow x$  e  $x_{2,h} \rightarrow x$  pelo **Teorema do Confronto**. Como  $f$  é contínua, segue que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_{1,h}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_{2,h}) = f(x)$ . Assim, novamente pelo **Teorema do Confronto**, segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x), \quad (4.1)$$

para cada  $x \in [a, b)$ . Em particular,  $g$  é diferenciável à direita em  $a$  e  $g'_+(a) = f(a)$ . Analogamente provamos que para  $x \in (a, b]$  temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x), \quad (4.2)$$

e, em particular, que  $g$  é diferenciável à esquerda em  $b$  com  $g'_-(b) = f(b)$ . Juntas, (4.1) e (4.2) mostram que para  $x \in (a, b)$  temos  $g$  diferenciável e

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

□

**Exemplo 4.6.** Calcule a derivada da função  $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$ .

**SOLUÇÃO.** Como  $f(t) = \sqrt{1+t^2}$  é contínua, pelo 1º TFC temos

$$g'(x) = f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 4.7.** Calcule a derivada de  $h(t) = \int_t^2 \sin^3(1+s^2) ds$ .

**SOLUÇÃO.** Veja que a função  $f(s) = -\sin^3(1+s^2)$  é contínua e

$$h(t) = \int_t^2 \sin^3(1+s^2) ds = - \int_2^t \sin^3(1+s^2) ds = \int_2^t f(s) ds.$$

Logo do 1º TFC obtemos

$$h'(t) = f(t) = -\sin^3(1+t^2) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 4.8.** Defina  $g(x) = \int_0^{x^4} \sec t dt$  para  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ . Calcule a derivada de  $g$  em  $(0, \frac{\pi}{4})$ .

**SOLUÇÃO.** Veja que denotando  $r(x) = x^4$  e  $h(x) = \int_0^x \sec t dt$ , temos  $g(x) = h(r(x))$ . Pela Regra da Cadeia, temos

$$g'(x) = h'(r(x))r'(x),$$

Mas, do 1º TFC,  $h'(x) = \sec x$  para  $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ , pois  $f(t) = \sec t$  é uma função contínua no intervalo  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . Além disso,  $r'(x) = 4x^3$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Assim

$$g'(x) = h'(r(x))r'(x) = 4x^3 \sec(x^4) \quad \text{para todo } x \in (0, \frac{\pi}{4}).$$

Podemos generalizar o resultado apresentado no exemplo anterior, com a seguinte proposição.

**Proposição 4.9.** Sejam  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $r_1, r_2: [c, d] \rightarrow [a, b]$  funções diferenciáveis. Defina  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(x) = \int_{r_1(x)}^{r_2(x)} f(t) dt \quad \text{para } x \in [c, d].$$

Então  $g$  é diferenciável em  $[c, d]$  com

$$g'(x) = f(r_2(x))r_2'(x) - f(r_1(x))r_1'(x) \quad \text{para } x \in [c, d].$$

**Observação.** Aqui, nos pontos de fronteira, as derivadas são as laterais, isto é, em  $x = c$  a função  $g$  é somente diferenciável à direita com  $g'_+(c) = f(r_2(c))r'_{2,+}(c) - f(r_1(c))r'_{1,+}(c)$ , e em  $x = d$  a função  $g$  é diferenciável à esquerda com  $g'_-(d) = f(r_2(d))r'_{2,-}(d) - f(r_1(d))r'_{1,-}(d)$ .

*Demonstração.* Para  $y \in [a, b]$  defina

$$G(y) = \int_a^y f(t) dt.$$

Como  $f$  é contínua em  $[a, b]$  sabemos do 1º TFC que  $G$  é diferenciável em  $[a, b]$  e  $G'(y) = f(y)$  para todo  $y \in [a, b]$ . Agora, veja que

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{r_1(x)}^{r_2(x)} f(t) dt = \int_a^{r_2(x)} f(t) dt + \int_{r_1(x)}^a f(t) dt \\ &= \int_a^{r_2(x)} f(t) dt - \int_a^{r_1(x)} f(t) dt = G(r_2(x)) - G(r_1(x)). \end{aligned}$$

Usando as propriedades de derivação e a Regra da Cadeia, vemos que  $g$  é diferenciável em  $[c, d]$  com

$$g'(x) = G'(r_2(x))r_2'(x) - G'(r_1(x))r_1'(x) = f(r_2(x))r_2'(x) - f(r_1(x))r_1'(x).$$

□

**Exemplo 4.10.** Calcule a derivada de  $f(x) = \int_{-x^2}^{e^{x^3+1}} \ln(1+t^2+7t^4) dt$ .

**SOLUÇÃO.** Como a função  $g(t) = \ln(1+t^2+7t^4)$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e as funções  $r_1(x) = -x^2$  e  $r_2(x) = e^{x^3+1}$  são diferenciáveis em  $\mathbb{R}$ , usando a proposição acima obtemos

$$f'(x) = \ln(1+e^{2x^3+2}+7e^{4x^3+4})3x^2e^{x^3+1} + 2x\ln(1+x^4+7x^8) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

## 4.2 Primitivas

Até o momento, sabemos calcular a derivada de uma integral. Mas ainda não sabemos uma coisa muito importante: como resolver integrais! Uma ferramenta fundamental para isso é o **Segundo Teorema Fundamental do Cálculo**, que veremos na próxima seção. Para entender como ele funciona, precisaremos saber o que é a **primitiva** de uma função real.

**Definição 4.11.** Uma **primitiva** (ou **antiderivada**) de uma função  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $F: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável tal que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in D_f.$$

**Exemplo 4.12.** As funções  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  e  $G(x) = \frac{x^3}{3} + 7$  são ambas primitivas da função  $f(x) = x^2$ .

Note que se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então se somarmos qualquer constante em  $F$  continuamos com uma primitiva de  $f$ , já que a derivada da constante é zero. De fato, se  $F$  é uma primitiva de  $f$  e  $k \in \mathbb{R}$  então

$$(F(x) + k)' = F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in D_f,$$

logo  $F + k$  é também uma primitiva de  $F$ .

A pergunta que surge aqui é: será que se conhecemos uma primitiva  $F$  de  $f$  então *todas* as outras primitivas de  $F$  podem ser obtidas de  $F$  através da soma de uma constante? A resposta, em geral, é negativa, como podemos ver no seguinte exemplo:

**Exemplo 4.13.** As funções  $F, G: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $F(x) = 0$  e  $G(x) = \frac{x}{|x|}$  para  $x \neq 0$  são ambas primitivas da função  $f(x) = 0$  com domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Note que a diferença entre  $G$  e  $F$  não é constante, uma vez que

$$G(x) - F(x) = G(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

A diferença crucial aqui é que as funções consideradas não estão definidas num único intervalo. Essa diferença pode ser eliminada, se restringimos nosso estudo a funções que estão definidas num intervalo da reta. No que segue, quando dissermos que  $I$  é um intervalo da reta,  $I$  pode ser da forma  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  ou  $(a, b)$ . Em qualquer um dos casos, o **interior de  $I$**  é o intervalo  $(a, b)$ .

**Proposição 4.14.** Sejam  $I$  um intervalo da reta e  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f$  for diferenciável no interior de  $I$  e  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  no interior de  $I$ , então  $f$  é constante.

*Demonstração.* Seja  $x_0 \in I$  um ponto fixado. Para cada  $x \in I$  com  $x \neq x_0$ , segue do TVM que existe um ponto  $c$  entre  $x$  e  $x_0$  tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Como  $f'(x) = 0$  no interior de  $I$ , temos em particular  $f'(c) = 0$ , logo  $f(x) - f(x_0) = 0$ , ou seja,  $f(x) = f(x_0)$  para todo  $x \in I$ . Portanto,  $f$  é constante em  $I$ .  $\square$

No resultado acima (como já vimos no exemplo anterior), é importante que o domínio de  $f$  seja um intervalo para que o resultado seja válido. No exemplo  $G(x) = \frac{x}{|x|}$  temos  $G'(x) = 0$  para todo  $x \neq 0$ , e a função  $G$  não é constante.

O seguinte resultado será muito importante para o que vem a seguir.

**Corolário 4.15.** Se  $F$  e  $G$  são duas primitivas de uma mesma função  $f$ , definida num intervalo da reta  $I$  então existe uma constante  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $G(x) = F(x) + k$  para todo  $x \in I$ .

*Demonstração.* Denotemos por  $h(x) = G(x) - F(x)$ . Como  $F$  e  $G$  são primitivas de  $f$  em  $I$ , temos  $F' = G' = f$  em  $I$ . Portanto

$$h'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in I.$$

Segue então da Proposição 4.14 que existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $h(x) = k$  para todo  $x \in I$ , isto é,  $G(x) = F(x) + k$  para todo  $x \in I$ .  $\square$

Com o corolário acima temos a seguinte importante afirmação: se soubermos uma primitiva  $F$  de  $f$ , então todas as outras primitivas de  $f$  são da forma  $F + k$  para algum  $k \in \mathbb{R}$ . Dito de outra maneira, se tivermos em mãos uma primitiva  $F$  de  $f$  num intervalo  $I$ , a *família de primitivas*

$$F(x) + k \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

descreve *todas* as primitivas de  $f$ .

**Definição 4.16.** Dada  $f$  uma função definida num intervalo da reta, denotamos por

$$\int f(x)dx = F(x) + k \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

a família de primitivas de  $f$ , que é chamada de **integral indefinida de  $f$**  no intervalo  $I$ .

**Exemplo 4.17.** Das fórmulas de derivação que já vimos, temos as seguintes integrais indefinidas:

$$(a) \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k.$$

$$(h) \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + k, \text{ se } x < 0.$$

$$(b) \int dx = \int 1 dx = x + k.$$

$$(i) \int \sin x dx = -\cos x + k.$$

$$(c) \int c dx = cx + k.$$

$$(j) \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + k.$$

$$(d) \int e^x dx = e^x + k.$$

$$(k) \int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k.$$

$$(e) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \text{ se } \alpha \neq -1.$$

$$(l) \int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + k.$$

$$(f) \int \cos x dx = \sin x + k.$$

$$(m) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k.$$

$$(g) \int \frac{1}{x} dx = \ln x + k, \text{ se } x > 0.$$

$$(n) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + k.$$

### 4.3 O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Calcular integrais a partir da definição, como um limite de somas de Riemann, é um procedimento longo e difícil de ser feito, em geral. O **Segundo Teorema Fundamental do Cálculo** nos fornece um método muito mais simples para o cálculo de integrais.

**Teorema 4.18 (SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO - 2º TFC).** Suponha que  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e que  $F$  seja uma primitiva de  $F$ , então:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

*Demonstração.* Seja  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Pelo 1º TFC temos  $G'(x) = f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , ou seja,  $G$  é uma primitiva de  $f$ . Pelo Corolário 4.15, existe uma constante  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $G(x) = F(x) + k$  para todo  $x \in [a, b]$ . Assim

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) = F(b) + k.$$

Mas note que  $G(a) = F(a) + k$ , e como  $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ , temos  $k = -F(a)$ , isto é,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) + k = F(b) - F(a),$$

e a demonstração está completa. □

É comum denotarmos

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

e o 2º TFC é reescrito como: se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e  $F$  é uma primitiva qualquer de  $F$ , então

$$\int_a^b f(t)dt = F(x) \Big|_a^b.$$

**Exemplo 4.19.** Calcule a integral de  $f(x) = x^2$  no intervalo  $[1, 2]$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

**Exemplo 4.20.** Calcule  $\int_{-1}^0 (x^3 + 3x - 1) dx$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\int_{-1}^0 (x^3 + 3x - 1)dx = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{11}{4}.$$

## 4.4 Regra da substituição para integrais indefinidas

Nesta seção aprenderemos como transformar uma integral complicada numa mais simples. Para isto sejam  $f$  e  $g$  funções com  $g(D_g) \subset D_f$ , de maneira que a composta  $f \circ g$  está bem definida, e assumamos que  $g$  é diferenciável.

Se  $F$  é uma primitiva de  $f$  então  $F(g(x))$  é uma primitiva de  $f(g(x))g'(x)$  pois, pela Regra da Cadeia, obtemos

$$[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Portanto,

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + k, \quad \text{com } k \in \mathbb{R}.$$

Se fizermos a **substituição**  $u = g(x)$  temos

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + k = F(u) + k = \int f(u)du,$$

e obtemos a **Regra da Substituição**:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du. \quad (4.3)$$

**Exemplo 4.21.** Encontre  $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$ .

**SOLUÇÃO.** Fazemos a substituição  $u = 1 + x^2$ , então sua diferencial é  $du = 2xdx$ . Pela Regra da Substituição temos

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{1+x^2}2xdx = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{3/2} + k = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + k.$$

**Exemplo 4.22.** Encontre  $\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx$ .

**SOLUÇÃO.** Fazemos a substituição  $u = x^4 + 2$ , então sua diferencial é  $du = 4x^3dx$ . Assim, usando  $x^3dx = \frac{du}{4}$  e a Regra da Substituição temos

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx = \int \cos(u)\frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + k = \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2) + k.$$

**Exemplo 4.23.** Calcule  $\int \frac{x}{1+x^4}dx$ .

**SOLUÇÃO.** Se fizermos  $u = x^2$  teremos  $du = 2xdx$  e assim

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{2}du = \frac{1}{2} \arctg u + k = \frac{1}{2} \arctg(x^2) + k.$$

**Exemplo 4.24.** Encontre  $\int \operatorname{tg} x dx$ .

**SOLUÇÃO.** Fazemos a substituição  $u = \cos x$ , então sua diferencial é  $du = -\operatorname{sen} x dx$ , portanto

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + k = -\ln|\cos x| + k = \ln|\sec x| + k.$$

## 4.5 Regra da substituição para integrais definidas

Nas integrais definidas, temos um resultado que mostra como lidar com os limites de integração na hora de fazer uma substituição.

**Teorema 4.25 (REGRA DA SUBSTITUIÇÃO PARA INTEGRAIS DEFINIDAS.)**. Assuma que  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável com  $g'$  contínua em  $[a, b]$ . Suponha também que  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua com  $g(D_g) \subset D_f$ . Então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

*Demonstração.* Se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , sabemos que  $F(g(x))$  é uma primitiva da função  $f(g(x))g'(x)$ . Do 2º TFC temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Mas aplicando o 2º TFC diretamente à integral  $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$ , obtemos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)),$$

o que mostra que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

□

Com isso, temos à disposição dois métodos equivalentes para calcular uma integral definida por substituição:

**Método 1.** Calcular a integral definida usando a **Regra da substituição para integrais definidas** vista acima, dada por

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

onde, com a primitiva  $F$  de  $f$  em mãos, temos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)}.$$

**Método 2.** Usar a Regra da Substituição vista na seção anterior e resolver primeiramente a integral indefinida

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + k,$$

encontrando assim uma primitiva  $F(g(x))$  para a função  $f(g(x))g'(x)$ , e com essa primitiva em mãos usar o 2º TFC para calcular a integral definida:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\Big|_a^b.$$

Nos exemplos a seguir, faremos pelos dois métodos. Nenhum dos dois é melhor do que o outro, e cada caso é um caso. Com estudo e prática, você conseguirá decidir o que é melhor em cada caso, ou qual deles funciona melhor pra você!

**Exemplo 4.26.** Calcule  $\int_0^2 2x\sqrt{1+x^2}dx$ .

**SOLUÇÃO. Método 1.** Se  $u = g(x) = 1 + x^2$ , temos  $g(0) = 1$  e  $g(2) = 5$ . Assim, pela Regra da substituição para integrais definidas, temos

$$\int_0^2 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int_1^5 \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5 = \frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

**Método 2.** Resolvendo a integral indefinida primeiro (veja Exemplo 4.21) temos

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + k.$$

Assim, uma primitiva de  $2x\sqrt{1+x^2}$  é  $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ , e pelo 2º TFC obtemos

$$\int_0^2 2x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

**Exemplo 4.27.** Calcule  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x-1} dx$ .

**SOLUÇÃO. Método 1.** Fazendo  $u = 2x - 1$  temos  $du = 2dx$ , isto é,  $\frac{du}{2} = dx$ . Quando  $x = \frac{1}{2}$  temos  $u = 0$ , e quando  $x = 1$  temos  $u = 1$ . Assim,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x-1} dx = \int_0^1 \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

**Método 2.** Resolvemos a integral indefinida primeiro. Fazendo  $u = 2x - 1$  temos

$\frac{du}{2} = dx$  e assim

$$\int \sqrt{2x-1} dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} + k,$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante. Portanto  $\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}$  é uma primitiva de  $\sqrt{2x-1}$  e, pelo 2º TFC obtemos

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x-1} dx = \left. \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} \right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{3}.$$

**Exemplo 4.28.** Calcule  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ .

**SOLUÇÃO. Método 1.** Fazendo  $u = \ln x$  temos  $du = \frac{1}{x} dx$ . Além disso, quando  $x = 1$  temos  $u = \ln 1 = 0$ , e quando  $x = e$  temos  $u = \ln e = 1$ . Deste modo

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u du = \left. \frac{u^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

**Método 2.** Resolvemos primeiro a integral indefinida. Fazendo  $u = \ln x$  temos  $du = \frac{1}{x} dx$ . Assim

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + k = \frac{\ln^2 x}{2} + k,$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante. Logo  $\frac{\ln^2 x}{2}$  é uma primitiva de  $\frac{\ln x}{x}$ , e pelo 2º TFC obtemos

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left. \frac{\ln^2 x}{2} \right|_1^e = \frac{1}{2}.$$

## 4.6 Substituição inversa

Na Regra da Substituição temos uma integral do tipo  $\int f(g(x))g'(x)dx$  e usamos a substituição  $u = g(x)$  para transformá-la na integral  $\int f(u)du$ . Fazemos isso quando *sabemos encontrar* uma primitiva  $F$  para  $f$ , o que faz com que saibamos resolver a integral  $\int f(u)du$ .

Imagine agora que começamos com uma integral na forma  $\int f(x)dx$  e *não sabemos* encontrar uma primitiva para  $f$ . Por mais contra-intuitivo que isso possa parecer, faremos a seguinte pergunta: e se “complicando” a integral ela, na verdade, fique mais simples?

Para responder essa pergunta, usamos a técnica da **substituição inversa**, que consiste em,

na integral  $\int f(x)dx$ , fazer a mudança  $x = g(t)$ . Com isso obtemos  $dx = g'(t)dt$  e a integral fica

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Veja que é daí que vem o nome **substituição inversa**! Fizemos o caminho contrário ao da Regra da Substituição. Mas para que fazer isso? A resposta nem sempre é tão simples, mas em geral fazemos isso para que a integral resultante nesse processo, apesar de parecer ser mais complicada, seja na verdade mais simples.

Só que esse processo tem uma pegadinha! Note que *não sabemos* quem é a primitiva de  $f$  (caso contrário nem precisaríamos mudar a integral  $\int f(x)dx$  para resolvê-la). Assim, a esperança é encontrar uma primitiva  $H(t)$  para a função  $f(g(t))g'(t)$ , e assim

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = H(t) + k,$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante. Mas veja que a função original tem variável  $x$ , e não  $t$ . Assim, precisamos voltar para a variável  $x$ . Como  $x = g(t)$ , só é possível voltar para  $x$  se conseguirmos *inverter* essa relação, isto é, se conseguirmos escrever  $t = g^{-1}(x)$ . Por isso, é fundamental que  $g$  seja **inversível**. Com isso, obtemos

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = H(t) + k = H(g^{-1}(x)) + k,$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante. Esse é o **Método da Substituição Inversa**, que é resumido no seguinte resultado.

**Proposição 4.29 (MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO INVERSA).** Assuma que  $f$  é contínua por partes. Se  $x = g(t)$  é uma função inversível, diferenciável e com derivada contínua por partes, então

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

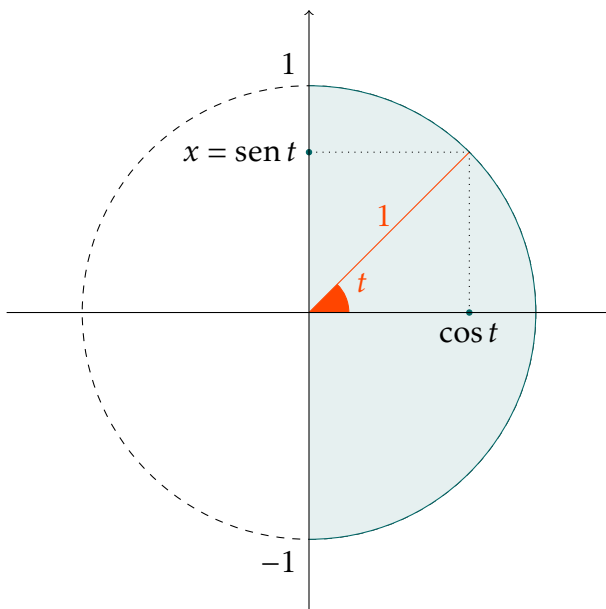
**Exemplo 4.30.** Usando o método da substituição inversa, elimine a raiz da integral

$$\int \sqrt{1-x^2},$$

sem necessariamente resolvê-la.

**SOLUÇÃO.** Vamos usar a mudança  $x = \sin t$ . Note que a função  $\sqrt{1-x^2}$  está definida somente para  $-1 \leq x \leq 1$ , ou seja, a variação de  $x$  está limitada ao intervalo  $[-1, 1]$ . Para que a mudança  $x = \sin t$  seja inversível precisamos restringir  $t$  ao intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , isto é, consideramos a função  $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  que é inversível, com inversa  $t = \arcsin x$

(veja a figura abaixo).



Temos  $dx = \cos t dt$ . Como  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ , temos  $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ , logo

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int |\cos t| \cos t dt.$$

Para  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  temos  $\cos t \geq 0$ , e assim  $|\cos t| = \cos t$ . Portanto

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 t dt,$$

onde  $x = \sin t$ , para  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

**Observação 1.** Ainda não vimos técnicas suficientes para resolver a maioria das integrais que aparecerão ao usarmos a técnica da substituição inversa. Por essa razão, revisitaremos esse tópico mais adiante. Nesse exemplo, devemos usar a relação

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$$

para obter

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2t)) dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + k,$$

onde  $k$  é uma constante. O trabalho árduo é retornar à variável original  $x$ . Veja que  $t = \arcsen x$ . Agora  $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$ , e  $x = \sin t$ . Para encontrar  $\cos t$  em termos de  $x$  usamos a relação  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ . Assim

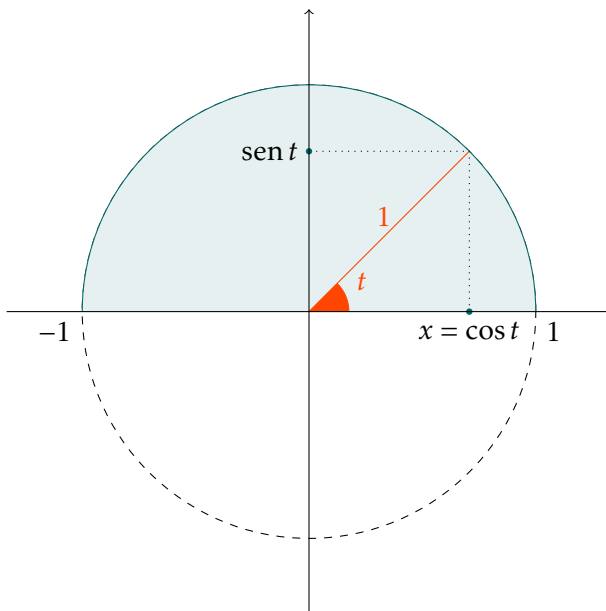
$$x^2 + \cos^2 t = 1 \implies \cos t = \sqrt{1-x^2},$$

lembrando que  $\cos t \geq 0$  para  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Portanto chegamos em

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\arcsen x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + k,$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante.

**Observação 2.** Outra mudança possível é fazer  $x = \cos t$ . Para que essa mudança seja inversível, consideramos  $t \in [0, \pi]$  (veja a figura abaixo).



Assim  $dx = -\sin t dt$  e

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = - \int \sqrt{1-\cos^2 t} \sin t dt = - \int \sqrt{\sin^2 t} \sin t dt = - \int |\sin t| \sin t dt = - \int \sin^2 t dt,$$

já que  $\sin t \geq 0$  para  $t \in [0, \pi]$ . Aqui, para resolver a integral usamos a relação

$$-\sin^2 t = \frac{1}{2}(\cos(2t) - 1)$$

e obtemos

$$-\sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int (\cos(2t) - 1) dt = \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t}{2} + k,$$

onde  $k$  é uma constante. Para voltar à variável  $x$ , temos  $t = \arccos x$ ,  $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$  e

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \implies \sin^2 t + x^2 = 1 \implies \sin t = \sqrt{1-x^2},$$

pois  $\sin t \geq 0$  para  $t \in [0, \pi]$ . Assim

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{\arccos x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + k,$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante.

**Observação 3.** Veja que as respostas acima parecem diferentes, não? Isso quer dizer que alguma delas está errada? Não! Ambas as respostas estão corretas, e a aparente diferença entre elas está apenas “a uma constante de diferença”, uma vez que

$$\arcsen x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \quad \text{para todo } x \in [-1, 1].$$

Assim, se na nossa primeira resposta usarmos a relação acima, obtemos

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{\arccos x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\pi}{4} + k,$$

e “colocando  $\frac{\pi}{4}$  para dentro de  $k$ ” obtemos exatamente a segunda resposta.

**Exemplo 4.31.** Em cada uma das integrais, encontre uma substituição inversa que elimine a raiz do integrando, sem precisar resolver a integral resultante.

(a)  $\int \sqrt{5-4x^2} dx$

(b)  $\int \sqrt{9+4x^2} dx$

(c)  $\int \sqrt{x^2-4x+3} dx$

**SOLUÇÃO. (a)** Veja que

$$5-4x^2 = 5\left[1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2\right].$$

Fazendo então  $\frac{2}{\sqrt{5}}x = \sin t$ , isto é,  $x = \frac{\sqrt{5}}{2}\sin t$  para  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  obtemos

$$5-4x^2 = 5\left[1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2\right] = 5(1-\sin^2 t).$$

Assim, como  $dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos t dt$  temos

$$\int \sqrt{5-4x^2} dx = \int \sqrt{5(1-\sin^2 t)} \frac{\sqrt{5}}{2} \cos t dt = \frac{5}{2} \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \frac{5}{2} \int \cos^2 t dt,$$

onde usamos que  $\cos t \geq 0$  para  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Assim, uma mudança que elimina a raiz do integrando é

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2}\sin t \quad \text{para } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

**Observação.** Outra mudança possível é  $x = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos t$  para  $t \in [0, \pi]$ . Verifique!

(b) Notemos que

$$9+4x^2 = 9\left[1+\left(\frac{2}{3}x\right)^2\right].$$

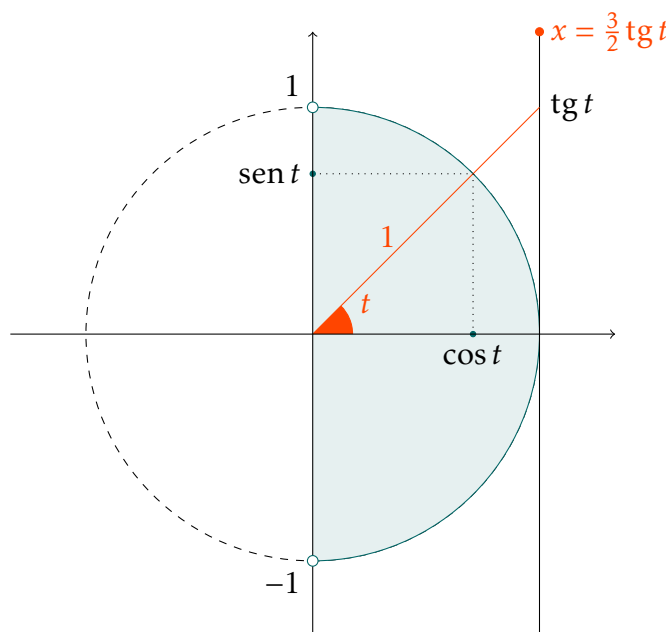
Fazendo então  $\frac{2}{3}x = \operatorname{tg} t$ , isto é,  $x = \frac{3}{2}\operatorname{tg} t$ , temos

$$9 + 4x^2 = 9\left[1 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2\right] = 9(1 + \operatorname{tg}^2 t).$$

Como  $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$ , ficaremos com

$$9 + 4x^2 = 9(1 + \operatorname{tg}^2 t) = 9\sec^2 t.$$

Para que essa mudança seja inversível é necessário que  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (veja a figura abaixo).



Assim, como  $dx = \frac{3}{2}\sec^2 t dt$ , obtemos

$$\int \sqrt{9 + 4x^2} dx = \int \sqrt{9\sec^2 t} \frac{3}{2}\sec^2 t dt = \frac{9}{2} \int |\sec t| \sec^2 t dt = \frac{9}{2} \int \sec^3 t dt,$$

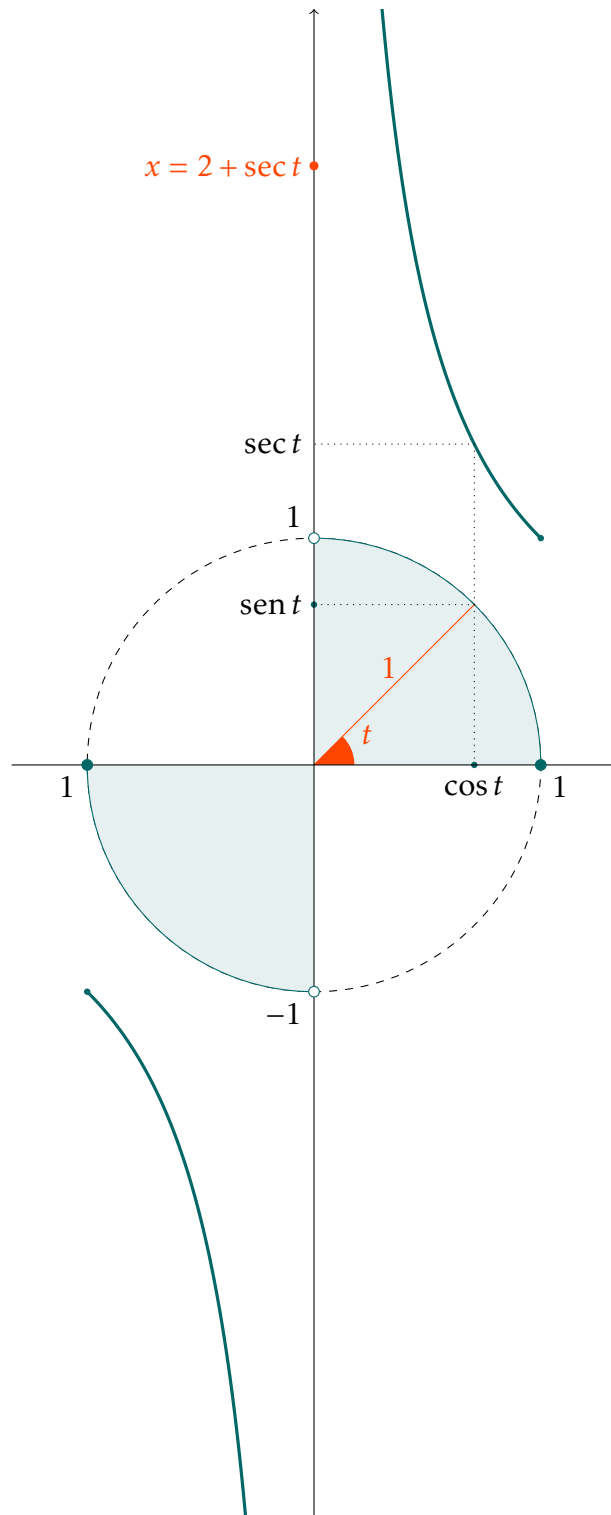
onde usamos que  $\sec t > 0$  para  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Portanto, a mudança que elimina a raiz do integrando é

$$x = \frac{3}{2}\operatorname{tg} t \quad \text{para } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

(c) Para essa, veja que

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1.$$

Lembrando que  $\sec^2 t - 1 = \operatorname{tg}^2 t$ , fazemos a mudança  $x - 2 = \sec t$ , isto é,  $x = 2 + \sec t$ . Para que tal mudança seja inversível, consideramos  $t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup [0, \frac{\pi}{2})$  (esse domínio é escolhido pois  $\operatorname{tg} t \geq 0$  para  $t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup [0, \frac{\pi}{2})$ , veja a figura abaixo).



Assim, como  $dx = \sec t \operatorname{tg} t dt$ , obtemos

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 3} dx = \int \sqrt{(x-2)^2 - 1} dx = \int \sqrt{\sec^2 t - 1} \sec t \operatorname{tg} t dt = \int \operatorname{tg}^2 t \sec t dt.$$

Assim, a mudança que elimina a raiz do integrando é

$$x = 2 + \sec t \quad \text{para } t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup [0, \frac{\pi}{2}).$$

## 4.7 Integração por partes em integrais indefinidas

A Regra da Substituição para integração “desfaz” o que a Regra da Cadeia fez ao derivarmos uma função. A Regra do Produto para diferenciação também tem sua regra correspondente na integração, que chamamos de **integração por partes**.

Se  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis em  $(a, b)$ , então para  $x \in (a, b)$  vale a regra do produto, isto é,

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Isso nos dá

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Como  $f(x)g(x)$  é uma primitiva de  $(f(x)g(x))'$ , se existir uma primitiva de  $f'(x)g(x)$ , então também existirá uma primitiva de  $f(x)g'(x)$  e valerá a **fórmula de integração por partes**:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \quad (4.4)$$

**Notação alternativa.** Tomando  $u = f(x)$  e  $v = g(x)$ , temos  $du = f'(x)dx$  e  $dv = g'(x)dx$ , e podemos reescrever (4.4) como

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

**Exemplo 4.32.** Calcule  $\int x \sen x dx$ .

**SOLUÇÃO.** Tome  $u = x$  e  $dv = \sen x dx$ . Então  $du = dx$  e  $v = -\cos x$ . Assim

$$\int x \sen x dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)dx = -x \cos x + \sen x + k.$$

**Exemplo 4.33.** Calcule  $\int \arctg x dx$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\arctg x}_u \underbrace{dx}_{dv} &= uv - \int v du = (\arctg x)x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + k.\end{aligned}$$

**Exemplo 4.34.** Calcule  $\int x^2 e^x dx$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\int \underbrace{x^2}_u \underbrace{e^x}_{dv} dx = \underbrace{x^2}_u \underbrace{e^x}_v - \int \underbrace{e^x}_v \underbrace{2x dx}_{du}.$$

Utilizando a fórmula de integração por partes mais uma vez, calculamos

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + k.$$

Portanto,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + k.$$

**Exemplo 4.35.** Calcule  $\int \sec^3 t dt$ .

**SOLUÇÃO.** Façamos  $u = \sec t$  e  $dv = \sec^2 t dt$ . Temos  $du = \sec t \operatorname{tg} t dt$  e  $v = \operatorname{tg} t$ . Assim

$$\begin{aligned}\int \sec^3 t dt &= \int \sec t \sec^2 t dt = \sec t \operatorname{tg} t - \int \operatorname{tg}^2 t \sec t dt \\ &= \sec t \operatorname{tg} t - \int (\sec^2 t - 1) \sec t dt = \sec t \operatorname{tg} t + \int \sec t dt - \int \sec^3 t dt \\ &= \sec t \operatorname{tg} t + \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| - \int \sec^3 t dt.\end{aligned}$$

Note que a integral  $\int \sec^3 t dt$  voltou a aparecer do lado direito, o que pode parecer estranho. Mas note agora podemos somar  $\int \sec^3 t dt$  em ambos os lados da igualdade para obter

$$2 \int \sec^3 t dt = \sec t \operatorname{tg} t + \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + k,$$

onde  $k \in \mathbb{R}$ . Por que essa constante apareceu? Note que antes, tínhamos uma integral indefinida em ambos os lados da igualdade, que “escondiam” as constantes. Quando somamos  $\int \sec^3 t dt$  em ambos os lados, o lado direito da igualdade ficou sem nenhuma

integral. Assim, como estamos nos referindo a uma integral indefinida, a constante  $k$  deve agora aparecer.

Dividindo tudo por 2, e renomeando a constante, obtemos

$$\int \sec^3 t dt = \frac{\sec t \operatorname{tg} t}{2} + \frac{\ln |\sec t + \operatorname{tg} t|}{2} + k.$$

## 4.8 Integração por partes na integral definida

Combinando a fórmula de integração por partes com o 2º TFC, podemos avaliar integrais definidas. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções com derivadas contínuas em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Como no caso da Regra da Substituição, temos dois métodos para calcular uma integral definida usando o método da integração por partes. Uma deles é usar diretamente a fórmula acima, e o outro consiste em primeiro resolver a integral indefinida para encontrar uma primitiva de  $fg'$  e só depois usar o 2º TFC. Faremos abaixo um exemplo usando ambos os métodos.

**Exemplo 4.36.** Calcule  $\int_1^t x \ln x dx$ , para  $t > 0$ .

**SOLUÇÃO. Método 1.** Tomando  $u = \ln x$  e  $dv = x dx$  temos  $du = \frac{dx}{x}$  e  $v = \frac{x^2}{2}$ , assim

$$\begin{aligned} \int_1^t x \ln x dx &= \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^t - \frac{1}{2} \int_0^t x dx = \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{1}{2} \int_1^t x dx \\ &= \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^t = \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Método 2.** Resolvemos primeiramente a integral indefinida. Novamente, tomando  $u = \ln x$  e  $v = x dx$  temos

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + k,$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante. Assim

$$\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$$

é uma primitiva de  $x \ln x$ . Pelo 2º TFC, obtemos

$$\int_1^t x \ln x dx = \left( \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^t = \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

## 4.9 Integrais trigonométricas

Nesta seção usaremos identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas, com a ajuda da Regra da Substituição.

Lembremos das três identidades trigonométricas básicas:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ;
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ ;
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ .

Delas seguem todas as outras, como por exemplo:

- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ ;
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ .

Agora veja que

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 1 - 2 \cos^2 x,$$

o que nos dá

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Analogamente obtemos

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

Com isso, conseguimos uma estratégia para calcular integrais do tipo

$$\int \sin^m x \cos^n x dx,$$

onde  $m$  e  $n$  são inteiros não-negativos.

★ Se  $n$  for ímpar então  $n = 2k + 1$  para algum inteiro não-negativo  $k$ , e assim

$$\int \sin^m x \cos^{(2k+1)} x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx,$$

e fazemos a substituição  $u = \sin x$  (logo  $du = \cos x dx$ ) para obter

$$\int \sin^m x \cos^{(2k+1)} x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx = \int u^m (1 - u^2)^k du,$$

e basta resolver a integral resultante (veja que o integrando é um polinômio).

**Exemplo 4.37.** Calcule  $\int \cos^3 x dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x$ . Fazendo  $u = \sin x$  temos  $du = \cos x dx$  e assim

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - u^2) du = u - \frac{u^3}{3} + k = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + k.$$

**Exemplo 4.38.** Calcule  $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$ .

**SOLUÇÃO.** Note que  $\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$ . Fazendo  $u = \sin x$ , temos  $du = \cos x dx$  e

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int u^2 (1 - u^2)^2 du \\ &= \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du = \frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + k \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + k. \end{aligned}$$

★ Se  $m$  for ímpar então  $m = 2p + 1$  para algum inteiro não-negativo  $p$ , e assim

$$\int \sin^{(2p+1)} x \cos^n x dx = \int (\sin^2 x)^p \cos^n x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^p \cos^n x \sin x dx,$$

e fazemos a substituição  $u = \cos x$  (logo  $du = -\sin x dx$ ) para obter

$$\int \sin^{(2p+1)} x \cos^n x dx = \int (1 - \cos^2 x)^p \cos^n x \sin x dx = - \int (1 - u^2)^p u^n du,$$

e basta resolver a integral resultante (veja que o integrando é um polinômio).

**Exemplo 4.39.** Calcule  $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $\sin^5 x \cos^2 x = (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x$ . Fazendo  $u = \cos x$  temos  $du = -\sin x dx$  e assim

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx = \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) \\ &= - \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du = - \left( \frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + k \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + k. \end{aligned}$$

★ O caso mais trabalhoso ocorre quando ambos  $m$  e  $n$  são pares. Nesse caso, a fórmula geral fica incrivelmente complicada. A estratégia aqui é utilizar, repetidamente, as identidades

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

que deduzimos acima (e algumas vezes pode ser útil lembrar que  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ ).

**Exemplo 4.40.** Calcule  $\int \sin^4 x dx$ .

**SOLUÇÃO.** Usando as identidades  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$  e  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$  temos

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos(2x))^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos(2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos(4x))) dx = \\ &= \int \left( \frac{3}{8} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8} \right) dx \\ &= \frac{3x}{8} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + k. \end{aligned}$$

Agora podemos ver uma estratégia para calcular integrais envolvendo produtos de  $\sin(mx)$  e  $\cos(nx)$ .

★ Para avaliar integrais do tipo

$$\int \sin(mx) \cos(nx) dx$$

use a identidade

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(mx - nx) + \sin(mx + nx)).$$

★ Para avaliar integrais do tipo

$$\int \sin(mx) \sin(nx) dx$$

use a identidade

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2}(\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)).$$

★ Para avaliar integrais do tipo

$$\int \cos(mx) \cos(nx) dx$$

use a identidade

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos(mx - nx) + \cos(mx + nx)).$$

**Exemplo 4.41.** Calcule  $\int \sin(3x)\cos(2x)dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $\sin(3x)\cos(2x) = \frac{1}{2}(\sin(5x) + \sin(x))$ , logo

$$\int \sin(3x)\cos(2x)dx = \frac{1}{2} \int (\sin(5x) + \sin(x))dx = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos x + k.$$

Podemos usar uma estratégia semelhante para avaliar integrais envolvendo potências de tangente e secante, isto é, integrais da forma

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx,$$

onde  $m$  e  $n$  são inteiros não-negativos.

★ Se  $n \geq 2$  for par então  $n = 2k$  para algum inteiro não-negativo  $k \geq 1$ , e assim

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x dx = \int \operatorname{tg}^m x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx = \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx,$$

e fazemos a substituição  $u = \operatorname{tg} x$  (logo  $du = \sec^2 x dx$ ) para obter

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x dx = \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx = \int u^m (1 + u^2)^{k-1} du,$$

e basta resolver a integral resultante (note que o integrando é um polinômio).

**Exemplo 4.42.** Calcule  $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $\operatorname{tg}^6 x \sec^4 x = \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x \sec^2 x = \operatorname{tg}^6 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x$ . Fazendo  $u = \operatorname{tg} x$  temos  $du = \sec^2 x dx$  e assim

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx &= \int \operatorname{tg}^6 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x dx = \int u^6 (1 + u^2) du \\ &= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + k = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{tg}^9 x}{9} + k. \end{aligned}$$

★ Se  $m$  for ímpar então  $m = 2p + 1$  para algum inteiro não-negativo  $p$ , e assim

$$\int \operatorname{tg}^{(2p+1)} x \sec^n x dx = \int (\operatorname{tg}^2 x)^p \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x dx = \int (\sec^2 x - 1)^p \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x dx,$$

e fazemos a substituição  $u = \sec x$  (logo  $du = \sec x \operatorname{tg} x dx$ ) para obter

$$\int \operatorname{tg}^{(2p+1)} x \sec^n x dx = \int (\sec^2 x - 1)^p \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x dx = \int (u^2 - 1)^p u^{n-1} du,$$

e basta resolver a integral resultante (note que o integrando é um polinômio).

**Exemplo 4.43.** Calcule  $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $\operatorname{tg}^5 x \sec^7 x = \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x = (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x$ . Fazendo  $u = \sec x$  temos  $du = \sec x \operatorname{tg} x dx$  e assim

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x dx &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x dx = \int (u^2 - 1)^2 u^6 du \\ &= \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + k = \frac{\sec^{11} x}{11} - \frac{2\sec^9 x}{9} + \frac{\sec^7 x}{7} + k. \end{aligned}$$

## 4.10 Substituição inversa (continuação)

Nessa seção voltaremos a discutir o método da substituição inversa, mas agora focando em resolver completamente as integrais. A teoria já foi toda desenvolvida na Seção 4.6, e o que nos resta agora é trabalhar alguns exemplos.

**Exemplo 4.44.** Calcule  $\int \sqrt{1+x^2} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Como  $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$ , a mudança  $x = \operatorname{tg} t$  para  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  elimina a raiz do integrando. De fato, temos  $dx = \sec t dt$  e assim

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} \sec^2 t dt = \int |\sec t| \sec^2 t dt = \int \sec^3 t dt,$$

pois  $\sec t \geq 0$  em  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Agora, do exemplo Exemplo 4.35 sabemos que

$$\int \sec^3 t dt = \frac{\sec t \operatorname{tg} t}{2} + \frac{\ln |\sec t + \operatorname{tg} t|}{2} + k.$$

Devemos retornar à variável  $x$ . Como  $x = \operatorname{tg} t$ , segue que  $1 + x^2 = \sec^2 t$  e como  $\sec t > 0$ , temos  $\sec t = \sqrt{1+x^2}$ . Logo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{\sec t \operatorname{tg} t}{2} + \frac{\ln |\sec t + \operatorname{tg} t|}{2} + k \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\ln |\sqrt{1+x^2} + x|}{2} + k. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.45.** Resolvas as integrais abaixo:

$$(a) \int \sqrt{5-4x^2} dx$$

$$(b) \int \sqrt{9+4x^2} dx$$

$$(c) \int \sqrt{x^2-4x+3} dx$$

Veja que já encontramos a mudança de variável que elimina a raiz de cada uma das integrais acima, no Exemplo 4.31.

(a) A mudança  $x = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t$  para  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  nos dá

$$\int \sqrt{5-4x^2} dx = \frac{5}{2} \int \cos^2 t dt.$$

Lembrando que  $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$  temos

$$\int \sqrt{5-4x^2} dx = \frac{5}{4} \int (1 + \cos(2t)) dt = \frac{5t}{4} + \frac{5 \sin(2t)}{8} + k = \frac{5t}{4} + \frac{5 \sin t \cos t}{4} + k,$$

onde na última igualdade usamos que  $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$ . Precisamos voltar à variável  $x$ , e para isso lembramos que como  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  e  $x = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t$  temos

$$\frac{4x^2}{5} + \cos^2 t = 1 \implies \cos t = \frac{\sqrt{5-4x^2}}{\sqrt{5}},$$

lembrando que  $\cos t \geq 0$  para  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Portanto

$$\int \sqrt{5-4x^2} dx = \frac{5}{4} \arcsen\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{5-4x^2} + k.$$

(b) A mudança  $x = \frac{3}{2} \operatorname{tg} t$  para  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  nos dá

$$\int \sqrt{9+4x^2} dx = \frac{9}{2} \int \sec^3 t dt.$$

Assim

$$\int \sqrt{9+4x^2} dx = \frac{9 \sec t \operatorname{tg} t}{4} + \frac{9 \ln |\sec t + \operatorname{tg} t|}{4} + k.$$

Para retornar à variável  $x$ , veja que

$$\sec^2 t = 1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \frac{4}{9}x^2 \implies \sec t = \frac{\sqrt{9+4x^2}}{3},$$

onde usamos que  $\sec t > 0$  para  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Portanto

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9+4x^2} dx &= \frac{9}{4} \frac{\sqrt{9+4x^2}}{3} \frac{2}{3}x + \frac{9}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{9+4x^2}}{3} + \frac{2}{3}x \right| + k \\ &= \frac{x\sqrt{9+4x^2}}{2} + \frac{9}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{9+4x^2} + 2x}{3} \right| + k. \end{aligned}$$

(c) A mudança  $x = 2 + \sec t$  para  $t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup [0, \frac{\pi}{2})$  nos dá

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 3} dx = \int \operatorname{tg}^2 t \sec t dt.$$

Temos

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 t \sec t dt &= \int (\sec^2 t - 1) \sec t dt = \int \sec^3 t dt - \int \sec t dt + k \\ &= \frac{\sec t \operatorname{tg} t}{2} + \frac{\ln |\sec t + \operatorname{tg} t|}{2} - \ln |\sec t + \operatorname{tg} t| + k \\ &= \frac{\sec t \operatorname{tg} t}{2} - \frac{\ln |\sec t + \operatorname{tg} t|}{2} + k. \end{aligned}$$

Para voltar à variável original, note que

$$\operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t - 1 = (x - 2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 \implies \operatorname{tg} t = \sqrt{x^2 - 4x + 3},$$

pois  $\operatorname{tg} t \geq 0$  para  $t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup [0, \frac{\pi}{2})$ . Portanto

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{(x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{2} - \frac{\ln |x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}|}{2} + k.$$

## 4.11 Decomposição em frações parciais

Nesta seção mostraremos como integrar uma função racional (isto é, um quociente de polinômios) expressando-a como soma de **frações parciais**. Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{r(x)}{q(x)},$$

onde  $p$  e  $q$  são polinômios. Se o grau de  $r$  for maior ou igual ao grau de  $q$ , aplicando o algoritmo da divisão para polinômios podemos escrever  $r(x) = s(x)q(x) + p(x)$ , onde  $s$  e  $p$  são polinômios, com o grau de  $p$  menor do que o grau de  $q$ . Assim

$$f(x) = s(x) + \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Como  $s$  é um polinômio, sua integral é fácil de calcular. Portanto, para calcular a integral de  $f$ , precisamos saber integrar

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

onde  $p$  e  $q$  são polinômios, com o grau de  $p$  menor do que o grau de  $q$ .

**Exemplo 4.46.** Calcule  $\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Dividindo o polinômio  $x^3 - x$  por  $x$  encontramos

$$x^3 - x = (x^2 + x + 2)(x - 1) + 2,$$

logo

$$\frac{x^3 + x}{x-1} = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}.$$

Portanto

$$\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx = \int \left( x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x-1| + k.$$

Para começar a resolver a integral

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

devemos, em primeiro lugar, expressar o denominador  $q(x)$  em **fatores irredutíveis**, isto é, em fatores lineares e/ou quadráticos sem raízes, como por exemplo,  $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ ,  $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+2)$ , ou  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ .

Uma vez feito isso, devemos expressar a função racional como uma soma de **frações parciais**. Explicamos em detalhes alguns diferentes casos que podem ocorrer (com esses você é capaz de resolver casos mais gerais que possam aparecer!).

### Denominadores redutíveis do segundo grau

**Teorema 4.47.** Sejam  $\alpha, \beta, m, n \in \mathbb{R}$ , com  $\alpha \neq \beta$ . Então existem  $A, B \in \mathbb{R}$  tais que

(a)  $\frac{mx + n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta};$

(b)  $\frac{mx + n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$

Note que estamos aplicando o teorema acima somente quando o grau do numerador é no máximo um, pois ele deve ser menor do que o grau 2 do denominador.

Usando o Teorema 4.47, para  $\alpha \neq \beta$  existem  $A, B \in \mathbb{R}$  tais que

$$\int \frac{mx + n}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx = \int \left( \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \right) dx = A \ln|x-\alpha| + B \ln|x-\beta| + k.$$

Além disso, também existem  $A, B$  tais que

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \int \left( \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} \right) dx = \ln|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} + k.$$

Esse método de resolução de integrais se chama **método das frações parciais**.

**Exemplo 4.48.** Calcule  $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ . O método de frações parciais dá

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

e portanto  $A(x-2) + B(x-1) = x+3$  ou  $(A+B)x - 2A - B = x+3$ . Como os polinômios são idênticos, seus coeficientes devem ser iguais. Logo,  $A+B=1$  e  $-2A-B=3$ . Resolvendo, obtemos  $A=-4$  e  $B=5$  e assim

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx = \int \left( \frac{-4}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx = -4\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + k.$$

**Exemplo 4.49.** Calcule  $\int \frac{x^3+2}{(x-1)^2} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Neste caso é melhor fazer uma mudança de variáveis. Seja  $u = x-1$  ou  $x = u+1$  e  $du = dx$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2}{(x-1)^2} dx &= \int \frac{(u+1)^3}{u^2} du = \int \frac{u^3+3u^2+3u+3}{u^2} du \\ &= \frac{u^2}{2} + 3u + 3\ln|u| - \frac{3}{u} + k = \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + k. \end{aligned}$$

bf **Denominadores irredutíveis do segundo grau**

Queremos calcular integrais do tipo

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx,$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ . Então devemos reescrever o denominador como soma de quadrados. Em seguida, fazemos uma mudança de variável e resolvemos a integral resultante. O procedimento geral é esse, e ele fica mais bem explicado através de um exemplo.

**Exemplo 4.50.** Calcule  $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Escrevemos o denominador como soma de quadrados  $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ . Fazendo  $u = x+1$ , temos  $du = dx$  e assim

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1} dx = \int \frac{2(u-1)+1}{u^2+1} du$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{2u}{u^2+1} du - \int \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \ln(1+u^2) - \arctg u + k = \ln(1+(x+1)^2) - \arctg(x+1) + k. \\ &= \ln(1+u^2) - \arctg u + k = \ln(x^2+2x+2) - \arctg(x+1) + k. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.51.** Calcule  $\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Como o grau do denominador é igual ao grau do denominador, primeiro vamos dividir os polinômios para encontrar

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{(2x-1)^2+2}.$$

Fazendo  $u = 2x-1$  temos  $du = 2dx$  e assim

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} dx &= \int \left( 1 + \frac{x-1}{(2x-1)^2+2} \right) dx = x + \frac{1}{4} \int \frac{u-1}{u^2+2} du \\ &= x + \frac{1}{4} \int \frac{u}{u^2+2} du - \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2+2} du = x + \frac{1}{8} \ln|u^2+2| - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + k \\ &= x + \frac{1}{8} \ln(4x^2-4x+3) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + k. \end{aligned}$$

## Denominadores redutíveis do terceiro grau

**Teorema 4.52.** Sejam  $\alpha, \beta, \gamma, m, n, p \in \mathbb{R}$ , com  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ . Então existem  $A, B, C \in \mathbb{R}$  tais que

(a)  $\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma};$

(b)  $\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2};$

$$(c) \frac{mx^2 + nx + p}{(x - \alpha)^3} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \alpha)^2} + \frac{C}{(x - \alpha)^3}.$$

**Exemplo 4.53.** Calcule  $\int \frac{2x+1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Como 1 é raiz de  $x^3 - x^2 - x + 1$ , sabemos que  $(x - 1)$  é um fator e obtemos  $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)^2(x + 1)$ . A decomposição em frações parciais é

$$\frac{2x+1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Então,  $2x+1 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$ . Fazendo  $x = 1$  obtemos  $3 = 2C$  ou  $C = \frac{3}{2}$ . Fazendo  $x = -1$ , obtemos  $-1 = 4A$  ou  $A = -\frac{1}{4}$ . Fazendo  $x = 0$ , obtemos  $1 = -\frac{1}{4} - B + \frac{3}{2}$  ou  $B = \frac{1}{4}$ . Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{3}{2} \frac{1}{x-1} + k. \end{aligned}$$

### Denominadores do terceiro grau com um fator de segundo grau irredutível

Vamos considerar integrais do tipo

$$\int \frac{mx^2 + nx + p}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)} dx,$$

onde  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ .

**Teorema 4.54.** Sejam  $m, n, p, a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$  tais que  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ . Então existem  $A, B, C \in \mathbb{R}$  tais que

$$\frac{mx^2 + nx + p}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c}.$$

**Exemplo 4.55.** Calcule  $\int \frac{x^5 + x + 1}{x^3 - 8} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ . Dividindo obtemos

$$\frac{x^5 + x + 1}{x^3 - 8} = x^2 + \frac{8x^2 + x + 1}{x^3 - 8} = x^2 + \frac{8x^2 + x + 1}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}.$$

Pelo método de frações parciais,

$$\frac{8x^2 + x + 1}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}.$$

Então  $8x^2 + x + 1 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2)$ . Fazendo  $x = 2$  obtemos  $35 = 12A$  ou  $A = \frac{35}{12}$ . Fazendo  $x = 0$  obtemos  $1 = 4A - 2C$  ou  $C = \frac{16}{3}$ . Fazendo  $x = 1$  obtemos  $10 = 7A - B - C$  ou  $B = \frac{61}{12}$ . Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{8x^2 + x + 1}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} dx &= \frac{35}{12} \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{\frac{61}{12}x + \frac{16}{3}}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{35}{12} \ln|x-2| + \frac{1}{12} \int \frac{61x + 64}{x^2 + 2x + 4} dx. \end{aligned}$$

Para calcular a última integral, escrevemos  $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$  e fazemos  $u = x+1$  ou  $x = u-1$  e  $du = dx$ . Portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{61x + 64}{x^2 + 2x + 4} dx &= \int \frac{61x + 64}{(x+1)^2 + 3} dx = \int \frac{61(u-1) + 64}{u^2 + 3} du \\ &= 61 \int \frac{u}{u^2 + 3} du + 3 \int \frac{1}{u^2 + 3} du = \frac{61}{2} \ln(u^2 + 3) + \frac{3}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + k \\ &= \frac{61}{2} \ln(x^2 + 2x + 4) + \frac{3}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k. \end{aligned}$$

Finalmente,

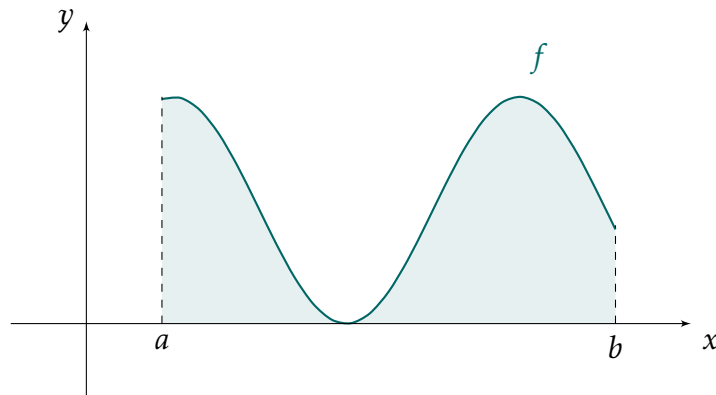
$$\int \frac{x^5 + x + 1}{x^3 - 8} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{35}{12} \ln|x-2| + \frac{61}{24} \ln(x^2 + 2x + 4) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k.$$

## 4.12 Cálculo de áreas

Queremos determinar a área de diferentes regiões. Começaremos pelo problema de achar a área de uma região  $A$  que está sob a curva de uma função.

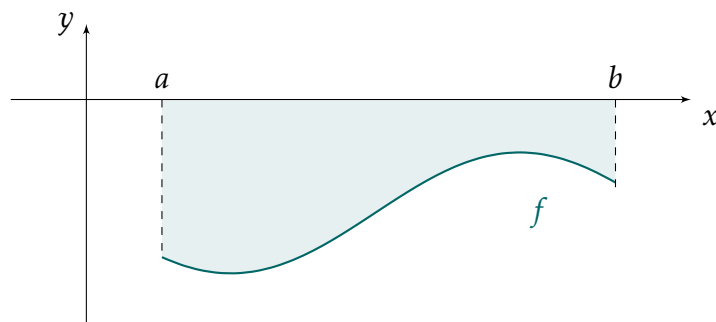
**Caso 1:** Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  com  $f(x) \geq 0$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Já vimos que a área  $A$  da figura (dada na figura abaixo) entre o gráfico de  $f$ , e as retas  $x = a$ ,  $x = b$  e  $y = 0$  é dada por

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$



**Exemplo 4.56.** A área do conjunto do plano limitado pelas retas  $x = 0$ ,  $x = 1$  e pelo gráfico de  $f(x) = x^2$  é  $\frac{1}{3}$ .

**Caso 2:** Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  com  $f(x) \leq 0$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Queremos encontrar agora a área  $A$  da figura (dada na figura abaixo) entre o gráfico de  $f$ , e as retas  $x = a$ ,  $x = b$  e  $y = 0$ .

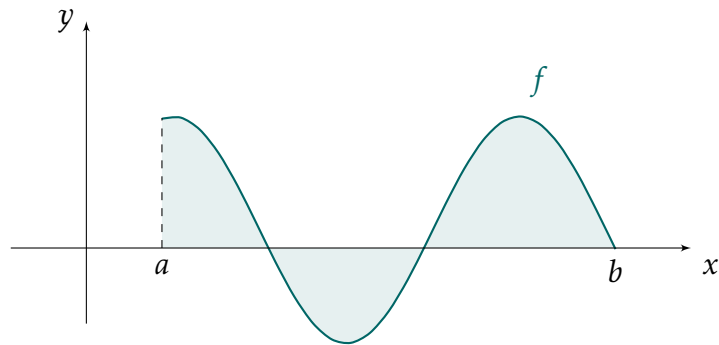


Neste caso, temos

$$A = - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b -f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Exemplo 4.57.** A área do conjunto do plano limitado pelas retas  $x = 0$ ,  $x = 1$  e pelo gráfico de  $f(x) = x^4 - x$  é  $\frac{3}{10}$ .

**Caso 3:** Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ . Queremos encontrar agora a área  $A$  da figura (dada na figura abaixo) entre o gráfico de  $f$ , e as retas  $x = a$ ,  $x = b$  e  $y = 0$ .

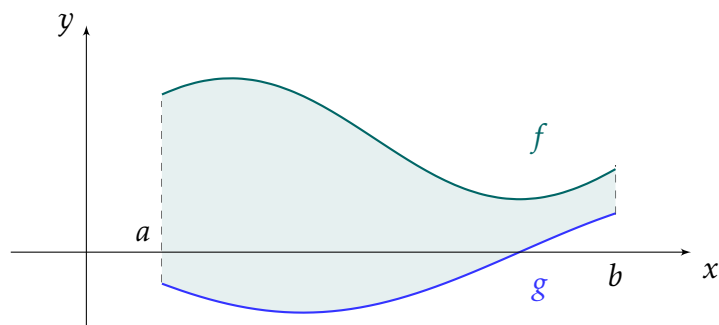


Neste caso, temos

$$A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$

**Exemplo 4.58.** A área do conjunto do plano limitado pelas retas  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  e pelo gráfico de  $f(x) = x^3$  é 1.

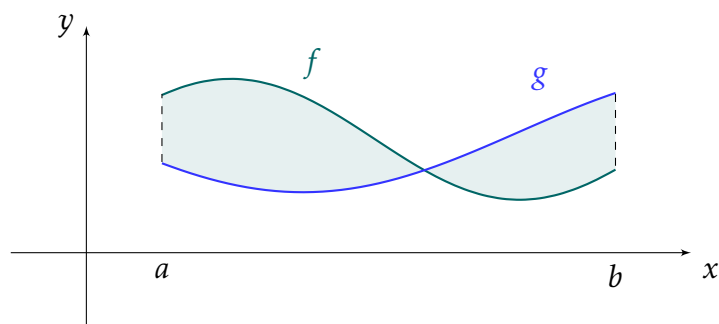
**Caso 4:** Sejam  $f, g$  contínuas em  $[a, b]$  com  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Queremos encontrar agora a área  $A$  da figura (dada na figura abaixo) entre os gráficos de  $f$  e  $g$ , e as retas  $x = a$ ,  $x = b$ .



Neste caso, temos

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

**Caso Geral:** Sejam  $f, g$  contínuas em  $[a, b]$ . Queremos encontrar agora a área  $A$  da figura entre os gráficos de  $f$  e  $g$ , e as retas  $x = a$ ,  $x = b$ .

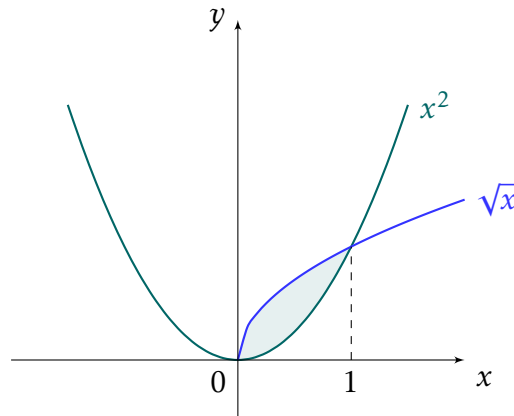


Neste caso, temos

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

**Exemplo 4.59.** Calcule a área  $A$  do conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ .

**SOLUÇÃO.** Temos  $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$  se e só se  $0 \leq x \leq 1$ , como na figura abaixo.



Portanto

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}.$$

**Exemplo 4.60.** Calcule a área  $A$  da região compreendida entre os gráficos de  $y = x$  e  $y = x^2$ , com  $0 \leq x \leq 2$ .

**SOLUÇÃO.** As curvas  $y = x$  e  $y = x^2$  interceptam-se nos pontos  $x = 0$  e  $x = 1$ . Então,

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = 1.$$

## 4.13 Integrais impróprias em intervalos ilimitados

Na definição de integral definida  $\int_a^b f(x) dx$ , exige-se que a função  $f$  esteja definida num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$  e que  $f$  seja limitada nesse intervalo. Neste capítulo estendemos o conceito de integral definida para casos mais gerais.

Consideremos a função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  e calculemos a área  $A$  limitada pelo gráfico de  $f$  e pelas retas  $y = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = b$ , com  $b > 1$ . Então

$$A = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Fazendo  $b \rightarrow \infty$ , temos  $A \rightarrow 1$ . Isto quer dizer que a área  $A$  do conjunto *ilimitado*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x) \text{ e } x \geq 1\}$$

é *finita* e igual a 1.

**Definição 4.61 (Integral Imprópria do Tipo 1).**

(a) Se  $\int_a^t f(x)dx$  existe para cada número  $t \geq a$ , definimos

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx,$$

se este limite existir.

(b) Se  $\int_t^b f(x)dx$  existe para cada número  $t \leq b$ , definimos

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

se este limite existir.

Quando uma das integrais impróprias acima existir e for finita, diremos que ela é **convergente**. Caso contrário, ela será dita **divergente**.

As integrais impróprias podem ser interpretadas como uma área, desde que  $f$  seja uma função positiva.

**Exemplo 4.62.** Determine se a integral  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$  é convergente ou divergente.

**SOLUÇÃO.** Note que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty,$$

e como o limite é infinito, a integral é divergente.

**Exemplo 4.63.** Determine se a integral  $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$  é convergente ou divergente.

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{-2x^2} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} \right) = \frac{1}{2},$$

e como o limite é finito, a integral é convergente.

**Exemplo 4.64.** Determine se a integral  $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$  é convergente ou divergente.

**SOLUÇÃO.** Note que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 xe^{-x} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 xe^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left( xe^x \Big|_t^0 - \int_t^0 e^x dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^t - te^t - 1) = -1,\end{aligned}$$

e como o limite é finito, a integral é convergente.

## 4.14 Testes de convergência de integrais impróprias

Algumas vezes não é possível encontrar um valor exato para uma integral imprópria, mas podemos saber se ela é convergente ou divergente usando outras integrais conhecidas.

**Teorema 4.65 (Teste da Comparação).** Sejam  $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas tais que existe  $c \geq a$  tal que

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \geq c.$$

Então

- (a) Se  $\int_a^\infty f(x) dx$  for convergente, então  $\int_a^\infty g(x) dx$  também será convergente.
- (b) Se  $\int_a^\infty g(x) dx$  for divergente, então  $\int_a^\infty f(x) dx$  também será divergente.

**Exemplo 4.66.** Mostre que  $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$  é convergente.

**SOLUÇÃO.** Não podemos avaliar diretamente a integral pois a primitiva de  $e^{-x^2}$  não é uma função elementar. Observe que se  $x \geq 1$ , então  $x^2 \geq x$ , assim  $-x^2 \leq -x$  e como a exponencial é crescente  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ . Assim

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}.$$

Logo pelo Teste da Comparação a integral é convergente.

**Exemplo 4.67.** Analise a convergência de  $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{para todo } x \in [1, \infty).$$

Como a integral  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge, pelo Teste da Comparação a integral  $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$  é convergente.

**Exemplo 4.68.** Analise a convergência de  $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observe que  $\frac{1+e^{-x}}{x} \geq \frac{1}{x}$  e  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$  diverge, então pelo Teste da Comparação a integral  $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$  é divergente.

**Teorema 4.69 (Teste da Comparação no Limite).** Sejam  $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas com  $f(x) \geq 0$  e  $g(x) > 0$  para todo  $x \geq a$ . Se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \text{com } 0 < L < \infty,$$

então  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  e  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  serão ambas convergentes ou ambas divergentes.

**Exemplo 4.70.** Analise a convergência de  $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ .

**SOLUÇÃO.** As funções  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  e  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$  são positivas e contínuas em  $[1, \infty)$  e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1.$$

Portanto, como a integral  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge,  $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  também é convergente.

Entretanto, no exemplo anterior, as integrais convergem para valores diferentes. De fato:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{t} = 1,$$

e

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\arctg t - \arctg 1) = \frac{\pi}{4}.$$

**Exemplo 4.71.** Analise a convergência de  $\int_1^\infty \frac{3}{e^x - 5} dx$ .

**SOLUÇÃO.** As funções  $f(x) = \frac{1}{e^x}$  e  $g(x) = \frac{3}{e^x - 5}$  são positivas e contínuas em  $[1, \infty)$  e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/e^x}{3/(e^x - 5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 5}{3e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} - \frac{5}{3e^x} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, como a integral  $\int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx = \int_1^\infty e^{-x} dx$  converge,  $\int_1^\infty \frac{3}{e^x - 5} dx$  também converge.

## 4.15 Integrais impróprias com integrandos descontínuos

Consideremos a função  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Queremos calcular a área  $A$  limitada pelo gráfico de  $f$  e pelas retas  $y = 0$ ,  $x = \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , e  $x = 4$ . Então

$$A = \int_\varepsilon^4 f(x) dx = -2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^4 = 4 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , temos  $A \rightarrow 4$ , o que quer dizer que a área  $A$  do conjunto *ilimitado*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x) \text{ e } 0 \leq x \leq 4\}$$

é *finita* e igual a 4.

**Definição 4.72 (Integral Imprópria do Tipo 2).**

**(a)** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b)$  e descontínua em  $b$ , definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx,$$

se esse limite existir.

**(b)** Seja  $f$  uma função contínua em  $(a, b]$  e descontínua em  $a$ , definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx,$$

se esse limite existir.

A integral imprópria  $\int_a^b f(x) dx$  é chamada **convergente** se o limite existir e for finito, caso contrário será dita **divergente**.

(c) Se  $f$  tiver uma descontinuidade em  $c$ , onde  $a < c < b$ , e ambos  $\int_a^c f(x)dx$  e  $\int_c^b f(x)dx$  forem convergentes, definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

e diremos que a integral  $\int_a^b f(x)dx$  é **convergente**. Se pelo menos umas das integrais acima for divergente, então diremos que a integral  $\int_a^b f(x)dx$  é **divergente**.

**Exemplo 4.73.** Calcule  $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observemos que  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$  não é contínua em  $x = 2$ . Então

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx &= \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^+} 2(x-2)^{\frac{1}{2}} \Big|_t^5 \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.74.** Determine se  $\int_0^{\pi/2} \sec x dx$  converge ou diverge.

**SOLUÇÃO.** Como o  $\lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \sec x = \infty$ , a integral é imprópria. Então

$$\int_0^{\pi/2} \sec x dx = \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \int_0^t \sec x dx = \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| \Big|_0^t = \infty,$$

pois  $\lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \sec x = \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \operatorname{tg} x = \infty$ . Portanto a integral é divergente.

**Exemplo 4.75.** Calcule  $\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$ .

**SOLUÇÃO.** Observemos que  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  não é contínua em  $x = 1$ . Então,

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1} dx.$$

Agora,

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln|t-1| = -\infty,$$

pois  $\lim_{t \rightarrow 1^-} |t - 1| = 0$ . Portanto a integral é divergente.

**Observação.** Se não tivéssemos notado a assíntota  $x = 1$  no exemplo anterior e tivéssemos confundido a integral com uma integral definida, poderíamos tê-la calculado erroneamente. De agora em diante devemos prestar atenção no integrando para decidir se a integral é imprópria ou não.

Uma observação importante é que os Testes da Comparação e da Comparação por Limite valem de maneira análoga para as integrais impróprias do tipo 2.



# Apêndice A

## O Corpo dos Números Reais

Nesse primeiro capítulo estudaremos o **corpos dos números reais**, que é de fundamental importância para toda a Ciência. Esse conjunto é composto pelos números **racionais** (que estudaremos em mais detalhes daqui a pouco) e pelos números **irracionais** (como o  $\pi$ , por exemplo). Tal corpo é construído matematicamente a partir do corpo dos números racionais, e uma construção possível é feita utilizando os chamados **cortes de Dedekind** (se você se interessar por essa construção, você pode encontrá-la em [3], por exemplo).

Como dito acima, começaremos nossos estudos pelo **corpo dos números racionais**, mas antes disso, vamos só responder a pergunta: afinal, o que é um **corpo**?

Em Matemática, chamamos de **corpo** a uma tripla  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  formada por um conjunto qualquer  $\mathbb{F}$  duas operações:  $+$  (que chamamos de **soma** ou **adição**) e  $\cdot$  (que chamamos de **produto** ou **multiplicação**) em  $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$  que satisfazem as dez seguintes propriedades:

(F) **Fechamento**: a soma e o produto não saem de  $\mathbb{F}$ , isto é, a soma e o produto de quaisquer dois elementos de  $\mathbb{F}$  resulta num elemento de  $\mathbb{F}$ . Matematicamente, escrevemos

$$x + y \in \mathbb{F} \quad \text{e} \quad x \cdot y \in \mathbb{F} \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{F}.$$

(A1) **Associativa da soma**: não importa o agrupamento que usamos para fazer a soma de três elementos quaisquer de  $\mathbb{F}$ , o resultado será o mesmo. Matematicamente, escrevemos

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{para quaisquer } x, y, z \in \mathbb{F}.$$

(A2) **Comutativa da soma**: não importa a ordem escolhida para somar dois elementos quaisquer de  $\mathbb{F}$ , o resultado da soma será o mesmo. É a famosa propriedade “a ordem das parcelas não altera a soma”. Matematicamente, escrevemos

$$x + y = y + x \quad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{F}.$$

- (A3) **Elemento neutro da soma:** existe um elemento em  $\mathbb{F}$ , que chamamos de **zero** e denotamos por 0, que quando somado a outro, não altera o valor do outro. Matematicamente, escrevemos: existe  $0 \in \mathbb{F}$  tal que

$$x + 0 = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{F}.$$

- (A4) **Elemento oposto da soma:** para cada elemento de  $\mathbb{F}$  existe um outro que, quando somado ao primeiro, resulta no elemento neutro da soma. Matematicamente, escrevemos: para todo  $x \in \mathbb{F}$ , existe  $y \in \mathbb{F}$ , tal que

$$x + y = 0.$$

**Observação:** abaixo veremos que cada elemento  $x \in \mathbb{F}$  possui um **único elemento oposto**. Assim, denotaremos por  $-x$  o único elemento oposto de  $x$ . Isto é, na escrita acima,  $y = -x$ .

- (M1) **Associativa do produto:** funciona como a associativa da soma, mas para o produto. Matematicamente, escrevemos

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \text{para quaisquer } x, y, z \in \mathbb{F}.$$

- (M2) **Comutativa do produto:** como a comutativa da soma, mas para o produto. Matematicamente, escrevemos

$$x \cdot y = y \cdot x \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{F}.$$

- (M3) **Elemento neutro do produto:** existe um elemento de  $\mathbb{F}$ , que chamamos de **um** ou **unidade** e denotamos por 1, que ao fazermos o produto dele com qualquer outro elemento de  $\mathbb{F}$  não altera o valor do outro. Matematicamente, escrevemos: existe  $1 \in \mathbb{F}$ , tal que

$$x \cdot 1 = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{F}.$$

- (M4) **Elemento inverso do produto:** para cada elemento de  $\mathbb{F}$  **diferente do elemento neutro da soma** existe um outro que, quando somado ao primeiro, resulta no elemento neutro do produto. Matematicamente, escrevemos: para todo  $x \in \mathbb{F}$  com  $x \neq 0$  existe  $y \in \mathbb{F}$  tal que

$$x \cdot y = 1.$$

**Observação:** abaixo veremos que cada elemento  $x \in \mathbb{F}$  possui um **único elemento inverso do produto**. Assim, denotaremos por  $\frac{1}{x}$  o único elemento inverso de  $x$ . Isto é, na escrita acima,  $y = \frac{1}{x}$ .

(D) **Distributiva:** essa propriedade une as operações de soma e produto, dizendo como operá-las quando em conjunto:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{para todos } x, y, z \in \mathbb{F}.$$

No produto, é comum omitirmos o sinal  $\cdot$  e escrevermos  $xy$  ao invés de  $x \cdot y$ ,  $xyz$  ao invés de  $x \cdot y \cdot z$  e  $x(y + z)$  ao invés de  $x \cdot (y + z)$ .

Além disso, quando as operações de soma e produto são conhecidas e não corremos o risco de confundi-las com outras, é comum denotarmos o corpo  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  simplesmente por  $\mathbb{F}$ .

Com as dez propriedades de um corpo, podemos provar várias outras, que usamos muito quando fazemos contas. A primeira delas é a **Lei do Cancelamento da Soma**.

**Proposição A.1 (LEI DO CANCELAMENTO DA SOMA).** Sejam  $\mathbb{F}$  um corpo e  $x, y, z \in \mathbb{F}$ . Se  $x + z = y + z$  então  $x = y$ , isto é, podemos **cancelar** o fator comum  $z$  em ambos os lados da soma.

*Demonstração.* Se  $x + z = y + z$  temos

$$\begin{array}{ll} & x + z = y + z \\ +(-z) \text{ em ambos os lados} & \\ \implies & (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) \\ \text{usando (A1)} & \\ \implies & x + (z + (-z)) = y + (z + (-z)) \\ \text{usando (A4)} & \\ \implies & x + 0 = y + 0 \\ \text{usando (A3)} & \\ \implies & x = y. \end{array}$$

□

De maneira análoga temos a **Lei do Cancelamento do Produto**, cuja demonstração fica como exercício ao leitor.

**Exercício 1 (Lei do Cancelamento do Produto).** Sejam  $\mathbb{F}$  um corpo e  $x, y, z \in \mathbb{F}$ . Se  $xz = yz$  e  $z \neq 0$  então  $x = y$ .

**Observação:** ao demonstrar a Lei do Cancelamento do Produto, você vai perceber que é fundamental assumirmos que  $z \neq 0$ . Por quê?

As seguintes propriedades seguem das leis do cancelamento da soma e do produto.

**Proposição A.2.** Valem os seguintes itens:

(a) o elemento neutro da soma é único.

*Demonstração.* **Observação:** a demonstração desse item é interessante e contém um valioso argumento de lógica matemática, usado em várias outras demonstrações. Queremos mostrar que o elemento neutro da soma é único, portanto assumiremos que existem dois elementos neutros da soma e mostraremos que eles são iguais.

Da propriedade (A3) sabemos que existe um elemento neutro da soma, o 0. Vamos supor por um momento que existe outro elemento neutro, e chamaremos esse outro elemento neutro de  $\widetilde{0}$ . Como estamos assumindo que  $\widetilde{0}$  é um elemento neutro da soma, sabemos que

$$x + \widetilde{0} = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{F},$$

pela definição de elemento neutro. Assim, temos

$$0 \quad \widetilde{0} \text{ é elemento } \underline{\text{neutro}} \text{ da soma} \quad 0 + \widetilde{0} \quad 0 \text{ é elemento } \underline{\text{neutro}} \text{ da soma} \quad \widetilde{0},$$

o que nos mostra que  $0 = \widetilde{0}$ . Portanto, 0 é o único elemento neutro da soma.  $\square$

(b) o elemento neutro do produto é único;

*Demonstração.* Fica como exercício ao leitor. Siga os passos da prova acima!  $\square$

(c) para cada  $x \in \mathbb{F}$ , seu elemento oposto da soma é único.

*Demonstração.* Assuma que  $y$  e  $z$  são ambos elementos opostos da soma de  $x$ , isto é

$$x + y = 0 \quad \text{e} \quad x + z = 0.$$

Temos então

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z,$$

ou seja  $y = z$ , e provamos que existe somente um elemento oposto da soma para  $x$ .

**Observação:** na sequência de igualdades acima, determine qual das dez propriedades foi usada em cada uma das igualdades.  $\square$

(d) o elemento inverso do produto de cada elemento não-nulo de  $\mathbb{F}$  é único;

*Demonstração.* Fica como exercício ao leitor. Siga os passos da prova acima!  $\square$

(e) o produto de qualquer número por zero é zero, isto é, para todo  $x \in \mathbb{F}$  temos  $x \cdot 0 = 0$ ;

*Demonstração.* Temos

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0,$$

Usando a Lei do Cancelamento da Soma obtemos  $x \cdot 0 = 0$ .

**Observação:** na sequência de igualdades acima, determine qual das dez propriedades foi usada em cada uma das igualdades.  $\square$

- (f) Para todo  $x \in \mathbb{F}$  temos  $-x = (-1) \cdot x$ , isto é, o oposto de  $x$  é igual ao produto de  $x$  pelo oposto de 1.

*Demonstração.* Denotemos  $y = (-1) \cdot x$ . Para mostrar que  $y = -x$ , basta mostrar que  $y$  é o oposto de  $x$ , isto é, que  $x + y = 0$ . Para isso, veja que

$$x + y = x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

o que completa a demonstração.

**Observação:** na sequência de igualdades acima, determine qual das dez propriedades foi usada em cada uma das igualdades.  $\square$

Agora que sabemos a definição e as propriedades básicas de um corpo, podemos começar nosso estudo com o corpo dos números racionais.

## A.1 O corpo dos números racionais

Indicamos por  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  os conjuntos dos números **naturais**, **inteiros** e **racionais**, respectivamente, isto é:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{e} \quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

No conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  faremos a seguinte **identificação**:

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \quad \text{se, e somente se,} \quad aq = bp.$$

**Observação:** aqui ao escrevermos  $ab$  e  $bp$ , estamos usando a multiplicação já conhecida dos números inteiros.

Isto quer dizer que, em  $\mathbb{Q}$ , não fazemos distinção entre números que são identificados entre si, por exemplo:  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{2}{4}$  representam o **mesmo** número racional.

Notemos que todo número racional possui **infinitas representações distintas**, uma vez que

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} \quad \text{para todo inteiro não-nulo } n.$$

Por exemplo, o número racional  $\frac{1}{3}$  pode ser representado por  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{3}{9}$ ,  $\frac{4}{12}$ ,  $\frac{-1}{-3}$ , e assim por diante.

Em  $\mathbb{Q}$  definimos a operação de **soma** por

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{para} \quad \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}.$$

**Observação:** para definir a soma em  $\mathbb{Q}$  usamos a soma e o produto de números inteiros. Isto é, na expressão acima, aonde está escrito  $ad + bc$  e  $bd$ , a soma e o produto usados aí são àquelas definidas para números inteiros.

Definimos também o **produto** em  $\mathbb{Q}$  por

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{para} \quad \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}.$$

**Observação:** Um número racional  $\frac{a}{b}$  também poderá ser denotado por  $a/b$ .

Uma primeira pergunta que devemos nos fazer é: se o mesmo número racional possui infinitas representações distintas, qual delas eu devo escolher para fazer a soma de dois números racionais? A soma vai mudar se eu escolher representações diferentes de cada um dos números racionais envolvidos? A resposta para essa pergunta é **não!** Podemos escolher qualquer representação na hora de fazermos a soma, que os resultados vão ser iguais (via a identificação dos números racionais que vimos). Vejamos isso num exemplo primeiro, antes de enunciar e demonstrar esse fato. Consideremos os números  $\frac{2}{7}$  e  $\frac{7}{5}$ . Fazendo a soma destes dois números racionais, temos

$$\frac{2}{7} + \frac{7}{5} = \frac{10 + 49}{35} = \frac{59}{35}.$$

Mas  $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$  e  $\frac{7}{5} = \frac{21}{15}$ , por exemplo. Ao usarmos essas diferentes representações deles, temos

$$\frac{4}{14} + \frac{21}{15} = \frac{60 + 294}{210} = \frac{354}{210}.$$

Por fim, basta notar que o resultado é o mesmo pois

$$\frac{59}{35} = \frac{354}{210} \quad \text{já que} \quad 59 \cdot 210 = 12.390 = 35 \cdot 354.$$

Isso vale sempre, e é o resultado do seguinte teorema.

**Teorema A.3.** A soma em  $\mathbb{Q}$  independe da representação escolhida, isto é, se  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$  e  $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$

então

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{p}{q} + \frac{m}{n}.$$

*Demonstração.* Basta seguir o que fizemos no exemplo acima, mas com letras ao invés de números. Vejamos que, pela definição de soma, temos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn}.$$

Para mostrar que esses resultados são iguais, basta ver que  $\frac{ad+cb}{bd}$  e  $\frac{pn+qm}{qn}$  são iguais. Mas note que

$$(ad + cb)qn = adqn + cbqn = (aq)dn + (cn)bq = bpdn + dmbq = (pn + qm)bd,$$

já que  $aq = bp$  e  $cn = dm$ , pois  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$  e  $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ . Isso nos mostra que ambos os resultados são iguais em  $\mathbb{Q}$ , e mostra que a soma não depende da representação escolhida para os números racionais.  $\square$

**Exercício 2.** Mostre que o produto em  $\mathbb{Q}$  independe da representação escolhida isto é, se  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$  e  $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$  então

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}.$$

Vamos mostrar que a tripla  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  é um corpo, isto é, satisfaz as dez propriedades listadas na seção anterior. Para isso, usaremos as já conhecidas propriedades de associatividade, comutatividade e distributividade da soma e do produto de números inteiros.

(F) **Fechamento:** a soma e o produto de dois números racionais é um número racional.

*Demonstração.* Claramente, se  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são números racionais, a soma  $\frac{ad+bc}{bd}$  e o produto  $\frac{ac}{bd}$  deles é também um número racional.  $\square$

(A1) **Associativa da soma:**  $(x + y) + z = x + (y + z)$  para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{Q}$ .

*Demonstração.* Escrevemos  $x = \frac{a}{b}$ ,  $y = \frac{c}{d}$  e  $z = \frac{e}{f}$ . Vamos fazer cada uma das operações acima, e ver que elas são iguais. Temos

$$(x + y) + z = \left( \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{(ad + bc)f + (bd)e}{(bd)f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}.$$

A outra operação nos dá

$$x + (y + z) = \frac{a}{b} + \left( \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} + \frac{cf + de}{df} = \frac{b(cf + de) + adf}{b(df)} = \frac{bcf + bde + adf}{bdf}.$$

Ambas as operações resultaram no mesmo número racional, isto é,  $(x + y) + z = x + (y + z)$ , ou seja, vale a propriedade associativa da soma.  $\square$

(A2) **Comutativa da soma:**  $x + y = y + x$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbb{Q}$ .

*Demonstração.* Fica como exercício ao leitor. Use o item acima como inspiração!  $\square$

(A3) **Elemento neutro da soma:** existe  $0 \in \mathbb{Q}$  tal que  $x + 0 = x$ , para todo  $x \in \mathbb{Q}$ .

*Demonstração.* O candidato natural a elemento neutro da soma em  $\mathbb{Q}$  é o número racional  $\frac{0}{1}$ . De fato, denotando  $0 = \frac{0}{1}$ , temos

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{b \cdot 1} = \frac{a}{b},$$

pois sabemos que  $a \cdot 1 = a$ ,  $b \cdot 0 = 0$  e  $b \cdot 1$  para quaisquer *inteiros*  $a$  e  $b$ .  $\square$

(A4) **Elemento oposto da soma:** para todo  $x \in \mathbb{Q}$ , existe  $y \in \mathbb{Q}$ , tal que  $x + y = 0$ , e denotamos  $y = -x$ .

*Demonstração.* Se  $x = \frac{a}{b}$ , o candidato natural ao seu oposto é  $y = \frac{-a}{b}$ . Para mostrar isso é só mostrar que  $x + y = 0$ . De fato:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab + b(-a)}{b^2} = \frac{ab - ab}{b^2} = \frac{0}{b^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

$\square$

Todas as demais propriedades também são válidas, e as suas demonstrações são deixadas como exercícios ao leitor.

(M1) **Associativa do produto:**  $(xy)z = x(yz)$  para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{Q}$ .

(M2) **Comutativa do produto:**  $xy = yx$  para todo  $x, y \in \mathbb{Q}$ .

(M3) **Elemento neutro do produto:** existe  $1 \in \mathbb{Q}$ , tal que  $x \cdot 1 = x$ , para todo  $x \in \mathbb{Q}$ .

(M4) **Elemento inverso do produto:** para todo  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $x \neq 0$ , existe  $y \in \mathbb{Q}$ , tal que  $xy = 1$ , e denotamos  $y = \frac{1}{x}$ .

(D) **Distributiva:**  $x(y + z) = xy + xz$  para todos  $x, y, z \in \mathbb{Q}$ .

**Observação:** vocês notaram que para provarmos as propriedades da soma e do produto de números racionais é necessário termos algumas dessas propriedades válidas para a soma e o produto de números inteiros (veja que não são todas válidas, pois em  $\mathbb{N}$ , por exemplo, não há oposto da soma, e nem em  $\mathbb{N}$  nem  $\mathbb{Z}$  não há inverso do produto), pois foi por meio delas que definimos a soma e o produto em  $\mathbb{Q}$ . Em Matemática a regra é essa, vamos construindo conjuntos e operações novos em termos de conjuntos e operações já conhecidos. O que devemos tomar cuidado sempre é: se uma propriedade vale para uma operação em conjunto que já conhecemos e usamos eles para construir outro conjunto e outra operação, então não é imediato que esse novo conjunto e essa nova operação satisfaçam a mesma propriedade. **É necessário provar isso!**

### Ordenação dos números racionais

Além das operações que podem ser feitas com números racionais (a soma e o produto), é fundamental sabermos **ordenar** os números racionais. Para isso, começamos com a seguinte definição:

**Definição A.4.** Diremos que um número racional  $x = \frac{a}{b}$  é

- **não-negativo:** se  $ab \in \mathbb{N}$ ;
- **positivo:** se  $ab \in \mathbb{N}$  e  $a \neq 0$ ;
- **não-positivo:** se  $\frac{a}{b}$  não for positivo;
- **negativo:** se  $\frac{a}{b}$  não for não-negativo.

Por exemplo:

- $\frac{1}{2}$ ,  $0$ ,  $\frac{-1}{3}$  são não-negativos;
- $\frac{1}{2}$  e  $\frac{-1}{3}$  são positivos, mas  $0$  não é positivo;
- $\frac{-1}{2}$ ,  $0$  e  $\frac{1}{3}$  são não-positivos;
- $\frac{-1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$  são negativos, mas  $0$  não é negativo.

**Exercício 3.** Mostre que  $x \in \mathbb{Q}$  é positivo se, e somente se,  $-x$  é negativo. Mostre também que  $x \in \mathbb{Q}$  é não-negativo se, e somente se,  $-x$  é não-positivo.

Com isso, definiremos uma **ordenação** em  $\mathbb{Q}$ , da seguinte maneira:

**Definição A.5.** Sejam  $x, y \in \mathbb{Q}$ . Diremos que

$x$  é **menor do que**  $y$  se existir  $t \in \mathbb{Q}$  positivo tal que  $y = x + t$ .

Nesse caso, escrevemos

$$x < y$$

Neste caso poderemos também dizer que  $y$  é **maior do que**  $x$  e escrevemos  $y > x$ . Note que, com essa definição, teremos  $x > 0$  se  $x$  for positivo e  $x < 0$  se  $x$  for negativo.

Se  $x < y$  ou  $x = y$ , então escreveremos  $x \leq y$  e lemos  $x$  é **menor ou igual a**  $y$ .

Da mesma forma se  $y > x$  ou  $y = x$ , então escreveremos  $y \geq x$  e lemos  $y$  é **maior ou igual a**  $x$ . Em particular teremos  $x \geq 0$  se  $x$  for não-negativo e  $x \leq 0$  se  $x$  for não-positivo.

A quádrupla  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ , formada pelo corpo  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  e a noção de **ordem**  $\leq$  definida acima, constitui o que chamamos de **corpo ordenado**. Ou seja, além de  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ser um corpo, a ordem  $\leq$  satisfaz as seis seguintes propriedades:

(O1) **Reflexiva:**  $x \leq x$  para todo  $x \in \mathbb{Q}$ .

*Demonstração.* Como  $x = x$ , então temos  $x \leq x$ . □

(O2) **Antissimétrica:** se  $x \leq y$  e  $y \leq x$  então  $x = y$ .

*Demonstração.* Se  $x = y$ , então não temos nada a provar. Assumimos então que  $x \neq y$ . Como  $x \leq y$  e  $x \neq y$ , temos  $x < y$ . Da definição de  $<$ , existe  $t \in \mathbb{Q}$  positivo tal que  $y = x + t$ . Analogamente, como  $y \leq x$  e  $y \neq x$ , devemos ter  $y < x$ . Assim, existe  $s \in \mathbb{Q}$  positivo tal que  $x = y + s$ . Assim

$$x = y + s = (x + t) + s = x + t + s.$$

Da Lei do Cancelamento da Soma, temos  $t + s = 0$ , ou seja  $s = -t$ . Como  $t$  é positivo, do Exercício 3 segue que  $s = -t$  deve ser negativo. Como  $s$  é positivo, chegamos numa contradição. Isso mostra que o único caso possível é  $x = y$ . □

(O3) **Transitiva:** se  $x \leq y$  e  $y \leq z$  então  $x \leq z$ .

*Demonstração.* Como  $x \leq y$  e  $y \leq z$  existem  $t, s \in \mathbb{Q}$  não-negativos tais que  $y = x + t$  e  $z = y + s$ . Assim

$$z = y + s = (x + t) + s = x + (t + s),$$

e  $t + s \in \mathbb{Q}$  é não-negativo. Portanto  $x \leq z$ . □

A demonstração dos próximos três itens fica a cargo do leitor:

(O4) Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{Q}$  temos ou  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ .

(OA) Se  $x \leq y$  então  $x + z \leq y + z$ .

(OM) Se  $x \leq y$  e  $z \geq 0$ , então  $xz \leq yz$ .

**Exercício 4.** Mostre que no corpo ordenado  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  valem as seguintes propriedades:

(a) se  $x \leq y$  e  $z \leq w$  então  $x + z \leq y + w$ .

(b) se  $0 \leq x \leq y$  e  $0 \leq z \leq w$  então  $xz \leq yw$ .

(c)  $x < y$  se, e somente se,  $x + z < y + z$ ;

(d)  $z > 0$  se, e somente se,  $\frac{1}{z} > 0$ ;

(e) se  $z > 0$ , então  $x < y$  se, e somente se,  $xz < yz$ ;

(f) se  $z < 0$ , então  $x < y$  se, e somente se,  $xz > yz$ ;

(g) se  $0 \leq x < y$  e  $0 \leq z < w$  então  $xz < yw$ ;

(h) se  $0 < x < y$  então  $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ ;

(i) **Tricotomia:**  $x < y$  ou  $x = y$  ou  $x > y$ ;

(j) **Anulamento do produto:**  $xy = 0$  se, e somente se,  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

Por fim, definimos as potências inteiras de um número racional.

**Definição A.6.** Se  $x \in \mathbb{Q}$  e  $n$  é um inteiro positivo, definimos

$$x^n = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-vezes}} \quad \text{e} \quad x^{-n} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}}_{n\text{-vezes}}.$$

Por fim, se  $x \neq 0$  é racional, definimos  $x^0 = 1$ .

**Observação:** Note que, acima,  $x^0 = 1$  só está definido para  $x \neq 0$ . Lembramos que  $0^0$  é uma **indeterminação**, ou seja, matematicamente falando, é uma quantidade que não tem um valor determinado.

### Redutibilidade de números racionais

**Definição A.7.** Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$  inteiros não-nulos, dizemos que  $d$  é o **máximo divisor comum** entre  $a$  e  $b$  se  $d$  é o maior número inteiro positivo que divide simultaneamente  $a$  e  $b$ . Usamos a notação  $d = \text{mdc}\{a, b\}$ .

Adicionalmente, definimos  $\text{mdc}\{a, 0\} = a$  se  $a > 0$  e  $\text{mdc}\{a, 0\} = -a$  se  $a < 0$ .

**Definição A.8.** Seja  $x = \frac{a}{b}$  um número racional. Dizemos que  $x$  é **irredutível** se

$$\text{mdc}\{a, b\} = 1;$$

caso contrário, dizemos que  $x$  é **redutível**, isto é, se  $\text{mdc}\{a, b\} > 1$ .

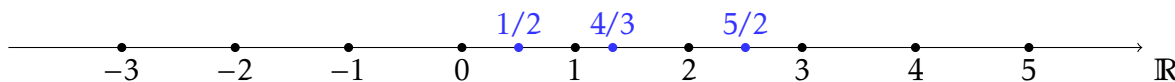
Agora veremos que todo número racional possui uma representação irredutível.

**Proposição A.9.** Se  $\frac{a}{b}$  é um número racional então existem  $p, q \in \mathbb{Z}$  tal que  $q \neq 0$  com  $\text{mdc}\{p, q\} = 1$  e  $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ .

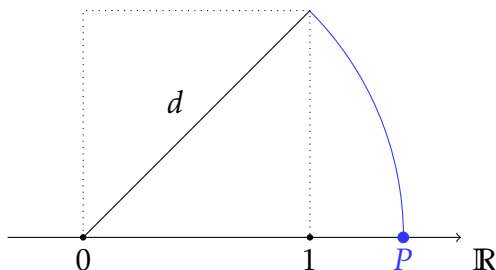
*Demonstração.* Sabemos que  $b \neq 0$ , assim se  $a = 0$  basta tomar  $p = 0$ ,  $q = 1$  e teremos  $\frac{0}{b} = \frac{0}{1}$ . Agora se  $a \neq 0$  seja  $d = \text{mdc}\{a, b\}$ . Assim, existem  $n, m \in \mathbb{Z}$  com  $p, q \neq 0$  tais que  $a = dp$  e  $b = dq$ . Desta maneira temos  $\text{mdc}\{p, q\} = 1$  e  $\frac{a}{b} = \frac{dp}{dq} = \frac{p}{q}$ .  $\square$

## A.2 O corpos dos números reais

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada **reta real**.



Mas o conjunto dos pontos racionais não é suficiente para preencher toda a reta real; isto é, existem pontos da reta real que não são racionais. Para que vejamos este fato, considere um quadrado de lado 1 e diagonal  $d$ . Pelo Teorema de Pitágoras temos  $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ . Seja  $P$  a intersecção do eixo  $x$  com a circunferência de raio  $d$ .



Mostraremos que  $P$  é um ponto da reta real que **não** é racional e para isso, lembremos que um número  $a \in \mathbb{Z}$  é dito **par** se existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = 2k$ , e dizemos que  $a \in \mathbb{Z}$  é **ímpar** se existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = 2k + 1$ .

**Proposição A.10.** Seja  $a \in \mathbb{Z}$ . Temos:

(a) se  $a$  for ímpar então  $a^2$  é ímpar;

(b) se  $a^2$  for par então  $a$  é par.

*Demonstração.* Provemos (a). Se  $a$  for ímpar existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = 2k + 1$ . Daí segue que

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\ell}) + 1 = 2\ell + 1,$$

onde  $\ell = 2k^2 + 2k$ , e portanto  $a^2$  também será ímpar.

Para (b) suponha por absurdo que  $a$  não é par. Logo  $a$  é ímpar e pelo item (a)  $a^2$  também é ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto  $a$  é par necessariamente.  $\square$

**Proposição A.11.** A equação  $x^2 = 2$  não possui solução em  $\mathbb{Q}$ .

*Demonstração.* Suponhamos, por absurdo, que  $x^2 = 2$  tem uma solução em  $\mathbb{Q}$ . Então da Proposição A.9 podemos assumir que  $x = \frac{a}{b}$  com  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $\frac{a}{b}$  irredutível. Logo  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ , ou seja,  $a^2 = 2b^2$  e portanto  $a^2$  é par. Segue da Proposição A.10 (b) que  $a$  também é par. Portanto existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = 2k$ . Mas

$$\begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ a = 2k \end{cases} \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2.$$

Portanto  $b^2$  é par e, pela Proposição A.10 (b),  $b$  também é par. Mas isto implica que  $\frac{a}{b}$  é redutível (pois  $a$  e  $b$  são divisíveis por 2) o que é uma contradição. Portanto não existe  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  tal que  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ .  $\square$

Denotamos o conjunto dos **números reais** por  $\mathbb{R}$ . Temos  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  e todo número real que não é racional é dito **irracional**. Em  $\mathbb{R}$ , definimos uma adição  $+$ , uma multiplicação  $\cdot$  e uma relação de ordem  $\leq$ . Então a quádrupla  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto  $\mathbb{R}$  é um corpo ordenado.

Daqui pra frente usaremos as notações:

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ e } \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O conjunto dos números reais pode ser construído a partir dos números racionais utilizando, por exemplo, os chamados **cortes de Dedekind**. Todas as propriedades acima são obtidas da

construção feita, e também algumas outras, que veremos a seguir. Para o leitor interessado em ver esta construção, sugerimos aqui o livro [3].

## Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , definimos a **união**  $A \cup B$  de  $A$  e  $B$  como sendo o conjunto formado por todos os elementos de  $A$  e  $B$ . A **intersecção**  $A \cap B$  de  $A$  e  $B$  é definido como o conjunto formado pelos elementos que estão simultaneamente em  $A$  e  $B$ . O conjunto de  $\mathbb{R}$  que não possui nenhum elemento é chamado de **conjunto vazio** e denotado por  $\emptyset$ .

Alguns subconjuntos de  $\mathbb{R}$  têm uma forma especial, que são os chamados **intervalos**. São eles:

**Intervalos abertos:** se  $a < b$  são números reais, denotamos por  $(a, b)$  o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

São também intervalos abertos os conjuntos

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad \text{e} \quad (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

**Intervalos fechados:** se  $a < b$  são números reais, denotamos por  $[a, b]$  o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

São também intervalos fechados os conjuntos

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \quad \text{e} \quad (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

**Intervalos semi-abertos:** se  $a < b$  são números reais, denotamos por  $[a, b)$  o conjunto

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

É também intervalo semi-aberto o conjunto

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

## A.3 Equações e inequações

Para resolver uma **equação** em  $x$  é necessário encontrar o conjunto dos números reais  $x$  que satisfazem a equação. Para resolver uma **inequação** em  $x$  é necessário encontrar o conjunto dos números reais  $x$  que satisfazem a desigualdade. Em qualquer um dos casos, dizemos que o conjunto dos números reais  $x$  que satisfazem a equação/inequação é o **conjunto solução** da equação/inequação.

**Exemplo A.12.** A inequação  $x - 2 < 4$  tem conjunto solução  $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 6\} = (-\infty, 6)$ .

**Exemplo A.13.** Resolva a inequação  $-3(4 - x) \leq 12$ .

**SOLUÇÃO.** Multiplicando a ambos os lados da desigualdade por  $-\frac{1}{3}$  temos  $4 - x \geq -4$ . Subtraindo 4 resulta em  $-x \geq -8$  e multiplicando por  $-1$  obtemos  $x \leq 8$ . Logo o conjunto solução desta inequação é  $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 8\} = (-\infty, 8]$ .

**Exemplo A.14.** Resolva a inequação  $\pi x + 1729 < 4x + 1$ .

**SOLUÇÃO.** Vamos começar adicionando o oposto de  $1729 + 4x$  dos dois lados da inequação. Assim  $\pi x + 1729 - 1729 - 4x < 4x + 1 - 1729 - 4x$  ou seja  $\pi x - 4x < 1 - 1729$  que também pode ser escrita como  $(\pi - 4)x < -1728$ . Agora multiplicaremos a última inequação pelo inverso de  $\pi - 4$ , que é negativo. Obtemos então  $x > -\frac{1728}{\pi - 4}$ , ou seja  $x > \frac{1728}{4 - \pi}$ . Assim o conjunto solução desta inequação é  $S = (\frac{1728}{4 - \pi}, \infty)$ .

**Exemplo A.15.** Qual é o sinal de  $\frac{x+1}{1-x}$  em função de  $x$ ?

**SOLUÇÃO.** O numerador é positivo quando  $x > -1$ , negativo quando  $x < -1$  e zero quando  $x = -1$ . O denominador é positivo quando  $x < 1$ , negativo quando  $x > 1$  e zero quando  $x = 1$ . Portanto a fração será positiva quando  $-1 < x < 1$ , negativa quando  $x < -1$  ou  $x > 1$  e zero quando  $x = -1$ .

**Exercício 5.** Resolva a inequação  $\frac{2x+1}{x-4} < 0$ .

## A.4 Módulo de um número real

**Definição A.16.** Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Definimos o **módulo** (ou **valor absoluto**) de  $x$  por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Segue da definição acima que  $|x| \geq 0$  e  $-|x| \leq x \leq |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo A.17.** Descreva o valor de  $|x+1| + |x-1|$  sem utilizar o módulo.

**SOLUÇÃO.** Temos

$$\begin{aligned}
& - \text{ se } x \geq 1, \text{ então } \begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-1| = x-1 \end{cases} \text{ e, portanto, } |x+1| + |x-1| = x+1 + x-1 = 2x. \\
& - \text{ se } -1 \leq x < 1, \text{ então } \begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-1| = -x+1 \end{cases} \text{ e, portanto, } |x+1| + |x-1| = x+1 - x+1 = 2. \\
& - \text{ se } x < -1, \text{ então } \begin{cases} |x+1| = -x-1 \\ |x-1| = -x+1 \end{cases} \text{ e, portanto, } |x+1| + |x-1| = -x-1 - x+1 = -2x.
\end{aligned}$$

$$\text{Logo } |x+1| + |x-1| = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ -2x, & x < -1. \end{cases}$$

**Exercício 6.** Mostre que  $|x|^2 = x^2$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , ou seja, o quadrado de um número real não muda quando se troca seu sinal.

Lembre que  $\sqrt{x}$  significa **raiz quadrada positiva de**  $x$ . Logo segue do Exercício 6 que

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

**Exemplo A.18.** A equação  $|x| = r$  com  $r \geq 0$  tem como conjunto solução  $S = \{-r, r\}$ .

O resultado do Exemplo A.18 pode ser generalizado como no exemplo seguinte.

**Exemplo A.19.** A equação  $|ax - b| = r$  com  $r \geq 0$  e  $a \neq 0$  tem como conjunto solução  $S = \left\{ \frac{b-r}{a}, \frac{b+r}{a} \right\}$ .

**Exemplo A.20.** Resolva a equação  $|2x + 1| = 3$ .

**SOLUÇÃO.** Temos  $2x + 1 = 3$  ou  $2x + 1 = -3$ , o que nos leva ao conjunto solução  $S = \{-2, 1\}$ .

Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais. Então a **distância** de  $x$  a  $y$  é dada por  $|x - y|$ . Assim  $|x - y|$  é a **medida** do segmento  $xy$ . Em particular como  $|x| = |x - 0|$  então  $|x|$  é a distância de  $x$  a 0. O próximo exemplo diz que a distância de  $x$  a 0 é menor do que  $r$ , com  $r > 0$ , se, e somente se,  $x$  estiver entre  $-r$  e  $r$ .

**Exemplo A.21.** Seja  $r > 0$ . Então  $|x| < r$  se, e somente se,  $-r < x < r$ .

**SOLUÇÃO.** Suponhamos que  $|x| < r$ . Analisando o sinal de  $x$ , temos:

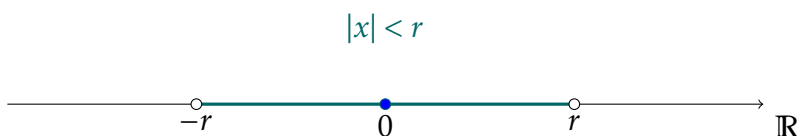
- se  $x \geq 0$  então  $r > |x| = x$ ,
- se  $x < 0$  então  $r > |x| = -x$  e portanto  $-r < x$ .

Portanto  $-r < x < r$ . Agora suponhamos que  $-r < x < r$ . Então,

- se  $x \geq 0$  então  $|x| = x < r$ ,
- se  $x < 0$  então  $-x = |x| < r$ .

Portanto,  $|x| < r$ , o que conclui a demonstração.

A seguinte figura ilustra o significado geométrico do exemplo.



Agora, vamos generalizar o Exemplo A.21.

**Exemplo A.22.** Resolva a inequação  $|ax - b| < r$  na variável  $x$  com  $r > 0$  e  $a \neq 0$ .

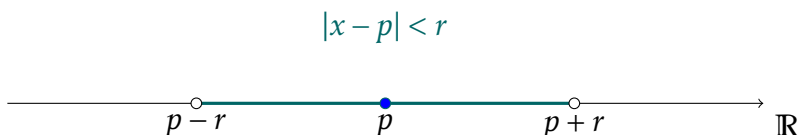
**SOLUÇÃO.** De forma similar ao exemplo anterior,  $-r < ax - b < r$ . Somando  $b$  aos termos da inequação obtemos

$$b - r < ax < b + r.$$

Logo,

- se  $a > 0$  então  $\frac{b-r}{a} < x < \frac{b+r}{a}$ ;
- se  $a < 0$  então  $\frac{b+r}{a} < x < \frac{b-r}{a}$ .

Como caso particular do Exemplo A.22, se a distância de  $x$  a  $p$  for menor do que  $r$ , isto é,  $|x - p| < r$ ,  $r > 0$ , então  $x$  estará entre  $p - r$  e  $p + r$ . Geometricamente,



**Exemplo A.23.** Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ , vale  $|xy| = |x||y|$ .

**SOLUÇÃO.** Temos  $|xy|^2 = (xy)^2 = x^2 y^2 = |x|^2 |y|^2 = (|x||y|)^2$ . Como  $|xy| \geq 0$  e  $|x||y| \geq 0$ , temos

$$|xy| = |x||y|.$$

**Proposição A.24 (DESIGUALDADE TRIANGULAR).** Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  temos

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

e além disso vale a igualdade se, e somente se,  $xy \geq 0$ .

*Demonstração.* Somando  $-|x| \leq x \leq |x|$  e  $-|y| \leq y \leq |y|$  obtemos  $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$ .

Mostremos agora a última afirmação. Para isso, suponha primeiro que  $xy \geq 0$ . Então devemos ter ou  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  ou  $x \leq 0$  e  $y \leq 0$ . No primeiro caso  $|x + y| = x + y = |x| + |y|$ , e no segundo  $|x + y| = -x - y = |x| + |y|$ . A recíproca fica a cargo do leitor.  $\square$

**Corolário A.25.** Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  temos

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

*Demonstração.* Veja que

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \quad \text{e} \quad |y| = |y - x + x| \leq |x - y| + |x|,$$

assim

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad \text{e} \quad |y| - |x| \leq |x - y|.$$

Isso nos mostra que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|,$$

ou seja  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ , o que completa a prova.  $\square$

## A.5 Limitação de subconjuntos de $\mathbb{R}$

**Definição A.26.** Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  será dito **limitado**, se existir  $L > 0$  tal que

$$|x| \leq L \quad \text{para todo } x \in A.$$

Dizemos ainda que  $A \subset \mathbb{R}$  é **ilimitado** se ele não for limitado.

O resultado a seguir é uma consequência imediata da definição acima e sua demonstração fica como exercício ao leitor.

**Proposição A.27.** Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  será:

- (a) limitado se, e somente se, existir  $L > 0$  tal que  $A \subset [-L, L]$ ;
- (b) ilimitado se, e somente se, para todo  $L > 0$ , existir  $x \in A$  tal que  $|x| > L$ .

**Exemplo A.28.** Temos:

- (a)  $A = [0, 1]$  é limitado;
- (b)  $\mathbb{N}$  não é limitado (mostraremos mais tarde);
- (c)  $B = \left\{ \frac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$  é limitado;
- (d)  $C = \left\{ \frac{2n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$  é limitado.

**Definição A.29.** Considere um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que

- (a)  $A$  é **limitado superiormente** se existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq L$ , para todo  $x \in A$ . Neste caso,  $L$  será chamado de **limitante superior** (ou **cota superior**) de  $A$ .
- (b)  $A$  é **limitado inferiormente** se existe  $\ell$  tal que  $x \geq \ell$ , para todo  $x \in A$ . Neste caso,  $\ell$  será chamado **limitante inferior** (ou **cota inferior**) de  $A$ .

Segundo a definição acima podemos notar que  $A \subset \mathbb{R}$  será limitado se, e somente se,  $A$  for limitado superiormente e inferiormente.

**Exemplo A.30.**

- (a) Considere  $A = [0, 1)$ . Então  $-2$  e  $0$  são limitantes inferiores de  $A$ . Também  $1$ ,  $\pi$  e  $101$  são limitantes superiores de  $A$ .
- (b)  $\mathbb{N}$  não é limitado mas é limitado inferiormente por  $0$  pois  $0 \leq x$  para todo  $x \in \mathbb{N}$ .
- (c)  $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$  não é limitado, mas é limitado superiormente por  $L$ , onde  $L \geq \sqrt{2}$ .

**Definição A.31.** Seja  $A \subset \mathbb{R}$  um conjunto limitado superiormente (limitado inferiormente) com  $A \neq \emptyset$ .

- (a) Se  $L \in \mathbb{R}$  for uma cota superior (cota inferior) de  $A$  e para toda cota superior (cota inferior)  $L_1$  de  $A$ , tivermos

$$L \leq L_1 \quad (L_1 \leq L),$$

então  $L$  será chamado **supremo** (**ínfimo**) de  $A$ . Neste caso, escreveremos

$$L = \sup A \quad (L = \inf A).$$

**(b)** Se  $L = \sup A \in A$  ( $L = \inf A \in A$ ), então  $L$  será **máximo** (**mínimo**) de  $A$ . Neste caso, escreveremos

$$L = \max A \quad (L = \min A).$$

As seguintes proposições nos dão caracterizações úteis para o supremo e o ínfimo de um subconjunto de  $\mathbb{R}$ , e suas demonstrações ficam a cargo do leitor.

**Proposição A.32.** Seja  $A \subset \mathbb{R}$  limitado superiormente com  $A \neq \emptyset$ . Então  $L = \sup A$  se, e somente se, valerm as seguintes propriedades:

- (a)**  $L$  é cota superior de  $A$ .
- (b)** Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $a \in A$  tal que  $a > L - \epsilon$ .

Analogamente temos

**Proposição A.33.** Seja  $A \subset \mathbb{R}$  limitado inferiormente com  $A \neq \emptyset$ . Então  $L = \inf A$  se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

- (a)**  $L$  é cota inferior de  $A$ .
- (b)** Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $a \in A$  tal que  $a < L + \epsilon$ .

**Exemplo A.34.**

- (a)** Considere  $A = (0, 1]$ , então  $\inf A = 0$  e  $\sup A = \max A = 1$ .
- (b)** Considere  $B = \mathbb{N}$ , então  $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$ .
- (c)** Considere  $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ , então  $\sup C = \sqrt{2}$  e  $\inf C = -\sqrt{2}$ , mas note que  $-\sqrt{2}, \sqrt{2} \notin C$  e assim eles não são máximo e mínimo, respectivamente.

O seguinte resultado é de fundamental importância para a teoria de funções de uma variável real e é obtido na construção do conjunto dos números reais. Vamos enunciá-lo aqui sem demonstração.

**Proposição A.35 (PROPRIEDADE DO SUPREMO).** Considere  $A \subset \mathbb{R}$  com  $A \neq \emptyset$ . Se  $A$  for limitado superiormente então existirá  $L = \sup A$ .

Com esta propriedade, podemos provar muitas outras, como veremos na sequência.

**Proposição A.36.** Se  $A \subset \mathbb{R}$  for limitado superiormente (inferiormente), então o conjunto  $-A = \{-x: x \in A\}$  será limitado inferiormente (superiormente) e

$$\sup A = -\inf(-A) \quad (\inf A = -\sup(-A)).$$

*Demonstração.* Mostraremos o caso  $A$  limitado superiormente, e o outro caso fica a cargo do leitor. Seja  $L = \sup A$ , que existe pela Propriedade do Supremo. Claramente  $x \leq L$  para todo  $x \in A$ , já que  $L$  é uma cota superior de  $A$ , e assim  $-L \leq -x$  para todo  $x \in A$ . Portanto  $-L$  é uma cota inferior de  $-A$ .

Seja  $\epsilon > 0$ . Da propriedade de supremo, existe  $x \in A$  tal que  $L - \epsilon < x$  e desta forma  $-x < -L + \epsilon$ . Da Proposição A.33 temos  $-L = \inf(-A)$ , isto é,  $\sup A = -\inf(-A)$ .  $\square$

**Corolário A.37.** Considere  $A \subset \mathbb{R}$  com  $A \neq \emptyset$ . Se  $A$  for limitado inferiormente, então existirá  $L = \inf A$ .

*Demonstração.* Como  $A$  é limitado inferiormente, da proposição acima segue que  $-A$  é limitado superiormente e que  $\inf A = -\sup(-A)$ . Portanto existe  $\inf A$ .  $\square$

**Corolário A.38.** Considere  $A \subset \mathbb{R}$  com  $A \neq \emptyset$ . Se  $A$  for limitado, então  $A$  admite ínfimo e supremo.

*Demonstração.* A demonstração é imediata dos dois resultados anteriores.  $\square$

## A propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$

**Teorema A.39 (PROPRIEDADE ARQUIMEDIANA DE  $\mathbb{R}$ ).** Se  $x \neq 0$  é um número real então o conjunto

$$A = \{nx: n \in \mathbb{N}\} \quad \text{é ilimitado.}$$

*Demonstração.* Consideremos primeiramente que  $x > 0$ . Suponhamos, por absurdo, que  $A$  seja limitado. Então existirá  $L = \sup A$  pois  $A \neq \emptyset$ . Logo dado  $m \in \mathbb{N}$  existirá  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $L - x < mx$ , pela Proposição A.32. Portanto  $L < (m + 1)x$  o que contradiz a suposição.

O caso  $x < 0$  segue de modo análogo.  $\square$

**Corolário A.40.** A propriedade Arquimediana tem as seguintes consequências:

- (a) o conjunto dos números naturais não é limitado superiormente;
- (b) para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \epsilon$ ;
- (c) se  $A = \left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}^*\right\}$  então  $\inf A = 0$ .

## A.6 Topologia de $\mathbb{R}$

**Definição A.41.** Uma **vizinhança** de um número  $a \in \mathbb{R}$  é qualquer intervalo aberto contendo  $a$ .

**Exemplo A.42.** O conjunto  $V_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$  onde  $\delta > 0$  é uma vizinhança de  $a \in \mathbb{R}$ .

**Definição A.43.** Sejam  $A \subset \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Se para toda vizinhança  $V_\delta(b)$  de  $b$  existir  $a \in V_\delta(b) \cap A$ , com  $a \neq b$ , então  $b$  será dito **ponto de acumulação** de  $A$ .

Dizemos que  $b$  é um **ponto no fecho** de  $A$  se ou  $b \in A$  ou  $b$  é um ponto de acumulação de  $A$ .

**Exemplo A.44.**

- (a) Seja  $A = (a, b)$ . Então o conjunto dos pontos de acumulação de  $A$  é  $[a, b]$ .
- (b) Seja  $B = \mathbb{Z}$ . Então  $B$  não tem pontos de acumulação.
- (c) Qualquer subconjunto finito de  $\mathbb{R}$  não admite pontos de acumulação.

**Exercício 7.** Mostre que se um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  tiver um ponto de acumulação, então  $A$  será um conjunto com infinitos elementos.

**Definição A.45.** Seja  $B \subset \mathbb{R}$ . Um ponto  $b \in B$  será dito um **ponto isolado** de  $B$  se existir  $\delta > 0$  tal que  $V_\delta(b)$  não contém pontos de  $B$  distintos de  $b$ .

**Exemplo A.46.**

- (a) Seja  $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ . Então o conjunto dos pontos de acumulação de  $B$  é  $\{0\}$  e o conjunto dos pontos isolados de  $B$  é o próprio conjunto  $B$ .
- (b) O conjunto  $\mathbb{Z}$  possui apenas pontos isolados.

Podem haver conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo  $\mathbb{Z}$ ). No entanto, todo conjunto infinito e limitado possui pelo menos um ponto de acumulação.

Usando ainda a propriedade Arquimediana de  $\mathbb{R}$  temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [3], por exemplo.

**Proposição A.47.** Qualquer intervalo aberto não-vazio contém um número racional.

Com este resultado em mãos, podemos provar:

**Corolário A.48.** Qualquer intervalo aberto não-vazio contém um número infinito de números racionais.

**Corolário A.49.** O conjunto dos pontos de acumulação de  $\mathbb{Q}$  é  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 8.**

- (a) Mostre que se  $r$  for um número racional não nulo, então  $r\sqrt{2}$  será um número irracional.
- (b) Mostre que todo intervalo aberto contém um número irracional.
- (c) Mostre que todo intervalo aberto contém um número infinito de números irracionais.
- (d) Mostre que qualquer número real é ponto de acumulação do conjunto dos números irracionais.



# Apêndice B

## Funções

O objeto fundamental deste curso de Cálculo é a **classe das funções**, que surgem quando uma determinada quantidade depende de outra (ou outras). Por exemplo: a área  $A$  de um círculo depende de seu raio  $r$  e a lei que relaciona  $r$  com  $A$  é dada por  $A = \pi r^2$ . Neste caso dizemos que  $A$  é **uma função de**  $r$ , e normalmente escrevemos  $A(r)$  para indicar essa dependência. Outros exemplos são: a população  $P(t)$  de uma determinada espécie que depende do tempo  $t$ , e o custo  $C(w)$  de envio de um pacote pelo correio que depende de seu peso  $w$ .

### B.1 Noções gerais

**Definição B.1.** Dados dois conjuntos não-vazios  $A$  e  $B$ , uma **função  $f$  de  $A$  em  $B$** , que escrevemos  $f: A \rightarrow B$ , é uma lei ou regra que a associa a cada  $x \in A$  um único elemento  $f(x) \in B$ .

(a)  $A$  é chamado **domínio** de  $f$ , e é denotado comumente por  $D_f$  ou  $D(f)$ ;

(b)  $B$  é chamado **contra-domínio** de  $f$ ;

(c) o conjunto

$$\text{Im}(f) = \{y \in B: y = f(x), x \in D_f\}$$

é chamado **imagem** de  $f$ . Podemos denotar a imagem de  $f$  também por  $f(D_f)$ .

Também podemos descrever a ação de  $f$  ponto-a-ponto da seguinte maneira

$$A \ni x \mapsto f(x) \in B.$$

*Convenção:* se o domínio de uma função real de uma variável real  $f$  não é dado explicitamente então, por convenção, adotamos como domínio o conjunto de todos os números reais  $x$

para os quais  $f(x)$  é um número real (isto é,  $D_f$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}$  nos quais  $f$  está bem definida).

**Exemplo B.2.** Considere uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Se  $f(x) = k$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  e para algum  $k \in \mathbb{R}$  fixado, dizemos que  $f$  é uma **função constante**. Em particular, se  $k = 0$ , dizemos que  $f$  é a **função nula**.
- (b) Se  $f(x) = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é a **função identidade**.
- (c) Se  $f(x) = ax$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  e algum  $a \in \mathbb{R}$  fixado, dizemos que  $f$  é uma **função linear**.
- (d) Se  $f(x) = ax + b$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $a, b \in \mathbb{R}$  fixados, dizemos que  $f$  é uma **função afim**.
- (e) Se  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  e constantes  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  fixados, dizemos que  $f$  é uma **função polinomial** (ou um **polinômio**). Em particular:
  - (i) se  $n = 2$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é chamada de **função quadrática**,
  - (ii) se  $n = 3$ ,  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  é chamada de **função cúbica**.
- (f) Se  $f(x) = x^a$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}$  fixado, dizemos que  $f$  é uma **função potência**. Em particular, se  $a = \frac{1}{n}$ ,  $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ , onde  $n$  é um inteiro positivo, dizemos que  $f$  é uma **função raiz**.
  - \* Temos  $D_f = [0, \infty)$  se  $n$  é par e  $D_f = \mathbb{R}$  se  $n$  é ímpar.
- (g) Se  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , onde  $p$  e  $q$  são polinômios, dizemos que  $f$  é uma **função racional**.
  - \* Note que  $D_f = \{x \in \mathbb{R}: q(x) \neq 0\}$ ;
- (h) Se  $f$  é construída usando operações algébricas começando com polinômios, dizemos que  $f$  é uma **função algébrica**. Por exemplo,

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ com } D_f = \mathbb{R} \quad \text{ou}$$

$$g(x) = \frac{(x-4)}{x^4 + \sqrt{2}x} \sqrt[3]{x+1} \text{ com } D_g = (0, \infty).$$

**Definição B.3.** Sejam  $f: D_f \rightarrow B$  e  $D \subset D_f$ . Denotamos por  $f|_D$  a **restrição** de  $f$  ao subconjunto  $D$  de  $D_f$ . Isto é,  $f|_D: D \rightarrow B$  é dada por

$$f|_D(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in D.$$

**Exemplo B.4. Função definida por partes:** definida de forma diversa em diferentes partes de seu domínio. Por exemplo,

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \leq 1, \\ x^2 & \text{se } x > 1; \end{cases} \quad (b) \quad g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

**Exemplo B.5.** Escreva a função  $f(x) = |x-1| + 3$  sem utilizar o módulo.

**SOLUÇÃO.** Para  $x \geq 1$  temos  $|x-1| = x-1$  e para  $x < 1$  temos  $|x-1| = 1-x$  e assim

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq 1, \\ 4-x & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

**Exemplo B.6.** Um fabricante de refrigerante quer produzir latas cilíndricas para seu produto. A lata dever ter um volume de 360 ml. Expresse a área superficial total da lata em função do seu raio e dê o domínio da função.

**SOLUÇÃO.** Sejam  $r$  o raio da lata e  $h$  a altura. A área superficial total (topo, fundo e área lateral) é dada por  $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ . Sabemos que o volume  $V = \pi r^2 h$  deve ser de 360 ml, temos  $\pi r^2 h = 360$ , ou seja  $h = 360/\pi r^2$ . Portanto,  $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r 360/\pi r^2 = 2\pi r^2 + 720/r$ . Como  $r$  só pode assumir valores positivos,  $D_S = (0, \infty)$ .

**Definição B.7.** Seja  $f: D_f \rightarrow B$  uma função. O conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)): x \in D_f\} \subset D_f \times B$$

é chamado de **gráfico de  $f$** . Denotamos também o gráfico de  $f$  por  $G_f$ .

Decorre da definição acima que, quando  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real,  $G(f)$  é o lugar geométrico descrito pelos pontos da forma  $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  quando  $x$  percorre  $D_f$ . Observe que, por exemplo, uma circunferência não pode representar o gráfico de uma função real.

**Fórmulas de translação:**

\*  $f(x) + k$  translada o gráfico de  $f$ ,  $k$  unidades **para cima** se  $k > 0$  e  $|k|$  unidades **para baixo** se  $k < 0$ ,

\*  $f(x + k)$  translada o gráfico de  $f$ ,  $k$  unidades **para a esquerda** se  $k > 0$  e  $|k|$  unidades **para a direita** se  $k < 0$ .

**Exercício 9.** Esboce os gráficos das funções abaixo.

(a)  $f(t) = 3t - 1$

(c)  $h(s) = s^2 + 1$

(e)  $m(r) = (r + 1)^2$

(b)  $g(x) = x^2 - 1$

(d)  $k(u) = (u - 1)^2$

(f)  $C(w) = w^2 + 6w + 10$

**IMPORTANTE:** Note que uma função é composta de uma regra juntamente com seu domínio e seu contra-domínio. Não confunda a regra que define a função com a função em si. Por exemplo, as funções

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por } f(x) = x^3,$$

$$g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por } g(x) = x^3, \text{ e}$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0) \quad \text{dada por } h(x) = x^3,$$

possuem a mesma regra de definição mas são *funções diferentes!*.

## B.2 Operações com funções

**Definição B.8.** Dadas funções  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x \in D_f \cap D_g$  podemos definir algumas operações com funções:

(a) **soma:**  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ;

(b) **produto:**  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ;

(c) **quociente:**  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  se  $g(x) \neq 0$ .

**Exemplo B.9.** Se  $f(x) = \sqrt{7-x}$  e  $g(x) = \sqrt{x-2}$  então  $D_f = (-\infty, 7]$ ,  $D_g = [2, +\infty)$  e  $D_f \cap D_g = [2, 7]$ . Temos

(a)  $(f + g)(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{x-2}$  para  $2 \leq x \leq 7$ ;

(b)  $(fg)(x) = \sqrt{7-x}\sqrt{x-2} = \sqrt{(7-x)(x-2)}$  para  $2 \leq x \leq 7$ ,

$$(c) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\frac{7-x}{x-2}} \text{ para } 2 < x \leq 7.$$

**Definição B.10.** Dadas funções  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\text{Im}(f) \subset D_g$  definimos a **função composta**  $h: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h(x) = g(f(x)) \quad \text{para todo } x \in D_f.$$

Neste caso escrevemos  $h = g \circ f$ .

**Exemplo B.11.** Se  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(x) = x^2 + 3x$ , então

$$(a) \quad g \circ f(x) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 3(2x + 1) = 4x^2 + 10x + 4,$$

$$(b) \quad f \circ g(x) = f(x^2 + 3x) = 2(x^2 + 3x) + 1 = 2x^2 + 6x + 1.$$

**IMPORTANTE:** note que, em geral,  $f \circ g \neq g \circ f$ .

**Exemplo B.12.** Encontre  $f \circ g \circ h$  se  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ,  $g(x) = x^{10}$  e  $h(x) = x + 3$ .

**SOLUÇÃO.** Temos

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) = f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}.$$

**Exercício 10.** Sejam  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $g(x) = \sqrt{2-x}$ . Determine o domínio das funções:

$$(a) \quad f \circ g(x)$$

$$(c) \quad f \circ f(x)$$

$$(b) \quad g \circ f(x)$$

$$(d) \quad g \circ g(x)$$

## B.3 Funções especiais

Nesta seção definiremos alguns conceitos especiais envolvendo funções. Mais precisamente definiremos algumas classes especiais de funções, que têm propriedades interessantes e úteis para o que vamos desenvolver ao longo do curso de Cálculo.

Em todas as seções daqui pra frente, consideraremos  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real.

### Funções pares e ímpares

**Definição B.13.** Diremos que

(a)  $f$  é **par** se  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x \in D_f$ ;

(b)  $f$  é **ímpar** se  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in D_f$ .

O significado geométrico de uma função par é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo  $y$  e de uma função ímpar é que seu gráfico é simétrico em relação à origem.

**Exemplo B.14.**  $f(x) = x^2$  é par; a função identidade  $I(x) = x$  é ímpar;  $f(x) = 2x - x^2$  não é nem par nem ímpar.

**Exercício 11.** Determine se a função é par, ímpar ou nenhuma das duas.

(a)  $f(x) = x^5 + x$

(b)  $f(x) = 1 - x^4$

(c)  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

## FUNÇÕES PERIÓDICAS

**Definição B.15.** Seja  $\omega \neq 0$ . Então  $f$  será dita **periódica** de **período**  $\omega$  (ou simplesmente  **$\omega$ -periódica**) se tivermos  $f(x) = f(x + \omega)$  para todo  $x \in D_f$ .

Se existir um menor  $\omega_0$  positivo tal que  $f$  seja  $\omega_0$ -periódica então diremos que  $\omega_0$  é o **período mínimo** de  $f$ .

**Proposição B.16.** Sejam  $\omega \neq 0$  e  $c \neq 0$ . Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\omega$ -periódica, então são válidas as afirmações:

(a)  $f$  é  $n\omega$ -periódica para todo inteiro não-nulo  $n$ .

(b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(cx)$  é  $\frac{\omega}{c}$ -periódica.

*Demonstração.* Provaremos aqui o item (a), e o item (b) é deixado como exercício para o leitor. Seja  $n$  um inteiro positivo. Temos

$$\begin{aligned} f(x + n\omega) &= f(x + (n-1)\omega + \omega) = f(x + (n-1)\omega) = f(x + (n-2)\omega + \omega) = \\ &= f(x + (n-2)\omega) = \cdots = f(x + \omega) = f(x), \end{aligned}$$

para todo  $x \in D_f$ . Assim  $f$  é  $n\omega$ -periódica se  $n$  for um inteiro positivo.

Agora  $f(x) = f(x - \omega + \omega) = f(x - \omega)$  para todo  $x \in D_f$ ; isto é, se  $f$  é  $\omega$ -periódica então  $f$  é também  $-\omega$ -periódica. Portanto se  $n$  é um inteiro negativo segue do caso anterior que  $f$  é  $-n\omega$ -periódica, pois  $-n$  é um inteiro positivo, e assim  $f$  é também  $n\omega$ -periódica.  $\square$

### Exemplo B.17.

- (a)  $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ , onde  $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$  é a **função maior inteiro menor ou igual a  $x$** , é 1-periódica e o período mínimo de  $f$  é 1. Note que  $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ .
- (b)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  é  $r$ -periódica para cada  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . Assim  $f$  não tem período mínimo.

## Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

**Definição B.18.** Diremos que  $f: D_f \rightarrow B$  é

- (a) **sobrejetora** se  $\text{Im}(f) = B$ .
- (b) **injetora** se  $f(x_1) = f(x_2)$  implicar que  $x_1 = x_2$  para quaisquer  $x_1, x_2 \in D_f$ .
- (c) **bijetora** (ou **inversível**) se  $f$  for injetora e sobrejetora.

Note que  $f$  será injetora se, e somente se,

$$x_1 \neq x_2 \text{ implicar que } f(x_1) \neq f(x_2) \text{ para quaisquer } x_1, x_2 \in D_f.$$

**Exemplo B.19.** A função módulo  $f(x) = |x|$ , com domínio e contra-domínio  $\mathbb{R}$ , não é injetora pois, por exemplo,  $|-1| = |1|$  e  $-1 \neq 1$ . Ela também não é sobrejetora, pois  $\text{Im}(f) = [0, +\infty) \subsetneq \mathbb{R}$ . Agora, considerando a função módulo com domínio  $D_f = [0, \infty)$  e contra-domínio  $B = [0, \infty)$ , a função será bijetora (verifique isso!).

A partir de uma função  $f: D_f \rightarrow B$  qualquer, sempre é possível construir uma função sobrejetora, bastando para isso considerar a função chegando em sua imagem, isto é,  $f: D_f \rightarrow \text{Im}(f)$ .

Considere  $f: D_f \rightarrow B$  uma função bijetora. Podemos então construir uma função  $g: B \rightarrow D_f$  da seguinte maneira: para cada  $y \in B$ , seja  $x \in D_f$  o **único** elemento de  $D_f$  tal que  $f(x) = y$ . Defina  $g(y) = x$ . Esta função tem as seguintes propriedades:

- $g(f(x)) = x$  para todo  $x \in D_f$ ;
- $f(g(y)) = y$  para todo  $y \in B$ ;
- a função  $g: B \rightarrow D_f$  é bijetora.

Dizemos que  $g$  é a **função inversa** de  $f$ , denotamos por  $g = f^{-1}$ , e está definida por

$$f^{-1}(y) = x \text{ se, e somente se, } f(x) = y \text{ para cada } y \in B.$$

Temos  $D_{f^{-1}} = \text{Im}(f) = B$  e  $\text{Im}(f^{-1}) = D_f$ .

**Exemplo B.20.** A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3$  é bijetora e sua inversa é  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f^{-1}(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ .

**IMPORTANTE:** Note que  $f^{-1}(x)$  **não** significa  $\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$ .

Para encontrar a função inversa de uma função inversível  $f$ :

1. Escreva  $y = f(x)$ .
2. Resolva essa equação para  $x$  em termos de  $y$ .
3. Troque  $x$  por  $y$  para expressar  $f^{-1}$  como função de  $x$ .

**Exemplo B.21.** Encontre  $f^{-1}$  para a função inversível  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 + 3x$ .

**SOLUÇÃO.** Escrevemos  $y = 1 + 3x$  e resolvemos para  $x$ , isto é,  $x = \frac{y-1}{3}$ . Substituindo  $y$  por  $x$ , obtemos  $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$ .

**Exercício 12.** Encontre um domínio e um contra-domínio adequado para que as funções abaixo sejam inversíveis, e encontre a expressão para a inversa em cada caso.

(a)  $f(x) = x^2$ .                      (b)  $f(x) = x^3 + 2$ .                      (c)  $f(x) = \sqrt{x+7}$ .

Note que o gráfico da função inversa  $f^{-1}$  de uma função inversível  $f$  é dado por

$$G(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y)): y \in B\} = \{(f(x), x): x \in A\},$$

isto é, vemos que  $G(f^{-1})$  é a reflexão do gráfico  $G(f)$  da função  $f$  em torno da reta  $y = x$ .

**Exercício 13.** Esboce o gráfico de  $f(x) = \sqrt{-x-1}$  encontrando sua inversa, esboçando seu gráfico, e refletindo o gráfico obtido em torno da reta  $y = x$ .

## Funções limitadas

**Definição B.22.** Diremos que  $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é **limitada** se o conjunto  $\text{Im}(f)$  for um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}$ . Caso contrário, a função  $f$  será dita **ilimitada**. Se  $A \subset D_f$ , então  $f$  será **limitada em A** se a restrição  $f|_A$  for limitada.

Segue da Definição B.22 que  $f$  será limitada se, e somente se, existir  $L > 0$  tal que  $|f(x)| \leq L$  para todo  $x \in D_f$ . Equivalentemente,  $f$  será limitada se, e somente se, existirem  $L, \ell \in \mathbb{R}$  tais que  $\ell \leq f(x) \leq L$  para todo  $x \in D_f$ .

**Exemplo B.23.**

(a)  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  é limitada;

(d)  $f(x) = \frac{1}{x}$  é limitada em  $[1, +\infty)$ ;

(b)  $f(x) = \frac{x^4}{x^4 + 1}$  é limitada;

(e)  $f(x) = x^2$  é ilimitada;

(c)  $f(x) = \frac{1}{x}$  é ilimitada;

(f)  $f(x) = x^2$  é limitada em  $[1, 5]$ .

## Funções monótonas

**Definição B.24.** Seja  $f: D_f \rightarrow B$  uma função real e  $A \subset D_f$ . Dizemos que  $f$  é:

(a) **crescente em A** se para  $x, y \in A$  com  $x < y$  temos  $f(x) \leq f(y)$ ;

(b) **estritamente crescente em A** se para  $x, y \in A$  com  $x < y$  temos  $f(x) < f(y)$ ;

(c) **decrecente em A** se para  $x, y \in A$  com  $x < y$  temos  $f(x) \geq f(y)$ ;

(d) **estritamente decrecente em A** se para  $x, y \in A$  com  $x < y$  temos  $f(x) > f(y)$ .

Se  $f$  satisfizer ou , diremos que  $f$  é **monótona em A** (ou **monotônica em A**). Se  $f$  satisfizer ou , diremos que  $f$  é **estritamente monótona em A** (ou **estritamente monotônica em A**). Quando  $A = D_f$ , omitimos o termo “em A” da nomenclaturas.

**Exemplo B.25.**  $f(x) = x^2$  é estritamente crescente em  $[0, +\infty)$  e estritamente decrecente em  $(-\infty, 0]$ .

**Exemplo B.26.**  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  é estritamente decrecente em  $(0, +\infty)$ .

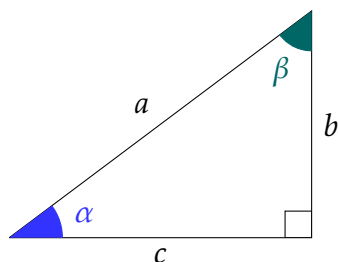
**SOLUÇÃO.** Observe que se  $x, y > 0$  e  $x < y$  então

$$f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{y} = \frac{y+1}{y} = f(y).$$

**Exercício 14.** Seja  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função estritamente monótona. Mostre que  $f$  é injetora.

## B.4 Funções trigonométricas

Sabemos que em um triângulo *retângulo* de hipotenusa  $a$  e ângulos agudos  $\alpha$  e  $\beta$ , opostos, respectivamente, aos catetos  $b$  e  $c$ , temos



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{c}{a}, & \cos \beta &= \frac{b}{a}, \\ \text{sen } \alpha &= \frac{b}{a}, & \text{sen } \beta &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Estas relações definem o **seno** e o **cosseno** de um ângulo agudo, pois todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo. Note que  $\text{sen } \alpha$  e  $\cos \alpha$  dependem apenas do ângulo  $\alpha$  e não do tamanho do triângulo (por semelhança de triângulos).

Segue do Teorema de Pitágoras que

$$a^2 = b^2 + c^2 = a^2 \text{sen}^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha = a^2 (\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

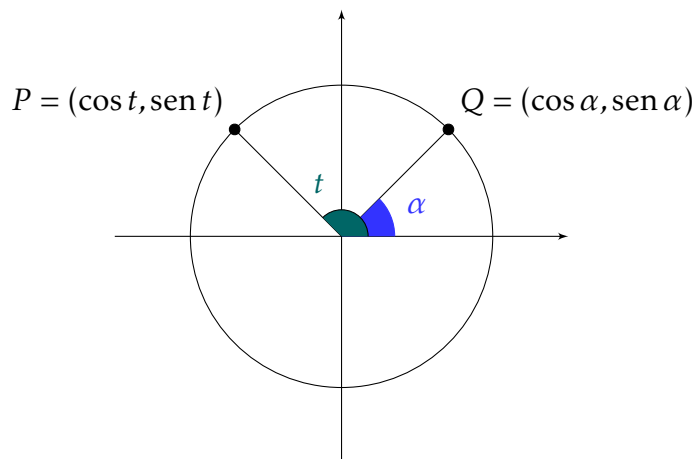
Logo

$$1 = \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha. \quad (\text{B.1})$$

É claro que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números compreendidos entre 0 e 1. A relação (B.1) sugere que para todo ângulo  $\alpha$ , os números  $\cos \alpha$  e  $\text{sen } \alpha$  são as coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem de  $\mathbb{R}^2$ . Usaremos isto para estender as funções cosseno e seno para ângulos fora do intervalo  $(0, \pi/2)$ .

Sempre que falarmos das funções seno e cosseno, os ângulos serão sempre medidos em radianos, com a conversão  $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ .

Se considerarmos a circunferência unitária centrada na origem do  $\mathbb{R}^2$  e marcarmos, a partir do eixo  $x$ , um ângulo  $t$ , então poderemos definir  $\text{sen } t$  e  $\cos t$  de forma que as coordenadas do ponto  $P$  sejam  $(\cos t, \text{sen } t)$ .



Assim,  $\text{sen } t$  e  $\cos t$  coincidem com a definição original se  $0 < t < \pi/2$  e podem ser estendidas para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ , se marcarmos ângulos positivos no sentido anti-horário e ângulos negativos no sentido horário.

**Proposição B.27.** Valem as seguintes propriedades para as funções seno e cosseno.

- (a) O seno é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo no terceiro e quarto quadrantes.
- (b) O cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes.
- (c) O seno e cosseno são funções  $2\pi$ -periódicas com imagem no intervalo  $[-1, 1]$ .
- (d) O cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar.
- (e)  $\text{sen } t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$  e  $\cos t = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ .
- (f)  $-\text{sen } t = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$  e  $\cos t = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ .
- (g)  $\text{sen } t = \text{sen}(\pi - t)$  e  $-\cos t = \cos(\pi - t)$ .
- (h)  $-\text{sen } t = \text{sen}(\pi + t)$  e  $-\cos t = \cos(\pi + t)$ .
- (i)  $\text{sen}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  e  $\cos(0) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

Temos também as fórmulas de adição para seno e cosseno.

**Proposição B.28 (FÓRMULAS DE ADIÇÃO).**

**(a)**  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).$

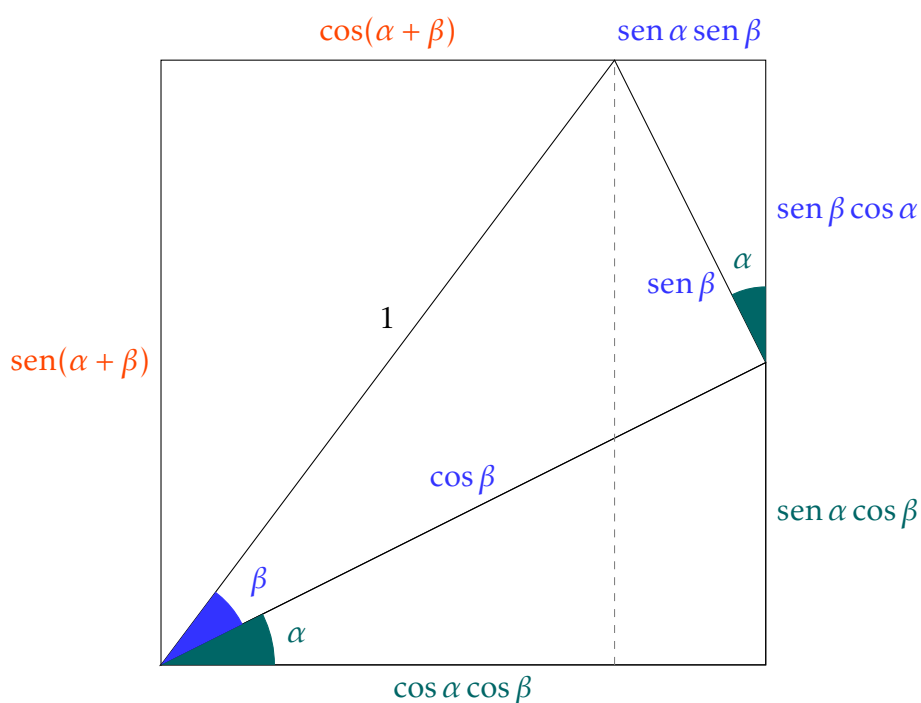
**(b)**  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(\alpha).$

Trocando  $\beta$  por  $-\beta$  e utilizando a paridade das funções temos

**(c)**  $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta).$

**(d)**  $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\beta)\cos(\alpha).$

A demonstração das duas primeiras fórmulas de adição, quando  $\alpha, \beta \geq 0$  e  $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$  seguem da seguinte figura:



A partir das fórmulas de adição deduzimos

**Corolário B.29 (ARCO DUPLO).**

**(a)**  $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$

**(b)**  $\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha.$

A partir das fórmulas do arco duplo e da identidade  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  deduzimos

**Corolário B.30 (ARCO METADE).**

(a)  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ .

$$(b) \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

A partir das fórmulas de adição obtemos:

**Corolário B.31** (TRANSFORMAÇÃO DE PRODUTO EM SOMA).

$$(a) \quad \cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta), \text{ (somando (a) e (c) da Proposição B.28).}$$

$$(b) \quad \sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta), \text{ (subtraindo (a) e (c) da Proposição B.28).}$$

$$(c) \quad \sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\sin(\alpha - \beta) \text{ (subtraindo (b) e (d) da Proposição B.28).}$$

**Corolário B.32** (TRANSFORMAÇÃO DE SOMA EM PRODUTO).

$$(a) \quad \sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

$$(b) \quad \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

*Demonstração.* Para o item (a) escreva  $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$  e  $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$  e utilize os itens (b) e (d) da Proposição B.28. Para o item (b) escreva  $\alpha$  e  $\beta$  como na parte no item (a) e utilize os itens (a) e (c) da Proposição B.28. □

Analogamente temos o seguinte resultado:

**Corolário B.33** (TRANSFORMAÇÃO DE SUBTRAÇÃO EM PRODUTO).

$$(a) \quad \sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

$$(b) \quad \cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

### Outras funções trigonométricas

Usando as funções seno e cosseno podemos definir outras funções trigonométricas que são muito importantes.

**Definição B.34.** Definimos

$$(a) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ e } D_{\operatorname{tg}} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \cos \alpha \neq 0\};$$

$$(b) \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ e } D_{\sec} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \cos \alpha \neq 0\};$$

$$(c) \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \text{ e } D_{\operatorname{cosec}} = \{\alpha \in \mathbb{R}: \operatorname{sen} \alpha \neq 0\};$$

$$(d) \cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \text{ e } D_{\cotg} = \{\alpha \in \mathbb{R}: \operatorname{sen} \alpha \neq 0\}.$$

### Exercício 15.

- (a) Dê um significado geométrico para  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\cotg \alpha$ ,  $\sec \alpha$  e  $\operatorname{cosec} \alpha$ .
- (b) Esboce os gráficos das funções  $\operatorname{tg}$ ,  $\cotg$ ,  $\sec$  e  $\operatorname{cosec}$ .
- (c) Classifique as funções trigonométricas em par ou ímpar, periódica, e limitada.

## B.5 Funções exponencial e logaritmo

No que segue vamos definir a **função exponencial**. Para isso consideremos um número real positivo  $a$  diferente de 1 ; isto é,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

\* Se  $n$  é um inteiro positivo temos por definição que  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}$ .

\* Além disso definimos então  $a^0 = 1$ .

\* Se  $n$  é um inteiro positivo então temos por definição  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

\* Se  $\frac{p}{q}$  é um racional com  $q > 0$  então definimos  $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$ .

Assim, definimos a regra  $a^x$  para todo número *racional*  $x$ . A pergunta que fazemos agora é: como definir  $a^x$  para  $x$  irracional?

Vamos primeiramente considerar o caso  $a > 1$ . É possível demonstrar, com uma certa dificuldade, que existe um *único* número real  $\alpha$  tal que para todo  $s, r \in \mathbb{Q}$  com  $r < x < s$  temos

$$a^r < \alpha < a^s.$$

Para  $0 < a < 1$ , é também possível demonstrar que existe um *único* número real  $\alpha$  tal que para todo  $s, r \in \mathbb{Q}$  com  $r < x < s$  temos

$$a^s < \alpha < a^r.$$

Assim definimos  $a^x = \alpha$ ; isto é,  $a^x$  é o único número real que satisfaz as expressões acima. A grosso modo, definimos  $a^x$  de maneira a preencher os buracos deixados pela função  $a^x$  para  $x$  racional, de maneira que a função resultante seja estritamente crescente para  $a > 1$  e estritamente decrescente para  $0 < a < 1$ .

**Definição B.35.** Seja  $a > 0, a \neq 1$ . A função  $f(x) = a^x$  definida acima é chamada de **função exponencial de base  $a$** .

Esta função tem domínio  $\mathbb{R}$  e imagem  $(0, \infty)$ , por definição. Temos também as seguintes propriedades:

**Proposição B.36.** Sejam  $a, b$  números reais positivos diferentes de 1 e  $x, y$  números reais quaisquer. Temos

- (a)  $a^{x+y} = a^x a^y$ ;
- (b)  $(a^x)^y = a^{xy}$ ;
- (c)  $(ab)^x = a^x b^x$ ;
- (d) se  $a > 1$  a função exponencial é estritamente crescente, ou seja, se  $x < y$  então  $a^x < a^y$ ;
- (e) se  $0 < a < 1$  a função exponencial é estritamente decrescente, ou seja, se  $x < y$  então  $a^x > a^y$ .

Como a função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  dada por  $f(x) = a^x$  é ou estritamente crescente ou estritamente decrescente (para  $a > 0$  e  $a \neq 1$ ), ela é bijetora e portanto possui uma inversa  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz

$$a^x = y \quad \text{se, e somente se,} \quad g(y) = x \quad \text{para } y > 0.$$

**Definição B.37.** A função inversa  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  da função exponencial é chamada de **função logarítmica com base  $a$**  e denotada por  $g(x) = \log_a x$ . Pela igualdade acima temos

$$\log_a x = y \quad \text{se, e somente se,} \quad a^y = x \quad \text{para } y > 0.$$

Temos

$$\log_a(a^x) = x, \text{ para } x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a^{\log_a x} = x, \text{ para } x > 0.$$

Temos as seguintes propriedades para a função logaritmo.

**Proposição B.38.** Sejam  $a, b > 0$  com  $a, b \neq 1$ . Então são válidas as seguintes propriedades:

- (a)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ;
- (b)  $\log_a x^y = y \log_a x$ ;
- (c)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ;

(d) se  $a > 1$  a função logarítmica é estritamente crescente, ou seja, se  $x < y$ , então  $\log_a x < \log_a y$ ;

(e) se  $0 < a < 1$  a função logarítmica é estritamente decrescente, ou seja, se  $x < y$ , então  $\log_a x > \log_a y$ ;

(f) **(Mudança de base)**  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ .

A função exponencial de base  $e$  onde  $e \approx 2,718281$ ,  $f(x) = e^x$ , desempenha um papel importante no cálculo.

**Definição B.39.** A função logarítmica com base  $e$  é chamada **logaritmo natural** e denotada por  $\ln x = \log_e x$ .

Observe que, como  $\ln(e^x) = x$ , tomando  $x = 1$  temos

$$\ln e = 1.$$

## B.6 Funções hiperbólicas

Utilizando a função exponencial podemos definir as **funções hiperbólicas**, dadas por

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

A primeira se chama **seno hiperbólico** e a segunda **coseno hiperbólico**. Estes nomes vêm do fato que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , definindo  $x = \cosh(t)$  e  $y = \sinh(t)$  temos

$$x^2 - y^2 = 1,$$

que é a equação que define uma **hipérbole**.

Note que, ao contrário das funções trigonométricas, as funções hiperbólicas  $\sinh(x)$  e  $\cosh(x)$  não são funções limitadas. Ainda, é simples ver que  $\cosh(x) \neq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 16.** Defina, analogamente ao caso trigonométrico, as funções hiperbólicas  $\operatorname{tgh}$ ,  $\operatorname{sech}$ ,  $\operatorname{cossech}$  e  $\operatorname{cotgh}$ .

**Exercício 17.** Mostre que  $\sinh(x) = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ .

**Exercício 18.** Mostre que  $\sinh$  é uma função ímpar e  $\cosh$  é uma função par.

# Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, G.: *Introdução à Análise Matemática*, Editora Edgard Blücher - SP (1993)
- [2] Guidorizzi, H. L.: *Um Curso de Cálculo*, Vol. 1, LTC Editora, (1987)
- [3] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill (1976)
- [4] Spivak, M.: *Calculus*. 3rd ed. Houston: Publish or Perish, (1994)
- [5] Stewart, J.: *Cálculo*, Vol. 1, Pioneira Thomson Learning, (2002)