



DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA

MTM3100 -PRÉ- CÁLCULO



FLORIANÓPOLIS - SC

Sumário

1	Aritmética básica	5
1.1	Números reais	5
1.2	Potenciação e Radiciação	12
1.3	Expressões polinomiais	16
1.3.1	Polinômios	16
1.3.2	Fatoração de expressões algébricas	19
1.4	Expressões racionais	26
1.4.1	Simplificação de expressões algébricas	27
1.4.2	Algoritmo da divisão de dois polinômios	31
1.4.3	Racionalização	34
2	Equações e Inequações	37
2.1	Resolução de equações lineares	38
2.2	Resolução de equações de segundo grau	40
2.3	Outros tipos de equações	44
2.4	Problemas envolvendo equações	46
2.5	Intervalos	48
2.6	Módulo de um número real	50
2.7	Inequações	52
2.7.1	Inequações e desigualdades	52
2.7.2	Análise de sinal de polinômios	55
2.7.3	Inequações lineares em uma variável	63
2.7.4	Inequações produto	66

2.7.5	Inequações-quociente	72
2.7.6	Inequações envolvendo módulo	73
2.7.7	Inequações irracionais	75
3	Funções	81
3.1	Noções gerais	82
3.2	Domínio e Imagem	85
3.3	Operações com funções	86
3.4	O gráfico de uma função	90
3.5	Transformações de funções	91
4	Funções elementares	93
4.1	Função constante	93
4.2	Função identidade	94
4.2.1	Função linear	94
4.2.2	Função afim	95
4.3	Função quadrática	97
4.4	Funções injetivas e suas inversas	100
4.5	Função exponencial	108
4.5.1	Gráfico de funções exponenciais	109
4.5.2	Função Exponencial Natural	112
4.6	Função logarítmica	113
4.6.1	Gráfico de funções logarítmicas	117
4.6.2	Logaritmos especiais	120
4.7	Equações exponenciais e logarítmicas	121
4.7.1	Equações exponenciais	121
4.7.2	Equações logarítmicas	124
5	Funções trigonométricas	127
5.1	Ângulos	127
5.2	O círculo trigonométrico e as funções seno e cosseno	129
5.3	As funções trigonométricas nos triângulos retângulos. A função tangente. . .	131

5.4	Cálculo das funções trigonométricas para alguns ângulos “comuns”. Paridade das funções seno e cosseno	135
5.5	Fórmulas de adição de arcos, e ainda outras fórmulas	137
5.6	Secante, cossecante e cotangente	141
5.7	Equações trigonométricas	144
5.8	Funções trigonométricas inversas	146

Aritmética básica

Semana 1

1.1 Números reais

Um número real pode ser visto como uma quantidade que representa uma distância ao longo de uma reta ou uma quantidade que pode ser representada com uma expressão decimal infinita.

Vamos entender melhor esta definição através de alguns importantes subconjuntos dos números reais:

- Números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Números inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Números racionais: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por **número decimal** (ao dividir o inteiro a pelo inteiro b). Na passagem de uma notação para a outra podem ocorrer dois casos:

- o número decimal tem uma *quantidade finita* de algarismos diferentes de zero, isto é, uma **decimal exata**: $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{27}{100} = 0,27$.
- o número decimal tem uma *quantidade infinita* de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, uma **dízima periódica**. Ex.: $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overline{3}$, (período 3).

Existem números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica. Por exemplo, $0,1010010001...$, onde o número de algarismos 0 intercalados entre 0 e 1 vai crescendo, é não periódico. Tais números são chamados de **irracionais**. Outros exemplos são: $1,23456...$ e $6,2020020002...$, $\pi = 3,1415926...$, $\sqrt{2} = 1,4142136...$ ou ainda, $\sqrt{p}$, com p primo e positivo.

Portanto o **conjunto dos números reais** (denotado por $\mathbb{R}$) é aquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (que são os números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas (que são os números irracionais).

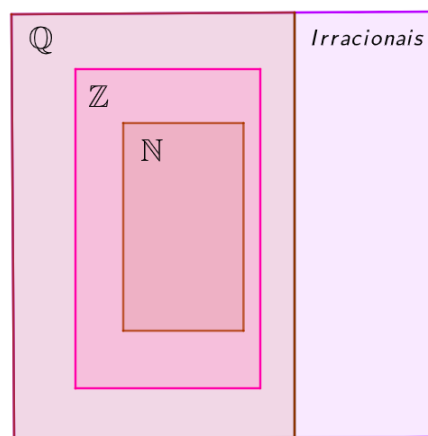


Figura: Representação visual dos números reais como união dos números racionais e irracionais

Números reais e a reta

Iniciamos este capítulo afirmando que *um número real pode ser visto como uma quantidade que representa uma distância ao longo de uma reta*. Na prática, podemos imaginar um ponto de referência (o número zero), um sentido positivo (para a direita do zero) e um sentido negativo (para a esquerda do zero). Se queremos, por exemplo, representar o número 2 sobre a reta, marcamos a partir de 0 um segmento de medida $2u$ no sentido positivo. A extremidade deste segmento representa o número 2.

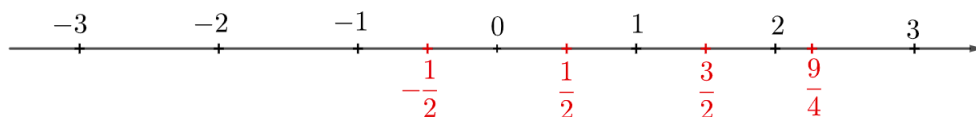


Figura: Números inteiros e números racionais representados na reta orientada.

Os números racionais, entretanto, não preenchem completamente a reta, isto é, há pontos da reta que não representam nenhum racional. Por exemplo, entre os pontos 1 e 1,42 fica um ponto que representa $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ (irracional).

Quando representamos também sobre a reta os números irracionais, cada ponto da reta passa a necessariamente representar um número racional ou irracional (portanto, real), isto é, os reais preenchem completamente a reta.

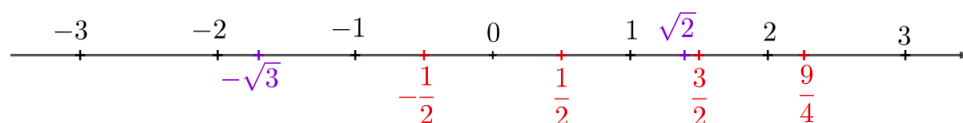


Figura: Números inteiros, racionais e irracionais representados na reta orientada.

Essa reta, que representa $\mathbb{R}$, é chamada **reta real** ou **reta numérica**. Na reta real, os números estão ordenados. Um número a é menor que qualquer número x colocado à sua direita e maior que qualquer número x colocado à sua esquerda.

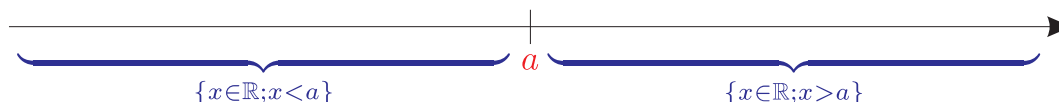


Figura: A reta real

Operações no conjunto dos números reais

Em $\mathbb{R}$ são definidas duas operações fundamentais: a adição “+” e a multiplicação “.”, que apresentam algumas propriedades apresentadas a seguir.

Comutatividade: $a + b = b + a$ e $a.b = b.a$, para todos os números reais a e b .

Exemplo 1.1. $3 + x.2 + 3.x + 1 = 3 + (2x + 3x) + 1 = 3 + (5x + 1) = 3 + 1 + 5x = 4 + 5x$

Observação 1.2. A propriedade comutativa da multiplicação é conhecida popularmente por “a ordem dos fatores não altera o produto”.

Associatividade: $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a.b).c = a.(b.c)$, para todos os números reais a , b e c .

Exemplo 1.3. $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$ e também $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$.

Distributividade: $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ e $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$, para todo $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

Observação 1.4. Essa propriedade pode ser usada pra facilitar contas de multiplicação, separando as parcelas de maneira adequada. Veja:

$$24 \cdot 3 = (20 + 4) \cdot 3 = 60 + 12 = 72.$$

Uma aplicação muito útil da propriedade distributiva é a construção de algumas fórmulas conhecidas como **produtos notáveis**:

Proposição 1.5. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

Produtos Notáveis:

Quadrado da soma: $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

Quadrado da diferença: $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

Diferença de quadrados: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Soma de cubos: $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Diferença de cubos: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Cubo da soma: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Cubo da diferença: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ilustremos a terceira identidade. As restantes ficam de exercício. Para o cubo da soma, note que $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$ e pode-se usar o quadrado da soma já calculado. Analogamente para o cubo da diferença.

Note que, pela distributividade, podemos calcular:

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b) \\ &= (a^2 - ab) + (ba - b^2) \quad (\text{pela comutatividade e associatividade:}) \\ &= a^2(-ab + ab) - b^2 \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Elemento neutro da adição: O número zero

O número 0 é o único número real que satisfaz $a + 0 = 0 + a = a$ para todo real a .

Além disso, para qualquer real a , existe somente um **oposto** $-a$ satisfazendo $a + (-a) = a - a = 0$.

Elemento neutro da multiplicação: O número um

O número 1 é o único número real que satisfaz $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo real a .

Além disso, para qualquer real $a \neq 0$, existe somente um **inverso** a^{-1} satisfazendo $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Vejamos duas propriedades que são bastante práticas na hora de resolver problemas:

Proposição 1.6. *São verdadeiras:*

- (i) $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- (ii) Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

De fato, para ver que vale o item (i) notamos que $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ e assim

$$0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 - a \cdot 0) = a \cdot 0.$$

Para verificar a segunda propriedade, vamos supor que $a \neq 0$ e ver que se torna obrigatório $b = 0$. Supondo $a \neq 0$, existe seu inverso $\frac{1}{a}$ e assim pela propriedade (i) temos

$$0 = \frac{1}{a} \cdot 0 = \frac{1}{a} \cdot a \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Observação 1.7. *Note que não podemos **dividir por zero**!*

Se existisse $\frac{1}{0}$, pela propriedade (i) acima, valeria $0 \cdot \frac{1}{0} = 0$ o que é equivalente a $1 = 0$. Isto é um absurdo.

Exemplo 1.8. Se $(x-1)(x+3) = 0$, então pela propriedade (ii), temos $x-1 = 0$ ou $x+3 = 0$. Ou seja, $x = 1$ ou $x = -3$.

Operações com frações

Uma **fração** é uma expressão

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1},$$

com $b \neq 0$. Ou seja, a fração $\frac{a}{b}$ é o número a vezes o inverso de b . O número a é chamado de **numerador** e b de **denominador**.

Observação 1.9 (Inverso de uma fração). Note que o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$. De fato, pois

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot b \cdot \frac{1}{a} = a \cdot 1 \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Ou seja, podemos dizer que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

Quando temos duas frações com mesmo denominador, a soma é feita somando os numeradores e mantendo o denominador, pois

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a \cdot c^{-1} + b \cdot c^{-1} = (a + b) \cdot c^{-1} = \frac{a + b}{c}.$$

Então, podemos calcular, por exemplo:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Abaixo deduzimos a fórmula para o caso mais geral, em que os denominadores podem ser diferentes.

Soma de frações:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Para verificar a fórmula acima notamos que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} + \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Para a multiplicação de duas frações, multiplicamos numerador com numerador e denominador com denominador. Vejamos:

Multiplicação de frações:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

A fórmula acima vale pois

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot b^{-1} \cdot c \cdot d^{-1} = ac \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} = \frac{ac}{bd}.$$

Por exemplo,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Divisão de frações:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

De fato,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Exemplo 1.10. Podemos reescrever a expressão:

$$\frac{\frac{x^2-1}{xy}}{x+1} = \frac{x^2-1}{xy} (x+1)^{-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{xy} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{xy} \cdot \frac{x+1}{x+1} = \frac{x-1}{xy}.$$

(No segundo passo, usamos um produto notável.)

1.2 Potenciação e Radiciação

Potência de um expoente inteiro

Seja a um número real e $n \geq 1$ um número natural. A **potência** de base a e expoente n é o número

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}.$$

Em outras palavras, a^n é um produto de n fatores iguais a a .

Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{aligned} 5^1 &= 5; & \left(\frac{1}{7}\right)^2 &= \left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{49}; & (-3)^1 &= -3; \\ (-3)^2 &= (-3)(-3) = 9; & -3^2 &= -(3 \cdot 3) = -9; & -(-3)^3 &= -(-3)(-3)(-3) = 27. \end{aligned}$$

$$\text{Notemos que } 3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{(3 \cdot 3)}_{2 \text{ vezes}} \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{4 \text{ vezes}} = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{6 \text{ vezes}} = 3^6 = 3^{2+4}.$$

$$\text{De maneira geral podemos afirmar que } a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \dots a)}_{m \text{ vezes}} \underbrace{(a \dots a)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{(a \dots a)}_{m+n \text{ vezes}} = a^{m+n}.$$

Ou seja, vale a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Vamos usar esse fato para ampliar nossa definição para potências inteiras não positivas ($n \leq 0$).

Queremos que seja válido, por exemplo:

- $2^0 \cdot 2^5 = 2^{0+5} = 2^5$ (o que só pode ser verdade se $2^0 = 1$)
- $2^3 \cdot 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$ (o que só pode ser verdade se $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$)

Portanto definimos:

Se $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$a^0 = 1 \quad \text{e} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemplo 1.11. $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}; \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8};$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}; \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{-\frac{1}{32}} = -32.$$

A partir daí podemos concluir as principais **propriedades de potenciação**:

Proposição 1.12. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$ então

$$(P_1) \quad a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(P_2) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

$$(P_3) \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad b \neq 0 \text{ ou } n \neq 0$$

$$(P_4) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0.$$

$$(P_5) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

Atenção: $(a + b)^n \neq a^n + b^n$

Exemplo 1.13. Seja $n \in \mathbb{N}$. Usando as propriedades de potenciação vistas, vamos simplificar a expressão abaixo:

$$\begin{aligned} (-1)^{2n} - (-1)^{2n-3} + (-1)^{3n} - (-1)^n &= ((-1)^2)^n - \frac{((-1)^2)^n}{(-1)^3} + ((-1)^3)^n - (-1)^n \\ &= 1^n - \frac{1^n}{(-1)} + (-1)^n - (-1)^n \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Exemplo 1.14. Simplifiquemos a expressão:

$$(a^4 b^3)^3 (a^2 b)^2 = (a^{12} b^9)(a^4 b^2) = a^{12+4} b^{9+2} = a^{16} b^{11}$$

Exemplo 1.15. Vamos classificar em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

$$(a) \quad (5^3)^{-2} = 5^{-6} \quad (V) \text{ pois } (5^3)^{-2} = 5^{3(-2)} = 5^{-6}$$

$$(b) \quad 2^{-4} = -16 \quad (F) \text{ pois } 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \neq -16$$

$$(c) \quad (\pi + 2)^{-2} = \pi^{-2} + 2^{-2} \quad (F) \text{ pois } (\pi + 2)^{-2} = \frac{1}{(\pi + 2)^2} \text{ mas } \pi^{-2} + 2^{-2} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2}$$

$$(d) \ 3^2 3^{-2} = 1$$

$$(V) \text{ pois } 3^2 3^{-2} = 3^{2+(-2)} = 3^0 = 1$$

$$(e) \ \frac{7^{-2}}{7^{-5}} = 7^{-3}$$

$$(F) \text{ pois } \frac{7^{-2}}{7^{-5}} = 7^{-2-(-5)} = 7^3 \neq 7^{-3}$$

Raiz n -ésima

Já conhecemos a raiz quadrada, que satisfaz (para $a \geq 0$) $\sqrt{a} = b$ se e somente se $b^2 = a$. (Lembre-se por exemplo que $\sqrt{9} = 3$ pois $3^2 = 9$). Vamos generalizar esta definição:

Dados um número real a e um número natural $n \geq 1$, existe um número real b tal que

$$b^n = a.$$

O número b é chamado **raiz n -ésima** (“enésima”) de a e indicado pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$, onde a é chamado **radicando** e n é o **índice**.

No caso de n ser par, devemos ter $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Exemplo 1.16. $\sqrt[5]{32} = 2$, pois $2^5 = 32$;

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ pois } 2^3 = 8;$$

$$\sqrt[7]{0} = 0, \text{ pois } 0^7 = 0;$$

$$\sqrt[2]{9} = 3, \text{ pois } 3^2 = 9;$$

Observação 1.17. Atenção! Note que $2^2 = (-2)^2 = 4$, mas pela definição devemos ter $\sqrt{4} = 2 > 0$. Ou seja, a raiz quadrada de um número é sempre positiva. Algebricamente, escrevemos:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Exemplo 1.18. $\sqrt{(-5)^2} = 5$ e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$.

Proposição 1.19. Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n, p \in \mathbb{N}^*$. Então valem as seguintes propriedades

$$(R_1) \ \sqrt[n]{a^m} = |a|^m, \text{ se } n \text{ é par.}$$

$$(R_2) \ \sqrt[n]{a^m} = a^m, \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

$$(R_3) \ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$(R_4) \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

$$(R_5) \quad \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$$

Observação 1.20. Se $b \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $b \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab^n}$, isto é, o coeficiente do radical (a menos do sinal) pode ser colocado no radicando com o expoente igual ao índice do radical. Por exemplo:

$$2 \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$$

$$-4 \sqrt{2} = -\sqrt{2 \cdot 5^2} = -\sqrt{50}$$

$$-5 \sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{2 \cdot 2^4} = -\sqrt[4]{32}$$

Exemplo 1.21. Podemos usar a ferramenta acima para simplificar radicais. Veja abaixo:

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt{576} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = 3 \cdot 3^3 = 24$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{2 \cdot 2^6} = 2^2 \sqrt[3]{2} = 4 \sqrt[3]{2}$$

Potência de um expoente racional

Queremos generalizar a definição de potência para números racionais. Notemos que pela propriedade P_5 de potenciação, queremos que seja verdadeiro

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

Ou seja, podemos escrever

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Em geral, vamos definir:

Dados m, n inteiros com $n > 0$, define-se a potência de base a e expoente $\frac{m}{n}$ por

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Caso n seja par, então $a \geq 0$.

Exemplo 1.22. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$, $7^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{49}}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad (\text{pois } (-2)^3 = -8)$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \quad (\text{pois } (-3)^3 = -27)$$

As propriedades P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 já vistas anteriormente continuam valendo agora.

Observação 1.23. Quando estamos resolvendo uma expressão numérica ou uma expressão algébrica e temos vários cálculos para serem feitos sucessivamente, precisamos **obedecer uma ordem**, que é a seguinte:

(1) Raízes e potências, (2) multiplicação e divisão, (3) adição e subtração

Priorize cálculos em: parênteses (), depois colchetes [] e depois chaves { }.

Semana 2

1.3 Expressões polinomiais

1.3.1 Polinômios

Definição 1.24. Um **polinômio** em x é qualquer expressão que possa ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde n é um número natural. Os números a_j , com $0 \leq j \leq n$ são chamados **coeficientes** do polinômio. O **grau** do polinômio é definido como sendo o maior natural m tal que seu coeficiente seja não nulo, ou seja, $a_m \neq 0$. Um polinômio escrito com as potências de x na ordem decrescente está na **forma padrão**.

Observação 1.25. Para determinar o grau do polinômio, na prática, basta verificar qual a maior potência que aparece para a variável. Por exemplo:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 \text{ tem grau } 2, & \quad 2x^3 + x^2 + 9 \text{ tem grau } 3, \\ 6x^5 + 2 \text{ tem grau } 5, & \quad 7 \text{ tem grau } 0. \end{aligned}$$

Observação 1.26. Uma expressão da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a_j = 0$ para todo j , ainda é um polinômio. Ele é chamado o **polinômio nulo**. Ou seja, o polinômio nulo é da forma $0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0$ ou simplesmente 0.

Para **adicionar ou subtrair** polinômios, precisamos agrupar os **termos semelhantes**, que são termos com a mesma variável, cada uma elevada a mesma potência. Então nós adicionamos ou subtraímos termos semelhantes usando a propriedade distributiva.

Exemplo 1.27. $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) + (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

Agrupamos os termos semelhantes e então os combinamos

$$\begin{aligned} & (2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) + (x^3 + 2x^2 - 5x + 3) \\ &= (2x^3 + x^3) + (-3x^2 + 2x^2) + (4x - 5x) + (-1 + 3) \\ &= 3x^3 - x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

Exemplo 1.28. $(x^2 + 2x - 4) - (3x^3 - 2x^2 + 5x + \frac{1}{2})$

Novamente agrupamos os termos semelhantes e então os combinamos. Neste caso, lembre que:

$$-(a + b) = -a - b$$

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x - 4) - \left(3x^3 - 2x^2 + 5x + \frac{1}{2}\right) &= x^2 + 2x - 4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x - \frac{1}{2} \\ &= -3x^3 + (x^2 + 2x^2) + (2x - 5x) + \left(-4 - \frac{1}{2}\right) \\ &= -3x^3 + 3x^2 - 3x - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Se estamos trabalhando com expressões algébricas em mais de uma variável, o processo é análogo: agrupamos todos os termos semelhantes e os combinamos:

$$(3x - 2y) + (7x - y + xy) = (3x + 7x) + (-2y - y) + xy = 10x - 3y + xy$$

Para expandir o **produto** de dois polinômios, nós usamos a propriedade distributiva, por exemplo:

$$(3x + 2)(4x - 5) = 3x(4x - 5) + 2(4x - 5) = 12x^2 - 15x + 8x - 10 = 12x^2 - 7x - 10$$

A multiplicação de dois polinômios requer a multiplicação de cada termos de um polinômio por todos os termos do outro. Uma maneira conveniente de desenvolver o produto é organizar os polinômios na forma padrão, um sobre o outro, de modo que os termos iguais fiquem alinhados verticalmente, como no próximo exemplo.

Exemplo 1.29. (Multiplicação de polinômios na vertical) Escreva $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)$ na forma padrão.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 4x + 3 \\
 x^2 + 4x + 5 \\
 \hline
 x^4 + 4x^3 + 5x^2 \\
 -4x^3 - 16x^2 - 20x \\
 + + 3x^2 + 12x + 15 \\
 \hline
 x^4 + 0x^3 - 8x^2 - 8x + 15
 \end{array}$$

Ou seja, $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5) = x^4 - 8x^2 - 8x + 15$.

Analogamente, para fazer a multiplicação com mais de uma variável, fazemos, por exemplo, a distributiva:

$$\begin{aligned}
 & (3xy^2 + 5y)(7x^3y + 5x - 10) \\
 &= (3xy^2)(7x^3y) + (3xy^2)(5x) - 10(3xy^2) + (5y)(7x^3y) + (5y)(5x) - 10(5y) \\
 &= 21x^4y^3 + 15x^2y^2 - 30xy^2 + 35x^3y^2 - 50y.
 \end{aligned}$$

Ao simplificar expressões "grandes", não se desespere. Veja o exemplo:

$$\begin{aligned}
 & -2x - 2x(2x - 3)(3x - 1) - 3(x - 1)(4x - 1)(-x - 1) \\
 &= -2x - 2x(6x^2 - 2x - 9x + 3) - 3(4x^2 - x - 4x + 1)(-x - 1) \\
 &= -2x - 2x(6x^2 - 11x + 3) - 3(4x^2 - 5x + 1)(-x - 1) \\
 &= -2x - 12x^3 + 22x^2 - 6x - 3(-4x^3 - 4x^2 + 5x^2 + 5x - x - 1) \\
 &= -12x^3 + 22x^2 - 8x - 3(-4x^3 + x^2 + 4x - 1) \\
 &= -12x^3 + 22x^2 - 8x + 12x^3 - 3x^2 - 12x + 3 \\
 &= (-12x^3 + 12x^3) + (22x^2 - 3x^2) + (-12x - 8x) + 3 \\
 &= 19x^2 - 20x + 3
 \end{aligned}$$

Na Proposição 1.5 vimos algumas fórmulas muito úteis ao trabalhar com expressões polinomiais, chamadas **produtos notáveis**. Vamos usá-las em alguns exemplos:

Exemplo 1.30.

(a) Usando diferença de quadrados, segue que $(3x + 8)(3x - 8) = (3x)^2 - 8^2 = 9x^2 - 64$.

(b) Usando quadrado da diferença, $(5y - 4)^2 = (5y)^2 - 2(5y)(4) + 4^2 = 25y^2 - 40y + 16$.

(c) Usando cubo da diferença, temos

$$(2x - 3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3.$$

(d) Usando diferença de quadrados:

$$\frac{2x - 3}{4x^2 - 9} = \frac{2x - 3}{(2x - 3)(2x + 3)} = \frac{1}{2x + 3}$$

Note que a primeira expressão só vale para $4x^2 - 9 \neq 0$, ou seja, $x \neq \pm \frac{3}{2}$ e portanto a simplificação só faz sentido com essa restrição. Mas, por outro lado, a expressão resultante pode ser calculada para $x = \frac{3}{2}$. Isso significa que podemos tratá-la como uma extensão da primeira.

1.3.2 Fatoração de expressões algébricas

Usamos a propriedade distributiva quando queremos expandir expressões algébricas. Por exemplo, $(x - 3)(x + 3) = x(x + 3) - 3(x + 3) = x^2 - 9$. Mas algumas vezes é necessário fazer o processo inverso. Ou seja, temos um polinômio *expandido* e gostaríamos de escrevê-lo como o produto de dois ou mais **fatores polinomiais**. Este processo se chama **fatoração de um polinômio**. Por exemplo, para fatorar o polinômio $x^2 - 9$, escrevemos $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, onde $x + 3$ e $x - 3$ são os fatores polinomiais.

Um polinômio que não pode ser fatorado usando coeficientes inteiros é chamado **polinômio irredutível**. Por exemplo, $x + 1$, $x^2 + 2$, $x - 7$ são polinômios irredutíveis.

Observação 1.31. Qualquer polinômio que não possua pelo menos uma raiz real é irredutível.

Dizemos que um polinômio está **fatorado completamente** se estiver escrito como um produto de fatores irredutíveis. Por exemplo

$$2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4), \quad \text{e} \quad x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1),$$

estão fatorados completamente. Mas

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9),$$

não está fatorado completamente, pois ainda podemos escrever

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3),$$

e então $x^3 - 9x = x(x + 3)(x - 3)$ está fatorado completamente.

Ao ver os exemplos acima, é fácil verificar que as fatorações são verdadeiras. Mas como fatorar um polinômio, ou seja, como *descobrir* os fatores irredutíveis que compõe a fatoração?

O primeiro passo na fatoração de um polinômio ou expressão algébrica é **remover e colocar em evidência fatores comuns de seus termos** usando a propriedade distributiva, como no próximo exemplo.

Exemplo 1.32. (*Colocação dos fatores comuns em evidência*)

(a) $2x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(x^2 + x - 3)$

(b) $u^3v + uv^3 = uv(u^2 + v^2)$

Fatoração de trinômios

Para um trinômio ¹ do tipo

$x^2 + bx + c$

notamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs,$$

¹Um monômio é um polinômio com apenas uma parcela do tipo ax^k . Um binômio é um polinômio que pode ser escrito como soma de dois monômios. Um **trinômio** é um polinômio formado pela soma de três monômios.

ou seja, $x^2 + bx + c = (x + r)(x + s)$ desde que

$$\begin{cases} b = r + s \\ c = rs. \end{cases}$$

Por exemplo, para fatorar o trinômio $x^2 + 7x + 12$, devemos procurar r e s tais que:

$$\begin{cases} r + s = 7 \\ rs = 12 \end{cases}$$

Em outras palavras, buscamos dois números que somados resultam em 7 e o produto deles é 12. Por tentativa e erro, encontramos os números inteiros $r = 3$ e $s = 4$. (Uma boa maneira de testar os valores é buscar os fatores de 12, isto é, que par de números inteiros quando multiplicados resultam em 12. As possibilidades (a menos de sinal) são 2.6 e 3.4. Como $2 + 6 = 8$ e $3 + 4 = 7$, nos resta 3 e 4 como soluções. Esse processo é simples e podemos até fazer mentalmente.)

Exemplo 1.33. $x^2 + 5x - 14$

Aqui temos $b = 5$ e $c = -14$. Os pares de fatores do 14 são 1 e 14, bem como 2 e 7. Intuitivamente já descartamos o primeiro par, pois vemos que $7 - 2 = 5 = b$. Portanto para ter $rs = -14$ e $r + s = 5$, a única possibilidade é $r = 7$ e $s = -2$, ou seja

$$x^2 + 5x - 14 = (x + 7)(x - 2).$$

Para conferir a resposta, basta calcular o produto $(x + 7)(x - 2)$ e verificar se de fato resulta em $x^2 + 5x - 14$. Verifique!

Agora vejamos como fatorar um trinômio do tipo

$ax^2 + bx + c$

(com $a \neq 1$) como um produto de binômios com coeficientes inteiros.

Neste caso, buscamos por fatores do tipo $px + r$ e $qx + s$, ou seja, queremos escrever

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs.$$

Para buscar a solução por tentativa e erro, vamos nos fixar em:

$$a = pq \quad \text{e} \quad c = rs,$$

ou seja, temos que buscar os fatores inteiros dos números a e c e testar quais funcionam.

Vejam um exemplo: $6x^2 + 7x - 5$

Podemos escrever $6 = 6.1$ ou $6 = 3.2$ e $-5 = (-5).1$ ou $-5 = (-1).5$. As combinações possíveis são

$$\begin{array}{l|l} (6x - 5)(x + 1) & (6x + 5)(x - 1) \\ (x - 5)(6x + 1) & (x + 5)(6x - 1) \\ (3x - 5)(2x + 1) & (3x + 5)(2x - 1) \\ (2x - 5)(3x + 1) & (2x + 5)(3x - 1) \end{array}$$

e testando as possibilidades chegamos na resposta

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1).$$

A técnica por *tentativa e erro* acima não é tão prática quando $a \neq 1$. Uma outra opção é utilizar o seguinte resultado

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

onde x_1 e x_2 são as soluções da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$. Se você já sabe encontrar as raízes desta equação (por Bháskara ou por soma e produto), fique a vontade para utilizar. Veremos, mais a frente, as soluções de equação do segundo grau.

Fatoração usando produtos notáveis

Reconhecer a forma expandida dos produtos notáveis (Proposição 1.5) nos ajudará a fatorar uma expressão algébrica. A forma mais fácil de identificar é a diferença entre dois quadrados:

Exemplo 1.34. (*fatoração da diferença de dois quadrados*)

(a) $25x^2 - 36 = (5x)^2 - 6^2 = (5x - 6)(5x + 6)$

(b) $4x^2 - (y + 3)^2 = (2x)^2 - (y + 3)^2 = (2x - (y + 3))(2x + (y + 3)) = (2x - y - 3)(2x + y + 3)$

O próximo caso de fatoração é o trinômio quadrado perfeito, que nada mais é que o quadrado de um binômio.

Exemplo 1.35. (fatoração de trinômios quadrados perfeitos)

$$(a) \quad 9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 1 + 1^2 = (3x + 1)^2$$

$$(b) \quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = (2x - 3y)^2$$

Observação 1.36 (Reconhecer um quadrado perfeito). Para identificar se um trinômio é um quadrado perfeito, comparamos com a expressão $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$. Por exemplo, no item (a) do exemplo anterior, temos $A = 3x$, $B = 1$ e vemos que $6x = 2 \cdot 3x \cdot 1 = 2AB$. Portanto é um quadrado perfeito.

Observe agora a soma e a diferença de dois cubos auxiliando a fatoração:

Exemplo 1.37. (fatoração da soma e da diferença de dois cubos)

$$(a) \quad x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

$$(b) \quad 8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$$

Fatoração por agrupamento

Se um polinômio com quatro termos é o produto de dois binômios, podemos agrupar os termos para fatorar. Por exemplo, podemos escrever $ac + ad + bc + bd$ como sendo $ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)$. Para isso, utilizamos a fatoração colocando o termo comum em evidência duas vezes.

Exemplo 1.38. (fatoração por agrupamento)

$$(a) \quad 3x^3 + x^2 - 6x - 2$$

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - 6x - 2 &= (3x^3 + x^2) - (6x + 2) \\ &= x^2(3x + 1) - 2(3x + 1) \\ &= (x^2 - 2)(3x + 1) \end{aligned}$$

$$(b) \quad 2ac - 2ad + bc - bd$$

$$\begin{aligned} 2ac - 2ad + bc - bd &= 2a(c - d) + b(c - d) \\ &= (2a + b)(c - d) \end{aligned}$$

Observação 1.39. Resumindo como fazer a fatoração de polinômios:

1. Observar os fatores comuns
2. Observar as formas especiais dos polinômios
3. Usar pares de fatores, ou seja, tentar ir agrupando aos pares
4. Se existirem quatro termos, tentar agrupá-los

Completamento de quadrados

Algumas vezes nos deparamos com expressões quadráticas que são polinômios irreduzíveis (não é possível fatorar). Pode ser útil reescrevê-lo de forma a aparecer um quadrado perfeito².

Em outras palavras queremos reescrever uma expressão quadrática da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x + u)^2 + v.$$

Para isso usamos a técnica de **completamento de quadrados**. Vamos fazer um exemplo e depois formalizar a técnica.

Consideremos a expressão quadrática $x^2 - 6x + 7$. Vemos que não é um quadrado perfeito (pela Observação 1.36, deveria ocorrer $A = x$, $B = \sqrt{7}$ e $2AB = 2\sqrt{7}x \neq -6x$).

Queremos fazer “aparecer” um quadrado perfeito. Para começar, seria interessante conhecer alguns quadrados perfeitos. Por exemplo, são muito comuns os seguintes:

$$x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2$$

$$x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2$$

$$x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2$$

$$x^2 \pm 8x + 16 = (x \pm 4)^2$$

Como os dois primeiros termos da nossa expressão são $x^2 - 6x$, é natural usar a expressão em vermelho acima para fazer aparecer $(x - 3)^2$. Para fazer isso, precisamos adicionar um

²Pode parecer abstrato agora, mas essa técnica é útil para resolver equações do segundo grau, para trabalhar com cônicas em geometria analítica e diversas outras situações.

9 na expressão. E para ela se manter igual, diminuimos o mesmo valor. Veja:

$$x^2 - 6x + 7 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 7 = (x^2 - 6x + 9) + (7 - 9) = (x - 3)^2 - 2.$$

Para generalizar o processo, vamos interpretar o valor 9 que foi adicionado. Ele veio de $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot 3x + 9$, onde $9 = 3^2$. Ou seja, na prática o que fizemos com a expressão $x^2 - 6x$ foi dividir o 6 por 2, que resulta em 3, elevar este valor ao quadrado ($3^2 = 9$) e então somar e subtrair este valor.

Com isso, podemos generalizar o método:

Completamento de quadrado:

Para completar quadrado na expressão $x^2 + bx$, somamos e subtraímos o valor $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Observação 1.40. Para ajudar a memorizar o processo podemos pensar no seguinte “mantra”: “Divide por dois e eleva ao quadrado...” o coeficiente de x . Este valor será adicionado e subtraído da expressão. Por exemplo, para completar quadrado em $x^2 - 10x$, “pega” o 10, “divide por dois e eleva ao quadrado...” o que resulta em $5^2 = 25$ e portanto

$$x^2 - 10x = (x^2 - 10x + 25) - 25 = (x - 5)^2 - 25.$$

Observação 1.41. Quando o coeficiente do termo quadrático é diferente de um, temos que colocá-lo em evidência para usar o método. Isto é, para completar quadrado em $ax^2 + bx$, fazemos

$$ax^2 + bx = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right)$$

e em seguida completamos quadrado na expressão entre parênteses. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 6 &= 3(x^2 - 4x + 2) \\ &= 3(x^2 - 4x + 4 - 4 + 2) \\ &= 3((x - 2)^2 - 2) \\ &= 3(x - 2)^2 - 6. \end{aligned}$$

Exemplo 1.42. Para completar quadrado em $2x^2 - 6x - 3$, fazemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x - 3 &= 2(x^2 - 3x - 2) \\ &= 2\left(x^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\right) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(2 + \frac{9}{4}\right) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 1.43. $-x^2 - 2x - 9 = -(x^2 + 2x + 9) = -(x^2 + 2x + 1 + 8) = -(x + 1)^2 - 8$.

Semana 3

1.4 Expressões racionais

Definição 1.44. Um quociente de expressões algébricas é chamado de **expressão fracionária**, **expressão racional** ou simplesmente fração (ainda é, também, uma expressão algébrica).

Alguns exemplos:

$$\frac{2}{x+2}, \quad \frac{x-2}{x-3}, \quad \frac{x^4+5x}{x^2-1}, \quad \frac{x}{\sqrt{2x-5}}.$$

Uma expressão algébrica pode não estar definida para todos os reais, como nos polinômios. Nos três primeiros exemplos acima, usando o fato de que o denominador não pode ser nulo, temos respectivamente as seguintes restrições:

$$x \neq -2, \quad x \neq 3, \quad x \neq \pm 1.$$

E no último exemplo, além do denominador não pode ser nulo, o argumento de um radical deve ser não negativo, ou seja, a restrição neste caso é: $2x - 5 > 0$, ou ainda $x > \frac{5}{2}$.

Definição 1.45. O **domínio** de uma expressão algébrica é o conjunto de números reais para os quais a expressão está definida.

Nos exemplos acima temos os respectivos domínios:

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} / x \neq -2\}, \quad \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3\}, \\ &\{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}, \quad \{x \in \mathbb{R} / x > \frac{5}{2}\}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.46. (a) $3x^2 + 2$: o domínio é $\mathbb{R}$;

(b) $\sqrt{x-1}$: a raiz quadrada só está definida para números não negativos. Logo precisamos ter $x-1 \geq 0$ o que implica que o domínio é dado pelo conjunto $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$;

(c) $\frac{x}{x-2}$: o denominador deve ser diferente de zero, logo precisamos ter $x \neq 2$.

As restrições apresentadas acima são as mais comuns e estão resumidas no seguinte quadro:

Domínios de algumas expressões algébricas:

$\frac{1}{x}$	Domínio: $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$
$\sqrt{x}$	Domínio: $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	Domínio: $\{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

1.4.1 Simplificação de expressões algébricas

Sejam u, v e z números reais, variáveis ou expressões algébricas. Podemos escrever expressões racionais na forma mais simples usando

$$\frac{uz}{vz} = \frac{u}{v},$$

desde que $z \neq 0$. Isso requer a fatoração do numerador e denominador em fatores primos (ou irredutíveis). Quando todos os *fatores comuns* do numerador e denominador forem removidos, a expressão racional (ou número racional) está na **forma reduzida**.

Estamos acostumados a fazer isso no caso dos números reais:

$$\frac{4}{10} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{5}.$$

Na simplificação acima, o *fator comum* entre numerador e denominador é **2**. Concluimos que a fração final está na forma reduzida pois $\text{mdc}(2, 5) = 1$, ou seja, o único divisor comum de 2 e 5 é 1 (neste caso dizemos que 2 e 5 são *primos entre si*). Vamos estender a ideia para expressões algébricas:

Exemplo 1.47. Escreva $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ na forma reduzida.

Usando diferença de quadrados, temos que $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$. Assim, se $x \neq \pm 3$ então

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x}{x+3}.$$

A **multiplicação e a divisão de expressões racionais** são feitas de forma análoga à de números reais:

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}$$

Exemplo 1.48. Simplifique as expressões

(a) $\left(\frac{2x^2 + 11x - 21}{x^3 + 2x^2 + 4x} \right) \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 5x - 14} \right)$

Para $x \neq 0$, $x \neq -7$ e $x \neq 2$, fatoramos cada um dos polinômios envolvidos e obtemos

$$\left(\frac{2x^2 + 11x - 21}{x^3 + 2x^2 + 4x} \right) \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 5x - 14} \right) = \frac{(2x-3)(x+7)}{x(x^2+2x+4)} \cdot \frac{(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+7)} = \frac{2x-3}{x^2-2x}.$$

(b) $\left(\frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2} \right) \div \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 4x + 4} \right)$

Para $x \neq -1$ e $x \neq 2$, fatoramos os polinômios e então

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2} \right) \div \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 4x + 4} \right) &= \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2} \right) \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x + 1} \right) \\ &= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-2)} \cdot \frac{(x-2)(x-2)}{(x^2-x+1)} \\ &= x-2 \end{aligned}$$

Para **somar duas frações**, também seguimos o procedimento usado para números reais:

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}. \quad (1.4.1)$$

Nem sempre as expressões racionais envolvidas tem o mesmo denominador e então precisaremos do conceito de mínimo múltiplo comum para polinômios. O **mínimo múltiplo comum (MMC)** entre dois polinômios é obtido fatorando cada um deles e calculando o produto de todos os fatores irredutíveis, na maior potência que cada um aparecer.

Por exemplo, o MMC entre $(x - 1)$ e $(x + 2)$ é $(x - 1)(x + 2)$ pois os dois fatores são irredutíveis (e aparecem somente com potência 1).

Já para calcular o MMC entre $x^2 - 3x + 2$ e $x^2 - 2x + 1$, começamos com a fatoração:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \quad \text{e} \quad x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Os fatores irredutíveis são $(x - 1)$ e $(x - 2)$. A maior potência de $(x - 1)$ é 2 e a maior potência de $(x - 2)$ é 1. Portanto o MMC é $(x - 1)^2(x - 2)$.

Quando dois polinômios não tem fatores comuns, o MMC é o produto entre eles, como aconteceu no primeiro exemplo ao calcular o MMC de $(x - 1)$ e $(x + 2)$. No segundo exemplo isso não aconteceu pois havia um fator comum, a saber $(x - 1)$.

Exemplo 1.49. (Soma de expressões racionais) Escreva as seguintes frações na forma reduzida

(a) $\frac{x}{3x - 2} + \frac{3}{x - 5}$

Os denominadores são $3x - 2$ e $x - 5$ e tem MMC $(3x - 2)(x - 5)$ (pois não tem fatores comuns).

Reescrevemos as expressões de modo a aparecer o MMC nos denominadores:

$$\frac{x}{3x - 2} + \frac{3}{x - 5} = \frac{x(x - 5)}{(3x - 2)(x - 5)} + \frac{3(3x - 2)}{(x - 5)(3x - 2)}$$

e agora podemos usar a fórmula da soma (1.4.1). Assim, para $x \neq \frac{2}{3}$ e $x \neq 5$ temos

$$\frac{x}{3x - 2} + \frac{3}{x - 5} = \frac{x(x - 5) + 3(3x - 2)}{(3x - 2)(x - 5)} = \frac{x^2 + 4x - 6}{(3x - 2)(x - 5)}.$$

(b) $\frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 - 4}$

Os denominadores fatorados são $x(x - 2)$, x e $(x - 2)(x + 2)$, logo o MMC é $x(x - 2)(x + 2)$.

Assim, se $x \neq 0$, $x \neq -2$ e $x \neq 2$, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2-4} &= \frac{2}{x(x-2)} + \frac{1}{x} - \frac{3}{(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{2(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} - \frac{3x}{x(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{2(x+2) + (x-2)(x+2) - 3x}{x(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{(x-2+2)(x+2) - 3x}{x(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{x^2+2x-3x}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x(x-1)}{x(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}.
 \end{aligned}$$

Uma maneira prática de usar a ferramenta da soma de frações é pensar na seguinte fórmula:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Dica para memorizar o numerador: 

visualizando que o denominador da soma é o produto dos denominadores (em azul) e que o numerador é a soma do produto cruzado dos valores das frações (dica em cinza). Essa fórmula funciona bem quando os denominadores não tem fatores comuns e o MMC é o produto entre eles:

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2) + x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+2x+6}{x^2+x-2}.$$

Às vezes uma expressão algébrica complicada precisa ser antes transformada para uma forma mais fácil de ser trabalhada. É o caso, por exemplo, das frações compostas. Uma **fração composta** é uma fração na qual os numeradores e denominadores podem eles mesmos conter frações. Uma maneira de simplificar uma fração composta é escrever o numerador e o denominador como frações simples, e então inverter e multiplicar.

Exemplo 1.50.
$$3 - \frac{7}{x+2} = \frac{3(x+2)-7}{x+2} = \frac{3x-1}{x+2} = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \left(\frac{x-3}{x-4}\right)$$

Para que nenhum denominador seja zero, as simplificações acima valem para $x \neq 0, -2, 4$.

1.4.2 Algoritmo da divisão de dois polinômios

Ao fatorar um polinômio, descobrimos suas raízes e características de sua representação gráfica. Veremos uma maneira de fatorar um polinômio utilizando a divisão de polinômios, bastante semelhante a divisão de números inteiros. Observe as semelhanças dos exemplos a seguir

$$\begin{array}{r}
 \overline{3587} \overline{) 32} \\
 \underline{32} \\
 387 \\
 \underline{32} \\
 67 \\
 \underline{64} \\
 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{3x^3 + 5x^2 + 8x + 7} \overline{) 3x + 2} \\
 \underline{(3x^3 + 2x^2)} \\
 3x^2 + 8x + 7 \\
 \underline{(3x^2 + 2x)} \\
 6x + 7 \\
 \underline{(6x + 4)} \\
 3
 \end{array}$$

A divisão, seja de um número inteiro ou de um polinômio, envolve um **dividendo** dividido por um **divisor** para obter um **quociente** e um **resto**. Podemos verificar e resumir nosso trabalho com uma equação da forma

$$(\text{divisor})(\text{quociente}) + \text{resto} = \text{dividendo}$$

Das divisões estudadas, valem as igualdades

$$32 \cdot 112 + 3 = 3587 \quad \text{e} \quad (3x + 2)(x^2 + x + 2) + 3 = 3x^3 + 5x^2 + 8x + 7.$$

Da igualdade de polinômios acima podemos concluir que

$$3x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (3x + 2)(x^2 + x + 2),$$

isto é, o polinômio $3x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ se fatora.

Vejamos um algoritmo para a divisão. Sejam $f(x)$ e $d(x)$ polinômios com o grau de $f(x)$ maior ou igual ao grau de $d(x)$ e com $d(x)$ um polinômio não nulo. Existem únicos polinômios $q(x)$ e $r(x)$, os quais chamamos, respectivamente, de **quociente** e **resto**, tais que

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x),$$

onde $r(x)$ é identicamente nulo ou o grau de $r(x)$ é menor ou igual ao grau de $d(x)$. Se $r(x) \equiv 0$, ou seja, se ele for o polinômio nulo, dizemos que $d(x)$ **divide exatamente** $f(x)$.

Nomenclatura:
$$\underbrace{f(x)}_{\text{dividendo}} = \underbrace{d(x)}_{\text{divisor}} \underbrace{q(x)}_{\text{quociente}} + \underbrace{r(x)}_{\text{resto}}$$

A equação do algoritmo pode ser escrita na forma de fração como

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

Exemplo 1.51. Faça a divisão de $2x^4 - x^3 - 2$ por $2x^2 + x + 1$, encontrando o quociente e o resto. Além disso, escreva a divisão com a notação do algoritmo da divisão e na forma de fração.

$ \begin{array}{r} 2x^4 - x^3 - 2 \\ \underline{-(2x^4 + x^3 + x^2)} \\ -2x^3 - x^2 - 2 \\ \underline{-(-2x^3 - x^2 - x)} \\ x - 2 \end{array} $	$2x^2 + x + 1 \overline{) 2x^4 - x^3 - 2}$ $x^2 - x$ <i>Divisão dos primeiros termos:</i> $(2x^4)/(2x^2) = x^2$ <i>Produto:</i> $(2x^2 + x + 1) \cdot (x^2) = 2x^4 + x^3 + x^2$ <i>Faz a subtração completa e a divisão:</i> $(-2x^3)/(2x^2) = -x$ <i>Produto:</i> $(2x^2 + x + 1) \cdot (-x) = -2x^3 - x^2 - x$ <i>Faz a subtração e encontra o resto</i>
--	---

O processo para quando encontrarmos após a subtração um polinômio cujo grau é menor do que o grau do divisor (veja que $\text{grau}(x-2) = 1 < 2 = \text{grau}(2x^2 + x + 1)$). Após a divisão, o algoritmo nos diz que

$$2x^4 - x^3 - 2 = (2x^2 + x + 1)(x^2 - x) + (x - 2),$$

e na forma de fração,

$$\frac{2x^4 - x^3 - 2}{2x^2 + x + 1} = (x^2 - x) + \frac{x - 2}{2x^2 + x + 1}.$$

Divisão de polinômios por Briot-Ruffini

Um importante caso especial do algoritmo da divisão ocorre quando o divisor é da forma $d(x) = x - k$, onde k é um número real. Pelo fato de o grau de $x - k$ ser 1, o resto é um número real. Para estes casos especiais podemos usar o **método de Briot-Ruffini**.

O esquema inicial é

	Coefficientes do polinômio a ser dividido
k	
	Coefficientes do polinômio quociente resto

Daí repetimos o coeficiente do termo de maior grau embaixo dele mesmo. Multiplicamos esse número pelo k e somamos com o próximo coeficiente da primeira linha; o resultado fica embaixo deste próximo coeficiente. Fazemos isso repetidamente até o final

Exemplo 1.52. Faça a divisão de $2x^3 - 3x^2 - 5x - 12$ por $x - 3$.

Fazemos $k = 3$ e a tabela abaixo

	2	-3	-5	-12
3		6	9	12
	2	3	4	0

Esclarecendo o processo:

- O coeficiente 2 “cai” e é multiplicado pelo fator $k = 3$, resultando em 6. Este valor é somado com o coeficiente -3 , obtendo 3.
- O valor obtido é multiplicado pelo fator $k = 3$, resultando em 9. Soma-se com o coeficiente -5 e se obtém 4.
- Repetimos o processo. O último valor obtido na terceira linha da tabela é o resto. Os outros valores são os coeficientes do polinômio quociente, que terá um grau a menos do que o dividendo.

Ou seja, o quociente é $2x^2 + 3x + 4$ (coeficientes obtidos na terceira linha, com grau 2, pois é um grau abaixo do polinômio inicial) e o resto é 0. Portanto

$$2x^3 - 3x^2 - 5x - 12 = (2x^2 + 3x + 4)(x - 3).$$

Exemplo 1.53. Usando Briot-Ruffini, divida $x^5 + x^2 - 1$ por $x + 3$. Neste caso temos $k = -3$ e a seguinte tabela

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 -3 & & -3 & 9 & -27 & 78 & -234 \\
 \hline
 & 1 & -3 & 9 & -26 & 78 & -235
 \end{array}$$

e então $x^5 + x^2 - 1 = (x^4 - 3x^2 + 9x^2 - 26x + 78)(x + 3) - 235$.

1.4.3 Racionalização

Quando uma fração possui o numerador ou o denominador na forma $a + b\sqrt{c}$, pode ser útil simplificá-lo através do que chamamos de racionalização. Primeiramente definimos:

Conjugado de $a + b\sqrt{c}$:

$$a - b\sqrt{c}$$

Notemos que, usando produto notável (diferença de quadrados),

$$(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c,$$

ou seja, obtemos uma expressão sem radical.

A **racionalização** é o processo de multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado, a fim de simplificar a expressão racional usando a identidade acima.

Exemplo 1.54. Racionalizar o denominador de $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$.

Multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado $1 - \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + \sqrt{2}} &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} && [\text{Multiplicar pelo conjugado}] \\
 &= \frac{1 - \sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2} && [\text{Usar o produto notável}] \\
 &= \frac{1 - \sqrt{2}}{(-1)} = \sqrt{2} - 1.
 \end{aligned}$$

Exemplo 1.55. Racionalize o denominador da fração $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

Podemos escrever

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{5-2\sqrt{6}}{3-2} = 5-2\sqrt{6}.$$

Encerramos este capítulo com uma tabela de resultados falsos, mas muito tentadores. Cuidado! Não use propriedades de multiplicação para a operação de adição. Na tabela abaixo, a primeira coluna é de resultados verdadeiros para a operação de multiplicação e a segunda coluna as igualdades não são verdadeiras.

<i>Propriedade de multiplicação</i>	<i>Erros comuns para adição</i>
$(ab)^2 = a^2b^2$	$(a+b)^2 \not\approx a^2 + b^2$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a+b} \not\approx \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2b^2} = ab (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} \not\approx a + b$
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \not\approx \frac{1}{a+b}$
$\frac{ab}{a} = b$	$\frac{ab}{a} \not\approx b$
$a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} \not\approx (a+b)^{-1}$

Por exemplo, $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4+3 = 7$ e a maneira correta de calcular é $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

Equações e Inequações

Semana 4

Uma **equação** é uma afirmativa de igualdade entre duas expressões.

Algumas propriedades de igualdade são usadas para resolver equações algebricamente:

Sejam u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas. São válidas as seguintes propriedades

- (a) Reflexiva: $u = u$
- (b) Simétrica: Se $u = v$ então $v = u$
- (c) Transitiva: Se $u = v$ e $v = w$ então $u = w$
- (d) Adição: Se $u = v$ e $w = z$ então $u + w = v + z$
- (e) Multiplicação: Se $u = v$ e $w = z$ então $uw = vz$

As duas últimas são muito usadas. Na prática, você pode somar, subtrair, multiplicar ou dividir em ambos os lados da igualdade e ela se mantém verdadeira.

Uma **solução** de uma equação em x é um valor de x para o qual a igualdade é verdadeira. **Resolver** uma equação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a igualdade é verdadeira.

Por exemplo, $x = -2$ é uma solução da equação $x^3 - x + 6 = 0$. De fato, substituindo $x = -2$ na equação, obtemos $(-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = -8 + 8 = 0 \checkmark$.

2.1 Resolução de equações lineares

A equação mais básica na álgebra é uma equação linear.

Uma **equação linear em x** é aquela que pode ser escrita na forma

$$ax + b = 0,$$

onde a e b são números reais e $a \neq 0$.

A equação $2z - 4 = 0$ é linear na variável z , enquanto que $3u^2 - 12 = 0$ não é linear na variável u . Uma equação linear em uma variável tem exatamente uma solução. Nós resolvemos uma equação desse tipo transformando-a em uma equação equivalente cuja solução é óbvia. Duas ou mais equações são **equivalentes** se elas têm as mesmas soluções. Por exemplo, as equações

$$2z - 4 = 0, \quad 2z = 4, \quad z = 2,$$

são todas equivalentes. Vejamos então quais operações produzem equações equivalentes.

Uma equação equivalente é obtida se uma ou mais das seguintes operações são aplicadas:

operação	eq. dada	eq. equivalente
1. Combinar termos semelhantes, simplificar frações e remover símbolos por meio de agrupamento	$2x + 3x = \frac{3}{9}$	$5x = \frac{1}{3}$
2. Aplicar a mesma operação em ambos os lados		
a) adicionar (-3)	$x + 3 = 7$	$x = 4$
b) subtrair $2x$	$5x = 2x + 4$	$3x = 4$
c) multiplicar por uma constante diferente de zero $(1/3)$	$3x = 12$	$x = 4$
d) dividir por uma constante diferente de zero (3)	$3x = 12$	$x = 4$

O próximo exemplo ilustra como usar essas operações para reduzir a uma equação equivalente e resolver a equação linear.

Exemplo 2.1. Resolva $2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$. Temos que

$$\begin{aligned}
 2(2x - 3) + 3(x + 1) &= 5x + 2 \\
 4x - 6 + 3x + 3 &= 5x + 2 \\
 7x - 3 &= 5x + 2 && \text{agrupei os fatores semelhantes} \\
 2x - 3 &= 2 && \text{somei } (-5x) \\
 2x &= 5 && \text{somei } 3 \\
 x &= \frac{5}{2} && \text{dividi por } 2
 \end{aligned}$$

Se uma equação envolve frações, encontramos o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores das frações e multiplicamos ambos os lados por esse valor encontrado. o próximo exemplo ilustra isso.

Exemplo 2.2. Vamos resolver a seguinte equação em y : $\frac{5y - 2}{8} = 2 + \frac{y}{4}$.

Os denominadores são 1, 4 e 8, logo o mínimo múltiplo comum é $\text{MMC}(1, 4, 8) = 8$.

Multiplicando ambos os lados da equação por 8, obtemos

$$\begin{aligned}
 8\left(\frac{5y - 2}{8}\right) &= 8\left(2 + \frac{y}{4}\right) \\
 5y - 2 &= 16 + 2y \\
 5y &= 18 + 2y \\
 3y &= 18 \\
 y &= \frac{18}{3} \\
 y &= 6
 \end{aligned}$$

É bem comum representarmos as soluções de uma equação através de seu **conjunto solução**. Isto é, dada uma equação, resolvemos e definimos o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x \text{ é solução da equação}\}.$$

Nos exemplos (2.1) e (2.2) os conjuntos soluções de cada equação são dados, respectivamente, por $S = \{5/2\}$ e $S = \{6\}$.

2.2 Resolução de equações de segundo grau

Uma **equação quadrática** (ou de segundo grau) em x é aquela que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Note que pedimos $a \neq 0$. Isto é necessário para que nunca se cancele o termo *quadrático* na equação, que é o termo com a incógnita x *ao quadrado*: ax^2 .

As soluções de uma equação quadrática são chamadas **raízes da equação**.

A princípio revisamos técnicas algébricas básicas para resolver equações quadráticas. Uma delas é a fatoração. Por exemplo, equações quadráticas da forma $(ax + b)^2 = c$ são fáceis de resolver: Para isso basta lembrar que se $t^2 = k > 0$ então $t = \sqrt{k}$ ou $t = -\sqrt{k}$.

Exemplo 2.3. (Solução por meio de raízes quadradas) Resolva $(2x - 1)^2 = 9$ algebricamente.

Se $(2x - 1)^2 = 9$ então $2x - 1 = \sqrt{9}$ ou $2x - 1 = -\sqrt{9}$. Assim, $2x - 1 = 3$ ou $2x - 1 = -3$, donde segue que $x = 2$ ou $x = -1$. Assim o conjunto solução é $S = \{-1, 2\}$.

A técnica vista no exemplo anterior é mais geral do que pensamos. De fato, **toda equação quadrática** pode ser escrita na forma

$$(ax + b)^2 = c,$$

basta completarmos quadrado.

Para resolver $x^2 + bx = c$ por meio do procedimento de completar quadrados, adicionamos $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ em ambos os lados da equação e fatoramos o lado esquerdo da nova equação

$$\begin{aligned} x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= c + \frac{b^2}{4} \end{aligned}$$

Para resolver a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, dividimos ambos os lados por a e completamos o quadrado:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
 x^2 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
 x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Agora, se $b^2 - 4ac \geq 0$, segue que

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

ou ainda, se $a > 0$,

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

e se $a < 0$ então

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Combinando todas as soluções temos a famosa **fórmula de Bháskara**, isto é, sendo $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, as soluções da equação do segundo grau são

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Em particular, se $\Delta = 0$ então $x_1 = x_2$ e a equação possui uma raiz dupla.

Agora, se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ então a última linha da equação (2.2.1) tem a seguinte propriedade: o seu lado esquerdo é um número não negativo (isto é, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$) e seu lado direito é menor que zero (isto é, $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$). Ou seja, a igualdade não pode ser verdadeira. Portanto a equação não pode ser resolvida em $\mathbb{R}$.

O Δ , assim definido, é chamado **discriminante** da equação do segundo grau.

Exemplo 2.4. Resolva $4x^2 - 20x + 17 = 0$ por completamento de quadrados. Temos que

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 20x + 17 &= 0 \\
 x^2 - 5x + \frac{17}{4} &= 0 && \text{dividi tudo por 4} \\
 x^2 - 5x &= -\frac{17}{4} && \text{somei } -\frac{17}{4} \text{ em ambos os lados} \\
 x^2 - 5x + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 &= -\frac{17}{4} + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 && \text{somei } \left(-\frac{5}{2}\right)^2 \text{ em ambos os lados} \\
 \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 &= 2 && \text{identifiquei o quadrado da diferença}
 \end{aligned}$$

Da última igualdade segue que as soluções são $x = \frac{5}{2} + \sqrt{2}$ ou $x = \frac{5}{2} - \sqrt{2}$.

Exemplo 2.5. Resolva a equação $3x^2 - 6x = 5$ usando a fórmula de Bháskara.

Primeiramente precisamos colocar a equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$ e identificar os valores de a , b e c . A equação é dada por $3x^2 - 6x - 5 = 0$, logo $a = 3$, $b = -6$ e $c = -5$. O discriminante é $\Delta = (-6)^2 - 4.3.(-5) = 96 > 0$, portanto a equação possui duas soluções reais. Pela fórmula dada, suas soluções são x_1 e x_2 , onde

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{96}}{2.3} = \frac{6 - \sqrt{96}}{6} = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{6},$$

e

$$x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{96}}{2.3} = \frac{6 + \sqrt{96}}{6} = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Uma maneira esperta de resolver equações quadráticas

Vamos estudar a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$. Sabemos que a expressão quadrática pode ser fatorada numa expressão do tipo $(x - x_1)(x - x_2)$. Neste caso a equação fica $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, ou seja, x_1 e x_2 são as soluções. Como calculá-los?

Devemos ter

$$\begin{aligned}
 x^2 - 5x + 4 &= (x - x_1)(x - x_2) \\
 &= x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 \\
 &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.
 \end{aligned}$$

Ou seja, $x_1 + x_2 = 5$ e $x_1x_2 = 4$.

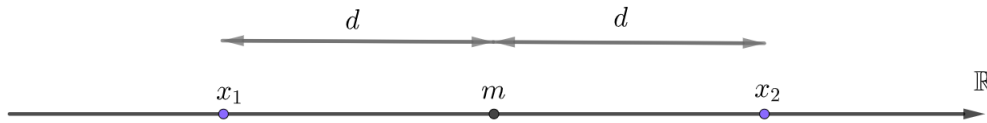
A pergunta é: Existem valores inteiros que somados resultam em 5 e multiplicados resultam em 4? Neste caso é fácil ver que sim! Note que devem ser divisores de 4, então as opções são $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ e é fácil deduzir que $x_1 = 4$ e $x_2 = 1$ satisfazem as duas condições.

Esta técnica é chamada de **soma-produto**. Para uma equação qualquer $x^2 + bx + c = 0$ podemos resolver de forma análoga. As soluções serão os valores x_1 e x_2 que satisfazem

$$x_1 + x_2 = -b \quad \text{e} \quad x_1 x_2 = c.$$

O ponto negativo deste método é que depende de tentativa e erro para resolver as equações e em geral ele é conveniente apenas quando há soluções inteiras. Mas podemos desenvolver ainda mais esta técnica. Vejamos:

Suponhamos que $x_1 < x_2$. Neste caso, podemos considerar esses números na reta real e chamar de m o ponto médio entre eles, ou seja, $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Por ser o ponto médio, a sua distância até x_1 e até x_2 deve ser a mesma. Vamos chamar esta distância de d .



Temos portanto:

$$\begin{cases} x_1 = m - d \\ x_2 = m + d \\ m = \frac{x_1 + x_2}{2} \end{cases}$$

Portanto $x_1 + x_2 = 2m$ e $x_1 x_2 = (m-d)(m+d) = m^2 - d^2$. Neste caso, pela soma-produto devemos ter (lembre-se de que d é uma distância e portanto um número positivo):

$$\begin{cases} -b = x_1 + x_2 = 2m \\ c = x_1 x_2 = m^2 - d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{b}{2} \\ d^2 = m^2 - c \end{cases} \xrightarrow{d>0} \begin{cases} m = -\frac{b}{2} \\ d = \sqrt{m^2 - c} \end{cases}$$

Segue que

$$\begin{cases} x_1 = m - d = m - \sqrt{m^2 - c} \\ x_2 = m + d = m + \sqrt{m^2 - c} \\ m = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

Portanto, as fórmulas abaixo nos dão um método para resolver equações quadráticas:

$$x = m \pm \sqrt{m^2 - c} \quad \text{onde} \quad m = -\frac{b}{2}$$

Na prática, veja o que acontece. Vamos resolver a equação $x^2 + 10x - 7 = 0$.

Temos $m = -\frac{b}{2} = -\frac{10}{2} = -5$. Portanto as soluções são

$$x = m \pm \sqrt{m^2 - c} = -5 \pm \sqrt{25 - (-7)} = -5 \pm \sqrt{32} = -5 \pm 4\sqrt{2}.$$

Observação 2.6. Veja que aqui tratamos somente equações em que o coeficiente do termo quadrático é 1. Mas sempre podemos reduzir uma equação quadrática a este caso. Por exemplo, a equação $2x^2 - 4x + 5 = 0$ é equivalente a $x^2 - 2x + \frac{5}{2} = 0$ e podemos aplicar a técnica a esta última equação.

Observação 2.7. Esse método é equivalente ao uso da fórmula de Bháskara. É possível chegar na fórmula através dele.

2.3 Outros tipos de equações

Vejamos alguns tipos de equações que envolvem outras operações, como por exemplo radicais.

Exemplo 2.8. (a) $(2x - 4)(2x^2 - 8) = 0$

Aqui temos um produto de expressões dando zero, logo um dos termos deve ser zero, isto é

$$2x = 4 \quad \text{ou} \quad 2x^2 - 8 = 0.$$

Sendo assim, o conjunto solução da equação é

$$S = \{x \in \mathbb{R}; 2x = 4\} \cup \{x \in \mathbb{R}; 2x^2 = 8\} = \{-2, 2\}.$$

(b) $(2x - 4)^2 + (2x^2 - 8)^2 = 0$

Agora temos uma equação do tipo $a^2 + b^2 = 0$. Como $a^2 + b^2 \geq 0$ segue que a equação só é válida quando $a = 0$ e $b = 0$. Assim sendo,

$$(2x - 4)^2 + (2x^2 - 8)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \quad \text{e} \quad 2x^2 - 8 = 0.$$

Assim o conjunto solução é dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R}; 2x - 4 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}; 2x^2 - 8 = 0\} = \{2\}.$$

(c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$

Note que aqui a condição de existência é que $x \geq -1$ para que ambas as expressões nas raízes sejam não negativas. Elevando ao quadrado em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2 &= 1^2 \\ (\sqrt{x+1})^2 - 2(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1}) + (\sqrt{x-1})^2 &= 1 \\ x+1 - 2\sqrt{x^2-1} + x-1 &= 1 \\ 2x-1 &= 2\sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

Agora elevamos ao quadrado mais uma vez, para eliminar a raiz quadrada:

$$4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 4 \Rightarrow -4x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Fazendo $x = \frac{5}{4}$ na equação $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$ podemos ver que de fato é uma solução.

Assim, $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}.$

(d) $(\sqrt[3]{x})^2 - 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0$

Seja $y = \sqrt[3]{x}$, de modo que a equação dada se reduz a

$$y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Resolvendo, temos que as soluções são $y = 1$ ou $y = 2$. Voltando à equação $y = \sqrt[3]{x}$, temos

$$\sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad e \quad \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8.$$

É possível verificar que tanto $x = 1$ quanto $x = 8$ satisfazem a equação $(\sqrt[3]{x})^2 - 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0$, de modo que seu conjunto solução é $S = \{1, 8\}$.

(e) $9\sqrt[4]{x^3} - 8\sqrt{x^3} - 1 = 0$

Note que $\sqrt[4]{x^3}$ só faz sentido se $x \geq 0$. Além disso, $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\sqrt{x^3}},$

de modo que a equação dada é

$$9\sqrt{\sqrt{x^3}} - 8\sqrt{x^3} - 1 = 0.$$

Fazendo $y = \sqrt{x^3}$, vem que $y \geq 0$ e podemos reescrevê-la da forma

$$9\sqrt{y} - 8y - 1 = 0.$$

Vejamos quais as soluções desta equação

$$9\sqrt{y} - 8y - 1 = 0$$

$$9\sqrt{y} = 1 + 8y.$$

Elevando ao quadrado em ambos os lados, segue que

$$81 = (1 + 8y)^2,$$

cujas soluções são $y = 1$ ou $y = \frac{1}{64}$.

Finalmente, voltando à variável x , se $y = 1$ então $\sqrt{x^3} = 1$ e portanto $x = 1$.

Se $y = \frac{1}{64}$ então $\sqrt{x^3} = \frac{1}{64}$ e portanto $x = \frac{1}{16}$.

Fazendo $x = 1$ e $x = \frac{1}{16}$ na equação $9\sqrt{\sqrt{x^3}} - 8\sqrt{x^3} - 1 = 0$ você consegue ver que de fato é uma solução. Assim, $S = \left\{1, \frac{1}{16}\right\}$.

2.4 Problemas envolvendo equações

Esta seção é dedicada a estudar problemas que podem ser modelados via equações. O mais difícil aqui é relacionar os dados do problema com a equação a ser resolvida, isto é, resolver a equação pode ser simples, uma vez que você a tenha modelado. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.9. A diferença entre as dimensões de um terreno retangular é 8m. Sabendo qe sua área é de 2900m^2 , determine as dimensões do terreno.

Sejam x e y as dimensões do terreno, sendo $x \geq y > 0$. O problema nos diz que a diferença entre as dimensões é de 8m, logo $x - y = 8$. Além disso, a área é de 2900m^2 , logo $xy = 2900$.

Unindo essas duas informações chegamos a um sistema de equações

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ xy = 2900 \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $x = y + 8$. Substituindo na segunda, vem

$$(y + 8)y = 2900 \Rightarrow y^2 + 8y - 2900 = 0,$$

e agora precisamos resolver a equação de segundo grau. As soluções nesse caso são $y_1 = 50$ e $y_2 = -58$. Como não existem dimensões negativas, podemos considerar somente a solução $y = 50$. Voltando na primeira equação do sistema, obtemos $x = 58$.

Logo as dimensões do terreno devem ser $x = 58\text{m}$ e $y = 50\text{m}$.

Exemplo 2.10. A população de peixes em um certo lago é dada pela fórmula

$$F = 1000(30 + 17t - t^2),$$

em que F é o número de peixes e t é o número de anos a partir de 01/01/2002.

a) Em qual data a população de peixes será a mesma de 01/01/2002?

b) A partir de que data todos os peixes do lago estarão mortos?

a) Em 01/01/2002 temos $t = 0$, assim buscamos t de modo que

$$1000(30 + 17t - t^2) = 1000(30 + 17 \cdot 0 - 0^2),$$

isto é,

$$17t - t^2 = 0,$$

cujas soluções são $t = 0$ ou $t = 17$. Como em $t = 0$ temos o estado inicial, então a resposta para o problema é $t = 17$, ou seja, em 17 anos a população será a mesma, o que nos leva à data 01/01/2019.

b) Os peixes estarem mortos significa que $F = 0$. Então buscamos t de modo que $1000(30 + 17t - t^2) = 0$. Vamos resolver a equação do segundo grau $30 + 17t - t^2 = 0$. O discri-

minante é $\Delta = 409$ e usando a fórmula de Bháskara as soluções são

$$t = \frac{-17 + \sqrt{409}}{(-2)} \simeq -1,611..., \quad \text{ou} \quad t = \frac{-17 - \sqrt{409}}{(-2)} \simeq 18,61.$$

Desconsiderando a solução negativa, em aproximadamente 18 anos e 7 meses os peixes estarão mortos, resultado em meados de agosto de 2020.

Semana 5

2.5 Intervalos

Um intervalo é um conjunto de números reais que contém todos os números entre quaisquer dois números fixados. Podemos considerar mais de um tipo de intervalo:

Dados dois números reais a e b , com $a < b$, definimos

i) o **intervalo aberto** de extremos a e b é o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$$

ii) o **intervalo fechado à esquerda (aberto à direita)** de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$$

iii) o **intervalo fechado à direita (aberto à esquerda)** de extremos a e b é o conjunto

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$

iv) o **intervalo fechado** de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}.$$

Além desses tipos, também consideramos intervalos infinitos, assim definidos:

v) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$

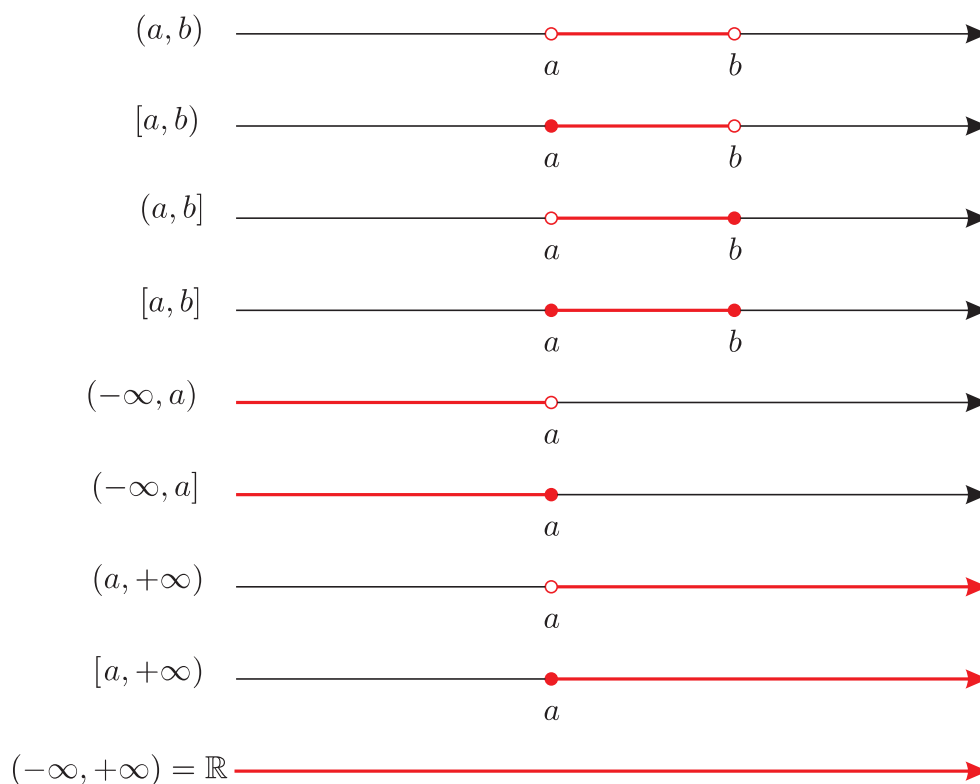
$$\text{vi) } (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$$

$$\text{vii) } (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$$

$$\text{viii) } [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$$

$$\text{ix) } (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Os intervalos possuem uma representação geométrica sobre a reta como a que segue:



Os números reais a e b são denominados, respectivamente, **extremo inferior** e **extremo superior** do intervalo. Os intervalos fechado à esquerda/direita também são chamados de **intervalos semi-abertos**.

Note que usamos o termo *fechado* para simbolizar que o extremo pertence ao intervalo e o termo *aberto* para dizer que o extremo não pertence. Por exemplo, o intervalo $(2, 8]$ é aberto em 2 e fechado em 8 e isto significa que ele é formado por todos os números entre 2 e 8, incluindo o 8 e não o 2, ou seja, o extremo 8 pertence ao intervalo e o extremo 2 não pertence.

Operações com intervalos

Intervalos são conjuntos e algumas vezes trabalharemos com união e interseção deles:

Exemplo 2.11. Sejam $A = (2, 3)$ e $B = \left[1, \frac{5}{2}\right)$.

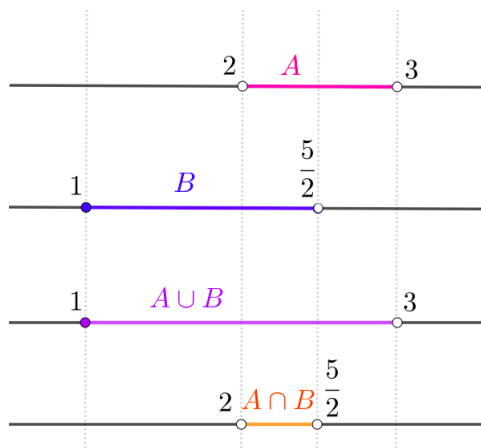
Vamos calcular $A \cup B$ e $A \cap B$.

Uma maneira simples de resolver estas operações é através da representação visual (veja ao lado).

Temos:

$$A \cup B = (2, 3) \cup \left[1, \frac{5}{2}\right) = [1, 3)$$

$$A \cap B = (2, 3) \cap \left[1, \frac{5}{2}\right) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$$



2.6 Módulo de um número real

Estamos acostumados a pensar no módulo como uma operação que “obriga o número a ficar positivo”. Por exemplo: $|-3| = 3$, $|\pi| = \pi$.

De modo geral, o que fazemos é: se $x \geq 0$, então o módulo é ele mesmo, ou seja, $|x| = x$; e se $x < 0$, temos que mudar o sinal, ou seja, $|x| = -x$ (note que neste caso, $-x > 0$ e foi o que aconteceu com o exemplo $|-3| = 3 = -(-3) > 0$).

Podemos organizar estas condições em uma única definição:

Sendo $x \in \mathbb{R}$, define-se **módulo** ou **valor absoluto** de x , que se indica por $|x|$, por meio da relação:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proposição 2.12. Se x, y são números reais, são válidas as seguintes propriedades:

(i) $|x| \geq 0$

(iii) $|x||y| = |xy|$

(v) $x \leq |x|$

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iv) $|x|^2 = x^2$

Equações modulares

Chamamos de equações modulares as equações em que aparecem módulos de expressões que contém incógnitas.

Exemplo 2.13. São exemplos de equações modulares:

$$|x| = 7, \quad |x + 6| = x + 6, \quad |x - 3| + 4x = 7, \quad |x + 2| = 4$$

Como resolver tais equações? Vejamos com exemplos:

Exemplo 2.14. $|x + 2| = 4$

Usando a definição de módulo, temos que se $|x + 2| = 4$ então $x + 2 = 4$ ou $x + 2 = -4$. Se $x + 2 = 4$ então $x = 2$ e se $x + 2 = -4$ então $x = -6$. Logo o conjunto solução é dado por $S = \{-6, 2\}$.

Exemplo 2.15. $|4x + 8| = x + 1$

Observe que $|4x + 8| \geq 0$, de modo que a equação só é possível se $x + 1 \geq 0$. Ou seja, a condição de existência é que $x \geq -1$.

Pela definição de módulo:

$$|4x + 8| = \begin{cases} 4x + 8, & \text{se } 4x + 8 \geq 0 \\ -(4x + 8), & \text{se } 4x + 8 < 0. \end{cases}$$

Note que $4x + 8 < 0$ é equivalente a $x < -2$. Mas isso não pode ocorrer devido à nossa condição de existência $x \geq -1$.

Logo a única possibilidade é o caso $x \geq -2$ (ou seja, $4x + 8 \geq 0$), que nos dá

$$4x + 8 = x + 1 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}.$$

Como $-\frac{7}{3}$ não satisfaz a condição $x \geq -1$, a equação não possui solução, isto é, $S = \emptyset$.

Exemplo 2.16. $|x^2 - 5x + 6| = 2$

Temos $|x^2 - 5x + 6| = 2$ equivalente a $x^2 - 5x + 6 = 2$ ou $x^2 - 5x + 6 = -2$. Sendo assim, o conjunto solução da equação $|x^2 - 5x + 6| = 2$ é dado por $S = S_1 \cup S_2$, onde S_1 é o conjunto solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 2$ e S_2 é o conjunto solução de $x^2 - 5x + 6 = -2$.

Dessa forma, temos $S_1 = \{1, 4\}$ e $S_2 = \emptyset$, pois $x^2 - 5x + 6 = -2$ não possui solução real. Logo $S = \{1, 4\}$.

Exemplo 2.17. $|x^2| - |x| - 6 = 0$

Para esse item faremos a substituição $y = |x|$. Nesses casos, é importante que verifiquemos ao final se todas as soluções encontradas da equação em y ainda são soluções da equação em x .

Fazendo $y = |x|$ obtemos a equação quadrática $y^2 - y - 6 = 0$.

Calculando as raízes obtemos $y = 2$ ou $y = -3$. Voltando na substituição que fizemos, se $y = 2$, temos a equação $|x| = 2$, cujas soluções são $x = -2$ ou $x = 2$. E se $y = -3$ obtemos $|x| = -3$, que não possui solução pois $|x| \geq 0$. Assim as possíveis soluções da equação inicial são $x = -2$ ou $x = 2$.

- Substituindo $x = -2$, temos $|-2|^2 + |-2| - 6 = 4 + 2 - 6 = 0 \checkmark$
- Substituindo $x = 2$, temos $|2|^2 + |2| - 6 = 4 + 2 - 6 = 0 \checkmark$

Logo o conjunto solução é $S = \{-2, 2\}$.

Exemplo 2.18. $|x + 1| - |x - 3| = 0$

Observe que $|x + 1| - |x - 3| = 0 \Rightarrow |x + 1| = |x - 3| \Rightarrow x + 1 = x - 3$ ou $x + 1 = -(x - 3)$

Mas $x + 1 = x - 3$ não possui solução e $x + 1 = -x + 3$ implica $x = 1$. Logo o conjunto solução da equação é $S = \{1\}$.

Observação 2.19. Não temos um método específico para resolver equações modulares, mas em geral usamos a definição de módulo e em seguida estudamos as possibilidades.

2.7 Inequações

2.7.1 Inequações e desigualdades

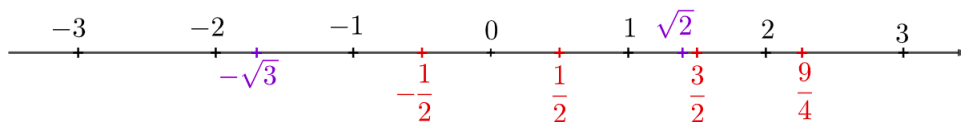
Uma **inequação** é uma sentença matemática que apresenta pelo menos uma incógnita e representa uma desigualdade.

São exemplos de inequações: $2x + 1 < 5$, $3x^2 - 2 \geq 0$, $2^x \leq 5^{x+1} - 2$.

Nas inequações são usados os símbolos:

- $>$ maior que
- $<$ menor que
- $\geq$ maior ou igual que
- $\leq$ menor ou igual que

Usamos desigualdades para descrever, por exemplo, a ordem dos números sobre a reta real. Vejamos:



Podemos concluir da figura acima, usando desigualdades, que $-3 < -1$ ou $-\frac{1}{2} < 2$ e também $0 < \sqrt{2}$. Ou ainda:

$$-3 < -2 < -\sqrt{3} < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2} < 2 < \frac{9}{4} < 3.$$

Algumas propriedades são muito úteis ao trabalhar com desigualdades:

Sejam u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas e c um número real.

- (i) **Transitiva:** Se $u < v$ e $v < w$ então $u < w$.
- (ii) **Soma de termos:** Se $u < v$ então $u + w < v + w$.
- (iii) **Soma em desigualdades:** Se $u < v$ e $w < z$ então $u + w < v + z$.
- (iv) **Produto por um termo positivo:** Se $u < v$ e $c > 0$ então $uc < vc$.
(Isto é, mantém o sinal da desigualdade)
- (v) **Produto por um termo negativo:** Se $u < v$ e $c < 0$ então $uc > vc$.
(Isto é, inverte o sinal da desigualdade)
- (vi) **Inverso:** Se $0 < a < b$ ou $a < b < 0$ (a e b tem o mesmo sinal), então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
Se $a < 0 < b$ (a e b com sinais diferentes), então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

As propriedades acima continuam válidas se trocarmos o símbolo $<$ por $\leq$.

Observação 2.20. Existem propriedades análogas para $>$ e $\geq$. Você consegue descrevê-las? Faça como exercício.

Exemplo 2.21. Vejamos exemplos de algumas propriedades acima:

- (ii) Se $x - 1 < 4$, então podemos somar 1 em ambos os lados e obter $x - 1 + 1 < 4 + 1$, ou seja, $x < 5$.

(iv) Se $4x \geq 8$, então multiplicamos ambos os lados por $\frac{1}{4} > 0$ e o sinal da desigualdade se mantém: $4x \cdot \frac{1}{4} \geq 8 \cdot \frac{1}{4}$ e portanto $x \geq 2$.

(v) Se $-5x \geq 1$, então multiplicamos ambos os lados por $-\frac{1}{5} < 0$ e o sinal da desigualdade inverte: $-5x \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \leq 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$ e portanto $x \leq -\frac{1}{5}$.

Resolver uma inequação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira. Uma **solução** de uma inequação em x é um valor de x que satisfaz isso e o **conjunto solução** é o conjunto de todas as soluções. Sendo assim, resolvemos uma inequação encontrando o seu conjunto solução.

No exemplo acima, vimos que a inequação $x - 1 < 4$ é verdadeira sempre que $x < 5$. Logo $x = 3$ é uma solução (pois $3 < 5$) e o conjunto solução é o intervalo $S = (-\infty, 5)$.

Tal como feito para equações, podemos resolver uma inequação transformando-a em uma inequação equivalente, cujas soluções são óbvias. Duas inequações são **equivalentes** se elas têm o mesmo conjunto solução. As propriedades citadas anteriormente descrevem operações que podem ser feitas para obtermos inequações equivalentes.

Por exemplo,

$$x - 1 < 4, \quad x - 1 + 1 < 4 + 1, \quad x < 5$$

são inequações equivalentes.

Na próxima seção veremos uma ferramenta de estudo de polinômios que pode ser útil para resolver inequações (análise de sinal) e nas seções seguintes veremos a maneira mais tradicional de resolver inequações, separada por casos. Antes, porém, lembremos de algumas regras da operação de produto com números negativos:

Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a \cdot b > 0$.

“mais com mais dá mais.”

$$\text{Ex.: } 3 \cdot 4 = 12 > 0$$

Se $a > 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b = b \cdot a < 0$.

“mais com menos dá menos.”

$$\text{Ex.: } 3 \cdot (-4) = -12 < 0$$

Se $a < 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b > 0$.

“menos com menos dá mais.”

$$\text{Ex.: } (-3) \cdot (-4) = 12 > 0$$

Dos casos acima podemos concluir o seguinte resultado:

Proposição 2.22. *Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas. Então*

- Se $u \cdot v > 0$, temos duas possibilidades: $u > 0$ e $v > 0$, ou $u < 0$ e $v < 0$.
Em outras palavras, se o produto de u e v é positivo, então u e v tem o mesmo sinal (ou ambos positivos ou ambos negativos).
- Se $u \cdot v < 0$, temos duas possibilidades: $u > 0$ e $v < 0$, ou $u < 0$ e $v > 0$.
Em outras palavras, se o produto de u e v é negativo, então u e v tem sinais opostos.

2.7.2 Análise de sinal de polinômios

Analisar o sinal de uma expressão algébrica significa investigar para quais valores de x o resultado da expressão é um número positivo, negativo ou 0. Começaremos estudando o sinal de polinômios de grau 1.

Polinômios de primeiro grau:

Consideremos a expressão $2x - 2$. Para quais valores de x a expressão é positiva?

Para responder a pergunta fazemos:

$$\begin{aligned}
 2x - 2 &> 0 \\
 2x &> 2 && \text{(somar 2 em ambos os lados - propriedade (ii))} \\
 2x \cdot \frac{1}{2} &> 2 \cdot \frac{1}{2} && \text{(multiplicar 1/2 em ambos os lados - propriedade (iv))} \\
 x &> 1
 \end{aligned}$$

Ou seja, $2x - 2 > 0$ se $x > 1$.

De forma análoga concluímos que $2x - 2 = 0$ se $x = 1$ e $2x - 2 < 0$ se $x < 1$.

Podemos escrever usando notação de intervalo:

$$\begin{aligned}
 2x - 2 > 0 &\text{ se } x \in (1, +\infty) \\
 2x - 2 = 0 &\text{ se } x \in \{1\} \\
 2x - 2 < 0 &\text{ se } x \in (-\infty, 1)
 \end{aligned}$$

Ou ainda representar através de um formato visual (às vezes chamado carinhosamente de “varalzinho”):



Note que $x = 1$ é a raiz do polinômio $p(x) = 2x - 2$, isto é, $x = 1$ é o valor que anula o polinômio ($p(1) = 0$).

O processo da análise de sinal deste exemplo pode ser generalizado. Para o caso geral

$$p(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

descobrimos a raiz determinando o valor de x que anula o polinômio, ou seja, resolvendo:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Portanto, se $x = -b/a$, ao substituí-lo na expressão do polinômio obtemos

$$a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0.$$

Mas o que ocorre para os números maiores que $-b/a$? E para números menores?

Vamos separar em dois casos: quando $a > 0$ e quando $a < 0$.

Caso 1: $a > 0$

Vejamos o que acontece para valores de x maiores do que a raiz, ou seja, $x > -\frac{b}{a}$. Esta desigualdade é equivalente a

$$x + \frac{b}{a} > 0.$$

Como $a > 0$, ao multiplicar a desigualdade por a o sinal não se altera (propriedade (iv) de desigualdades) e assim obtemos

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right) > a \cdot 0 \Rightarrow ax + b > 0.$$

Agora, para valores menores do que a raiz: $x < -b/a$, temos analogamente $x + \frac{b}{a} < 0$ e multiplicando a desigualdade por $a > 0$, o sinal não se altera, de modo que $a(x + \frac{b}{a}) < 0$, e portanto $ax + b < 0$.

Conclusão visual no “varalzinho”:

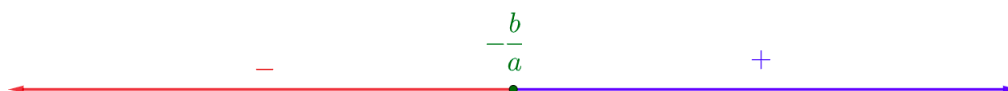


Figura: Análise de sinal do polinômio $ax + b$ com $a > 0$

Caso 2: $a < 0$. Procedemos de maneira equivalente:

Para valores de x maiores do que a raiz, ou seja, $x > -\frac{b}{a}$, temos $x + \frac{b}{a} > 0$ e desta vez $a < 0$, ou seja, ao multiplicar a desigualdade por a o sinal da desigualdade inverte (propriedade (v) de desigualdades). Portanto $a\left(x + \frac{b}{a}\right) < a \cdot 0$ e com isso $ax + b < 0$.

Agora, para valores menores do que a raiz: $x < -b/a$, temos novamente $x + \frac{b}{a} < 0$ e multiplicando a desigualdade por $a > 0$, o sinal inverte, de modo que $a(x + \frac{b}{a}) > 0$, e assim $ax + b > 0$.

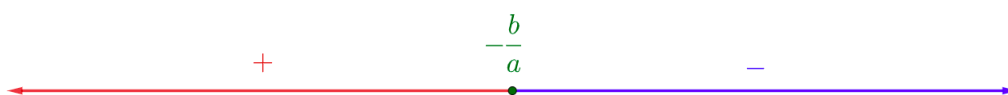


Figura: Análise de sinal do polinômio $ax + b$ com $a < 0$

Exemplo 2.23. Estude o sinal de $3x + 6$.

Note que $a = 3 > 0$. Calculamos a raiz: $3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$. Portanto

$$\begin{cases} 3x + 6 > 0, & \text{se } x > -2, \\ 3x + 6 = 0, & \text{se } x = -2, \\ 3x + 6 < 0, & \text{se } x < -2. \end{cases}$$



Exemplo 2.24. Estude o sinal de $-x + 2$.

Note que $a = -1 < 0$ e $-x + 2 = 0$ nos dá a raiz $x = 2$. Portanto

$$\begin{cases} -x + 2 > 0, & \text{se } x < 2, \\ -x + 2 = 0, & \text{se } x = 2, \\ -x + 2 < 0, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$



Feita a análise de sinal do polinômio $p(x)$, automaticamente temos as soluções das inequações

$$p(x) > 0,$$

$$p(x) \geq 0,$$

$$p(x) < 0,$$

$$p(x) \leq 0.$$

Por exemplo, para $p(x) = -x + 2$, temos

$$\begin{cases} -x + 2 > 0 & \text{com solução } S = (-\infty, 2), \\ -x + 2 \geq 0 & \text{com solução } S = (-\infty, 2], \\ -x + 2 < 0 & \text{com solução } S = (2, +\infty), \\ -x + 2 \leq 0 & \text{com solução } S = [2, +\infty). \end{cases}$$

O caso $\geq$ foi concluído juntando as informações de $>$ e $=$. Analogamente para $\leq$.

Polinômios de segundo grau:

Faremos agora uma análise parecida para polinômios do tipo $ax^2 + bx + c$. Começemos com os casos em que conseguimos fatorar o polinômio na forma $a(x - x_1)(x - x_2)$, onde x_1 e x_2 são as raízes de $p(x) = ax^2 + bx + c$ (isto é, avaliado nesses pontos, o polinômio se anula).

Caso 1: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, com $x_1 \neq x_2$.

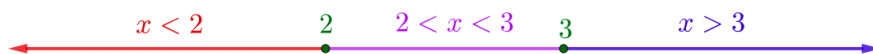
Isto é, um polinômio de segundo grau com duas **raízes distintas**.

Este caso se reduz a dois subcasos: quando $a > 0$ e quando $a < 0$. Vamos ilustrar o método com exemplos:

Exemplo 2.25. Estudemos o polinômio $p(x) = x^2 - 5x + 6$. (Note que $a = 1 > 0$.)

Resolvemos facilmente (por soma e produto, por exemplo) a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ e obtemos as raízes $x = 2$ e $x = 3$. Isso significa que $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Considerando as raízes 2 e 3, temos três intervalos para estudar o sinal:



Se $x < 2$: Neste caso, automaticamente temos também $x < 3$ (propriedade (i) de desi-

gualdades, pois $2 < 3$), ou seja, $x - 2 < 0$ e $x - 3 < 0$. Portanto

$$(x - 2)(x - 3) > 0.$$

(Lembre-se do “menos com menos dá mais”.)

Se $2 < x < 3$: Neste caso, $x - 2 > 0$ e $x - 3 < 0$. Portanto

$$(x - 2)(x - 3) < 0.$$

(Lembre-se do “mais com menos dá menos”.)

Se $x > 3$: Automaticamente temos $x > 2$ e assim $x - 2 > 0$ e $x - 3 > 0$. Portanto

$$(x - 2)(x - 3) > 0.$$

Portanto

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, & \text{se } x < 2 \text{ ou } x > 3, \\ x^2 - 5x + 6 = 0, & \text{se } x = 2 \text{ ou } x = 3, \\ x^2 - 5x + 6 < 0, & \text{se } 2 < x < 3. \end{cases}$$



Ou ainda, com linguagem de conjunto: Portanto

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, & \text{se } x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty), \\ x^2 - 5x + 6 = 0, & \text{se } x \in \{2, 3\}, \\ x^2 - 5x + 6 < 0, & \text{se } x \in (2, 3). \end{cases}$$

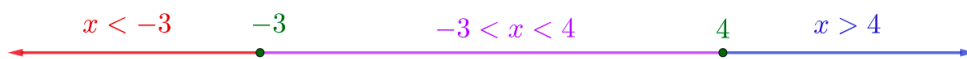
Exemplo 2.26. Estudemos o polinômio $p(x) = -2x^2 + 2x + 24$ (com $a = -2 < 0$).

Note que $p(x) = -2(x^2 - x - 12)$ e por soma e produto sabemos que as raízes de $x^2 - x - 12$ são $x = 4$ e $x = -3$, o que implica em $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$. Portanto $p(x) = -2(x + 3)(x - 4)$.

Até aqui sabemos quem são as raízes de $p(x)$: $x = 4$ e $x = -3$, ou seja, esses são os valores que satisfazem $p(x) = 0$.

Para identificar os valores para os quais $p(x) > 0$ ou $p(x) < 0$, vamos estudar os intervalos com extremos nas raízes:

$$x < -3, \quad -3 < x < 4, \quad x > 4.$$



O processo é análogo ao do exemplo anterior:

Se $x < -3$: Temos também $x < 4$ e assim $x + 3 < 0$ e $x - 4 < 0$. Logo

$$(x + 3)(x - 4) > 0 \Rightarrow -2(x + 3)(x - 4) < 0.$$

Se $-3 < x < 4$: Neste caso, $x + 3 > 0$ e $x - 4 < 0$. Logo

$$(x + 3)(x - 4) < 0 \Rightarrow -2(x + 3)(x - 4) > 0.$$

Se $x > 4$: Temos $x > -3$ e assim $x + 3 > 0$ e $x - 4 > 0$. Logo

$$(x + 3)(x - 4) > 0 \Rightarrow -2(x + 3)(x - 4) < 0.$$

Portanto

$$\begin{cases} -2x^2 + 2x + 24 > 0, & \text{se } -3 < x < 4, \\ -2x^2 + 2x + 24 = 0, & \text{se } x = -3 \text{ ou } x = 4, \\ -2x^2 + 2x + 24 < 0, & \text{se } x < -3 \text{ ou } x > 4. \end{cases}$$



Ou ainda, com linguagem de conjunto:

$$\begin{cases} -2x^2 + 2x + 24 > 0, & \text{se } x \in (-3, 4), \\ -2x^2 + 2x + 24 = 0, & \text{se } x \in \{-3, 4\}, \\ -2x^2 + 2x + 24 < 0, & \text{se } x \in (-\infty, -3) \cup (4, +\infty). \end{cases}$$

Em resumo, para o **Caso 1** procedemos da seguinte forma para analisar o sinal do polinômio $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ com $x_1 \neq x_2$:

- Calculamos as duas raízes distintas x_1 e x_2 e fatoramos o polinômio
- Supondo $x_1 < x_2$, estudamos o que acontece nos intervalos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) e $(x_2, +\infty)$
- Temos duas possibilidades de solução (a depender se a é positivo ou negativo), representadas na figura abaixo:



Caso 2: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, com $x_1 = x_2$.

Isto é, um polinômio de segundo grau com **apenas uma raiz**.

Exemplo 2.27. Estudemos o sinal do polinômio $p(x) = x^2 - 10x + 25$.

Temos $p(x) = (x - 5)^2$, pois a única raiz é $x = 5$. Mas $(x - 5)^2 \geq 0$ para todo real. Portanto

$$x^2 - 10x + 25 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



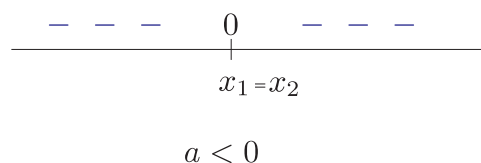
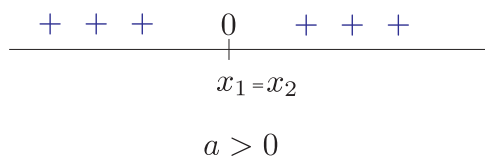
Exemplo 2.28. O polinômio $p(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x - 1)^2$ satisfaz $p(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Concluimos para o **Caso 2** que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ e como $(x - x_1)^2 \geq 0$, o sinal do polinômio depende apenas do sinal de a :

Se $a > 0$, então $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e se $a < 0$, então $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, sendo que em ambos os casos a igualdade vale apenas para $x = x_1$.

A figura abaixo ilustra geometricamente a análise do sinal



Caso 3: Não conseguimos fatorar o polinômio $ax^2 + bx + c$. Isto é, não há raiz real.

Exemplo 2.29. Estudemos o sinal de $p(x) = x^2 + 2x + 4$.

Este polinômio não tem raiz real pois $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 4 = -12 < 0$. Completando quadrados, obtemos:

$$x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2x + 1) + 3 = (x + 1)^2 + 3.$$

Como $(x + 1)^2 \geq 0$, segue que $p(x) = (x + 1)^2 + 3 \geq 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

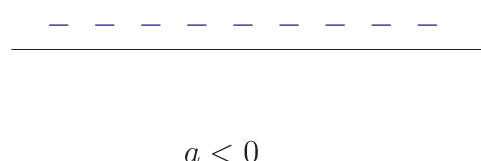
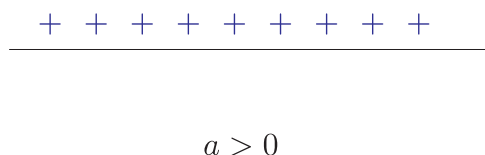
Exemplo 2.30. Estudemos o sinal de $p(x) = -x^2 + 4x - 10$.

É irredutível pois $\Delta = 4^2 - 4(-1)(-10) = -24 < 0$. De modo análogo, completamos quadrado e obtemos:

$$p(x) = -(x^2 - 4x + 10) = -(x^2 - 4x + 4 + 6) = -(x - 2)^2 - 6 \leq -6 < 0.$$

Note que no primeiro exemplo temos $a > 0$ e no segundo, $a < 0$. Ou seja, o sinal do polinômio depende essencialmente do sinal de a .

Concluimos para o **Caso 3**, com $ax^2 + bx + c$ polinômio irredutível, que se $a > 0$, então $ax^2 + bx + c > 0$ e se $a < 0$ então $ax^2 + bx + c < 0$. Observe que, neste caso, ou o polinômio é sempre positivo ou é sempre negativo:



Para encerrar o assunto de análise de sinal, podemos estudar ainda um outro caso, que acontece quando fatoramos o polinômio, mas não na forma $a(x - x_1)(x - x_2)$, sendo x_1 e x_2 as suas raízes. Por exemplo, $2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x - 2)$.

Exemplo 2.31. Estude o sinal de $2x^2 - 5x + 2$.

Primeiramente, note que $2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x - 2)$. Assim, $2x^2 - 5x + 2 > 0$ quando as duas parcelas de sua fatoração possuem o mesmo sinal (pela Proposição 2.22), isto é,

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}.$$

Portanto, $2x^2 - 5x + 2 > 0$ se $x > 2$ ou se $x < 1/2$.

Analogamente, $2x^2 - 5x + 2 < 0$ quando as duas parcelas de sua fatoração possuem sinais distintos, isto é,

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}.$$

Portanto, $2x^2 - 5x + 2 < 0$ se $1/2 < x < 2$. (O sistema em verde não tem solução.)

Reunindo as informações, temos

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0, & \text{se } x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty), \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0, & \text{se } x \in \{\frac{1}{2}, 2\}, \\ 2x^2 - 5x + 2 < 0, & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 2). \end{cases}$$

(Note que $\frac{1}{2}$ e 2 são as raízes do polinômio.)



Observação 2.32. O que fizemos neste último exemplo foi ilustrar uma outra maneira de pensar em análise do sinal de um polinômio. É claro que você pode escrever $2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x - 2) = 2(x - 1/2)(x - 2)$ e então recair na análise que já foi feita anteriormente.

2.7.3 Inequações lineares em uma variável

Uma **inequação linear em x** é uma inequação que pode ser escrita na forma

$$ax + b < 0, \quad ax + b \leq 0, \quad ax + b > 0, \quad ax + b \geq 0, \quad (a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0).$$

Ou seja, é aquela em que a maior potência para a variável x é 1.

Vamos usar as propriedades apresentadas na Seção 2.7.1 para resolver as inequações.

Exemplo 2.33. Resolva $3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$.

$$\begin{aligned}
 3(x - 1) + 2 &\leq 5x + 6 \\
 3x - 3 + 2 &\leq 5x + 6 && \text{distributiva} \\
 3x - 1 &\leq 5x + 6 && \text{simplificação} \\
 3x &\leq 5x + 7 && \text{somei 1 em ambos os lados} \\
 -2x &\leq 7 && \text{subtrai 5x de ambos os lados} \\
 x &\geq -\frac{7}{2} && \text{dividi tudo por } -2.
 \end{aligned}$$

Assim o conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R}; x \geq -\frac{7}{2}\right\}$ ou em notação de intervalo, $S = \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

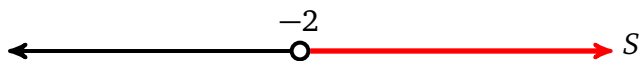
Exemplo 2.34. Vamos apresentar o conjunto solução da inequação

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}.$$

O MMC entre os denominadores é 12. Multiplicando a inequação por 12 obtemos

$$\begin{aligned}
 12\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right) &> 12\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{3}\right) \\
 4x + 6 &> 3x + 4 \\
 x + 6 &> 4 \\
 x &> -2.
 \end{aligned}$$

Logo o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R}; x > -2\} = (-2, +\infty)$. Sua representação gráfica é dada por:



Às vezes, duas inequações são combinadas em uma **inequação dupla**, cujo conjunto solução se torna uma interseção de dois conjuntos. Começemos por um caso simples (mais a frente faremos uma generalização).

Exemplo 2.35. Vamos resolver a inequação e representar graficamente a solução:

$$-3 < \frac{2x + 5}{3} \leq 5 \quad (2.7.1)$$

Aqui é interessante destacar que a inequação dupla é formada por duas inequações:

$$\underbrace{-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5}_{\textcircled{1}} \quad e \quad -3 < \overbrace{\frac{2x+5}{3} \leq 5}^{\textcircled{2}}.$$

Resolvemos a inequação $\textcircled{1}$, encontrando um conjunto solução S_1 e depois a inequação $\textcircled{2}$, encontrando um conjunto solução S_2 . Dessa forma o conjunto solução de (2.7.1) será dado por $S = S_1 \cap S_2$. (Aqui fazemos a interseção pois queremos os valores de x que satisfazem a inequação $\textcircled{1}$ **E** simultaneamente a inequação $\textcircled{2}$) Resolvendo a primeira inequação:

$$\begin{aligned} -3 &< \frac{2x+5}{3} \\ 2x+5 &> -9 \\ 2x &> -14 \\ x &> -7 \end{aligned}$$

e $S_1 = \{x \in \mathbb{R}; x > -7\}$. Resolvendo a segunda inequação:

$$\begin{aligned} \frac{2x+5}{3} &\leq 5 \\ 2x+5 &\leq 15 \\ 2x &\leq 10 \\ x &\leq 5 \end{aligned}$$

e $S_2 = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 5\}$.

Logo o conjunto solução é $S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R}; -7 < x \leq 5\} = (-7, 5]$.

Observação 2.36. No exemplo acima poderíamos ter resolvido as duas inequações simultaneamente:

$$\begin{aligned} -3 &< \frac{2x+5}{3} \leq 5 \\ -9 &< 2x+5 \leq 15 \\ -14 &< 2x \leq 10 \\ -7 &< x \leq 5. \end{aligned}$$

Inequações simultâneas

Esse tipo de inequação generaliza as inequações duplas. Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ expressões polinomiais em x . A dupla desigualdade

$$f(x) < g(x) < h(x) \quad (2.7.2)$$

se decompõe em duas inequações simultâneas:

$$f(x) < g(x) < h(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) & \textcircled{1} \\ \text{e} \\ g(x) < h(x) & \textcircled{2} \end{cases}$$

Indicando por S_1 o conjunto solução de $\textcircled{1}$ e por S_2 o conjunto solução de $\textcircled{2}$, o conjunto solução da desigualdade (2.7.2) é dado por $S = S_1 \cap S_2$.

Exemplo 2.37. Resolver $3x + 2 < -x + 3 \leq x + 4$. Temos que resolver duas inequações:

$$\textcircled{1} \quad 3x + 2 < -x + 3. \text{ Temos } 3x + x < 3 - 2 \text{ e assim } 4x < 1.$$

$$\text{O conjunto solução é } S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}; x < \frac{1}{4} \right\}$$

$$\textcircled{2} \quad -x + 3 \leq x + 4. \text{ Fazemos } -4 + 3 \leq x + x \Rightarrow 2x \geq -1.$$

$$\text{O conjunto solução é } S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \geq -\frac{1}{2} \right\}.$$

$$\text{Assim a interseção dos dois conjuntos soluções é } S = \left\{ x \in \mathbb{R}; -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{4} \right\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right).$$

2.7.4 Inequações produto

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x , as inequações

$$f(x)g(x) > 0, f(x)g(x) < 0, f(x)g(x) \leq 0, f(x)g(x) \geq 0,$$

são denominadas **inequações produto**.

Vamos começar estudando o conjunto solução S da inequação $f(x)g(x) > 0$.

Consideremos o exemplo $(x + 2)(2x - 1) > 0$ Pela Proposição 2.22, as expressões $x + 2$

e $2x - 1$ devem ter o mesmo sinal, isto é, temos duas possibilidades:

$$(1) \text{ } x + 2 > 0 \text{ e } 2x - 1 > 0 \quad \text{ou} \quad (2) \text{ } x + 2 < 0 \text{ e } 2x - 1 < 0$$

(1) Temos

$$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \quad \text{e} \quad 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

portanto a interseção¹ dessas duas soluções é $S_1 \cap S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}; x > \frac{1}{2} \right\} = \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$.

(2) Quando $x + 2 < 0$ e $2x - 1 < 0$

$$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2 \quad \text{e} \quad 2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

portanto a interseção dessas duas soluções é $S_3 \cap S_4 = \{x \in \mathbb{R}; x < -2\} = (-\infty, -2)$.

Assim o conjunto solução da inequação $(x + 2)(2x - 1) > 0$ é a **união**²:

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4) = (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

Para o caso geral $f(x)g(x) > 0$ seguimos da mesma maneira que no exemplo acima. Pela Proposição 2.22, temos duas possibilidades:

$$(1) \text{ } f(x) > 0 \text{ e } g(x) > 0$$

Se S_1 e S_2 são, respectivamente, os conjuntos soluções dessas inequações então $S_1 \cap S_2$ é o conjunto solução neste caso.

$$\text{ou } (2) \text{ } f(x) < 0 \text{ e } g(x) < 0$$

Se S_3 e S_4 são, respectivamente, os conjuntos soluções dessas inequações então $S_3 \cap S_4$ é o conjunto solução neste caso.

Desta análise concluímos que o conjunto solução da inequação produto $f(x)g(x) > 0$ é $S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4)$.

O mesmo tipo de raciocínio pode ser empregado para encontrar o conjunto solução da inequação $f(x)g(x) < 0$.

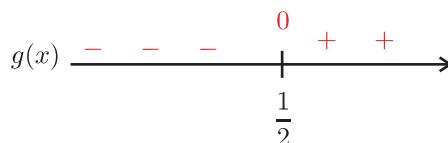
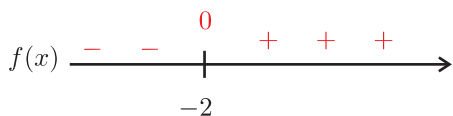
Podemos utilizar um **outro processo**, um pouco mais rápido e prático, para resolvermos

¹Lembre que quando se deve satisfazer uma propriedade e outra simultaneamente, usamos a **interseção**.

²Se buscamos os valores que satisfazem uma propriedade ou outra, usamos a **união**.

uma inequação produto. Vejamos como utilizá-lo para a inequação $(x + 2)(2x - 1) > 0$.

- Primeiro estudamos o sinal dos polinômios $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 2x - 1$



- Construímos um quadro, chamado quadro-produto, onde se encontram os sinais de $f(x)$, $g(x)$ e do produto entre elas.

		-2		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	
$g(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
		-2		$\frac{1}{2}$	

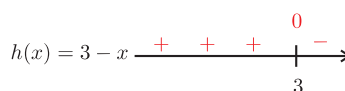
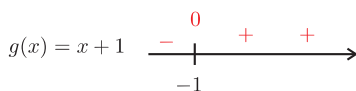
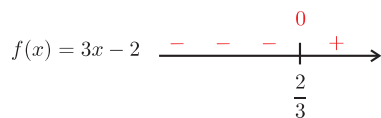
Assim o conjunto solução está representado geometricamente pela parte em vermelho no quadro-produto, isto é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right\} = (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

Podemos estender o raciocínio empregado acima para quando o produto envolve mais de dois fatores.

Exemplo 2.38. Resolva a inequação $(3x - 2)(x + 1)(3 - x) < 0$.

Analisando os sinais dos fatores, temos



Agora construímos o quadro produto:

			-1		$\frac{2}{3}$		3		
$f(x)$	-	⋮	-	0	+	⋮	+		
$g(x)$	-	0	+	⋮	+	⋮	+		
$h(x)$	+	⋮	+	⋮	+	0	-		
$f(x)g(x)h(x)$	+	0	-	0	+	0	-		
			-1		$\frac{2}{3}$		3		

E a representação gráfica do conjunto solução é a parte em vermelha no quadro, ou seja,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}; -1 < x < \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x > 3 \right\} = \left(-1, \frac{2}{3} \right) \cup (3, +\infty).$$

Se considerarmos a inequação $f(x)g(x) \geq 0$, ela tem por conjunto solução S a reunião do conjunto solução S_1 da inequação $f(x)g(x) > 0$ com o conjunto solução S_2 da equação $f(x)g(x) = 0$, isto é,

$$f(x)g(x) \geq 0 \iff \begin{cases} f(x)g(x) > 0 \\ \text{ou} \\ f(x)g(x) = 0 \end{cases}$$

Inequações quadráticas

Uma **inequação quadrática** definida em $\mathbb{R}$ é uma desigualdade de um dos seguintes tipos

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Note que resolver uma inequação do tipo $ax^2 + bx + c > 0$ (ou qualquer uma das outras) envolve estudar o sinal do polinômio $ax^2 + bx + c$ e ver para quais valores de x o sinal é, por exemplo, positivo. Na prática o que fazemos é resolver a correspondente equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e então determinamos os valores de x para os quais $ax^2 + bx + c$ é positivo, negativo ou zero. Podemos também usar inequações produto, já vistas anteriormente: De fato, se o polinômio $ax^2 + bx + c$ possui raiz real, podemos escrevê-lo da forma $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ e então resolver $ax^2 + bx + c > 0$ é equivalente a resolver a inequação produto $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$.

Exemplo 2.39. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $x^2 - x - 12 > 0$. Consideramos primeiro a equação quadrática correspondente $x^2 - x - 12 = 0$, cujas soluções são $x_1 = -3$ e $x_2 = 4$. Assim $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$ e portanto $x^2 - x - 12 = 0$ se e somente se $x = -3$ ou $x = 4$. Usando inequação produto ou o estudo de sinal de um polinômio, concluímos que

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 &> 0, & \text{se } x > 4 \text{ ou } x < -3 \\ x^2 - x - 12 &< 0, & \text{se } -3 < x < 4 \\ x^2 - x - 12 &= 0, & \text{se } x = 4 \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

Logo o conjunto solução é dado por $S = \{x \in \mathbb{R}; x > 4 \text{ ou } x < -3\} = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$.

No próximo exemplo, a inequação quadrática envolve o símbolo $\leq$. Neste caso, as soluções da equação correspondente também são soluções da inequação.

Exemplo 2.40. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $2x^2 + 3x \leq 20$. Primeiramente vamos somar -20 a ambos os lados da inequação, obtendo

$$2x^2 + 3x - 20 \leq 0$$

Agora resolvemos a equação $2x^2 + 3x - 20 = 0$.

O discriminante é $\Delta = 169$ e as raízes são $x_1 = -4$ e $x_2 = \frac{5}{2}$, logo podemos escrever $2x^2 + 3x - 20 = 2(x + 4)\left(x - \frac{5}{2}\right) = (x + 4)(2x - 5)$. Observe que $x = \frac{5}{2}$ é solução da inequação, pois ao substituirmos ganhamos $0 \leq 0$, que é verdadeiro. O mesmo ocorre para $x = -4$. Além disso, usando inequação produto ou o sinal de um polinômio, concluímos que

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 20 &> 0, & \text{se } x > \frac{5}{2} \text{ ou } x < -4 \\ 2x^2 + 3x - 20 &< 0, & \text{se } -4 < x < \frac{5}{2} \\ 2x^2 + 3x - 20 &= 0, & \text{se } x = -4 \text{ ou } x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Logo o conjunto solução é dado por $S = \left\{x \in \mathbb{R}; -4 \leq x \leq \frac{5}{2}\right\} = \left[-4, \frac{5}{2}\right]$.

Encerramos a parte de inequações quadráticas com dois exemplos, que mostram diferentes tipos de conjunto solução dos que vimos até agora.

Exemplo 2.41. Resolva $x^2 + 4x + 4 \geq 0$. Note que $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ e portanto $x^2 + 4x + 4 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $S = \mathbb{R}$.

Exemplo 2.42. Resolva $x^2 + 2x + 2 < 0$. Neste caso, a equação correspondente é $x^2 + 2x + 2 = 0$, que não possui raiz real, pois $\Delta = -4 < 0$, logo ela não possui solução. Sendo assim, temos $x^2 + 2x + 2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (note que o coeficiente do termo quadrático é positivo) e portanto a inequação não possui solução. Ou seja, $S = \emptyset$.

Além das inequações quadráticas, dentro das inequações produto podemos destacar as do tipo $(f(x))^n$, com n um número inteiro. Para resolver este tipo de inequação, vamos relembrar duas propriedades das potências de base real e expoente inteiro.

1. Toda potência de base real e expoente ímpar conserva o sinal da base: isto é, se n é ímpar, então

$$\begin{cases} a^n > 0 \Leftrightarrow a > 0, \\ a^n = 0 \Leftrightarrow a = 0, \\ a^n < 0 \Leftrightarrow a < 0 \end{cases}$$

2. Toda potência de base real e expoente par é um número real não negativo, isto é, se n é par

$$a^n \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2.43. **(a)** $(3x - 2)^3 > 0 \Rightarrow 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$. Logo o conjunto solução é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x > \frac{2}{3} \right\}$$

(b) $(4x - 2)^8 > 0 \Rightarrow 4x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$. Logo o conjunto solução é $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{1}{2} \right\}$

(c) $(x - 3)^4 < 0 \Rightarrow S = \emptyset$

(d) $(4x - 5)^2 \geq 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$, pois qualquer x real satisfaz a inequação.

(e) $(8 - 2x)^4 \leq 0 \Rightarrow 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{4\}$.

2.7.5 Inequações-quociente

Seendo $f(x)$ e $g(x)$ dois polinômios na variável x , as inequações

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0,$$

são chamadas **inequações-quociente**.

Considerando que as regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogos, podemos construir o quadro quociente, de modo análogo ao quadro produto, observando o fato de que o denominador de uma fração não pode ser nulo.

Exemplo 2.44. Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{3x+4}{1-x} \leq 2$. Trabalhando um pouco na expressão, temos

$$\frac{3x+4}{1-x} \leq 2 \Rightarrow \frac{3x+4}{1-x} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{3x+4-2(1-x)}{1-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{5x+2}{1-x} \leq 0.$$

Fazendo $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = 1 - x$ e montando o quadro quociente, obtemos

		$-\frac{2}{5}$		1	
$f(x)$	—	0	+	⋮	+
$g(x)$	+	⋮	+	0	—
$f(x)/g(x)$	—	0	+	⋮	—
		$-\frac{2}{5}$		1	

Logo $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \leq -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1 \right\}$ é o conjunto solução desta inequação.

Exemplo 2.45. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $\frac{x+5}{3x+2} \leq \frac{x-2}{3x+5}$.

Observe que $\frac{x+5}{3x+2} - \left(\frac{x-2}{3x+5}\right) \leq 0$ é uma inequação equivalente. Simplificando, obtemos

$$\frac{(x+5)(3x+5) - (x-2)(3x+2)}{(3x+2)(3x+5)} \leq 0$$

$$\frac{3x^2 + 20x + 25 - (3x^2 - 4x - 4)}{(3x+2)(3x+5)} \leq 0$$

$$\frac{24x + 29}{(3x+2)(3x+5)} \leq 0.$$

Fazendo $f(x) = 24x + 29$, $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = 3x + 5$ precisamos resolver $\frac{f(x)}{g(x)h(x)} \leq 0$. Podemos montar o quadro quociente (veja abaixo) usando as raízes de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, sempre atentos para os valores que zeram $g(x)$ ou $h(x)$, pois estes zeram também o denominador de $\frac{f(x)}{g(x)h(x)}$. Com isso obtemos que o conjunto solução é dado por

$$S = \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup \left[-\frac{29}{24}, -\frac{2}{3}\right).$$

		$-\frac{5}{3}$	$-\frac{29}{24}$	$-\frac{2}{3}$	
$f(x) = 24x + 29$	—	—	+	+	
$g(x) = 3x + 2$	—	—	—	+	
$h(x) = 3x + 5$	—	+	+	+	
$\frac{f(x)}{g(x)h(x)}$	—	+	—	+	
		$-\frac{5}{3}$	$-\frac{29}{24}$	$-\frac{2}{3}$	

2.7.6 Inequações envolvendo módulo

Vejamos o que acontece com um caso simples, a inequação modular $|x| < 3$:

Usando a definição de módulo temos $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Ou seja,

temos duas possibilidades:

$$x \geq 0 \Rightarrow x = |x| < 3$$

ou

$$x < 0 \Rightarrow -x = |x| < 3 \Rightarrow x > -3.$$

Juntando as duas informações, podemos escrever a solução em uma desigualdade dupla:

$$-3 < x < 3.$$

Note que o valor 3 poderia ser substituído por qualquer outro número positivo e que a expressão x poderia ser substituída por qualquer outra expressão algébrica em x . Com isso temos o seguinte resultado:

Proposição 2.46. *Seja u uma expressão algébrica em x e a um número real com $a \geq 0$. Se $|u| < a$ então u está no intervalo $(-a, a)$, isto é,*

$$|u| < a \iff -a < u < a$$

Analogamente, $|u| \leq a \iff -a \leq u \leq a$.

Agora estudemos a inequação $|x| > 1$. Novamente temos duas possibilidades:

$$x \geq 0 \Rightarrow x = |x| > 1$$

ou

$$x < 0 \Rightarrow -x = |x| > 1 \Rightarrow x < -1.$$

Portanto, se $|x| > 1$, concluímos que $x > 1$ ou $x < -1$, ou seja, a solução é $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. (Aqui usamos a união pois queremos que os valores de x satisfaçam a primeira propriedade **OU** a segunda.) Este exemplo também pode ser generalizado:

Proposição 2.47. *Seja u uma expressão algébrica em x e a um número real com $a \geq 0$. Se $|u| > a$ então u está ou no intervalo $(-\infty, -a)$ ou no intervalo $(a, +\infty)$. Isto é,*

$$|u| > a \iff u < -a \text{ ou } u > a$$

Analogamente, $|u| \geq a \iff u \leq -a \text{ ou } u \geq a$.

Exemplo 2.48. Resolva $|x - 4| < 8$.

Pela Proposição 2.46, temos

$$|x - 4| < 8 \iff -8 < x - 4 < 8 \iff -8 + 4 < x - 4 + 4 < 8 + 4.$$

e portanto $-4 < x < 12$. O conjunto solução é $S = (-4, 12)$.

Exemplo 2.49. $|3x - 2| \geq 5$.

Pela Proposição 2.47,

$$|3x - 2| \geq 5 \iff 3x - 2 \leq -5 \text{ ou } 3x - 2 \geq 5.$$

Assim precisamos resolver duas inequações e fazer a união dos conjuntos soluções.

$$\begin{array}{lll} 3x - 2 \leq -5 & \text{ou} & 3x - 2 \geq 5 \\ 3x \leq -3 & \text{ou} & 3x \geq 7 \\ x \leq -1 & \text{ou} & x \geq \frac{7}{3} \end{array}$$

E a solução é dada por $S = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{7}{3}, +\infty\right)$.

2.7.7 Inequações irracionais

Uma inequação irracional é aquela que há incógnita sob um ou mais radicais. Por exemplo,

$$\sqrt{x+2} > 3, \quad \sqrt{x^2-3x+4} > x, \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} > 2.$$

Observamos, inicialmente que, se a e b são números reais **não negativos** então

$$a > b \iff a^2 > b^2 \quad \text{e} \quad a < b \iff a^2 < b^2.$$

Assim são verdadeiras as implicações

$$\begin{array}{l} 2 < 5 \Rightarrow 4 < 25 \\ \sqrt{3} > \sqrt{2} \Rightarrow 3 > 2 \\ 4 < 9 \Rightarrow 2 < 3 \end{array}$$

mas são **falsas** as implicações

$$-3 < -2 \Rightarrow 9 < 4$$

$$2 > -5 \Rightarrow 4 > 25$$

$$2 > -3 \Rightarrow 4 > 9$$

Ou seja, as coisas parecem não funcionar muito bem aqui. Vejamos um resultado que nos ajudará a resolver as inequações irracionais.

Teorema 2.50. *Se $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ em um conjunto de valores x pertencentes a $A \subset \mathbb{R}$, então são equivalentes as inequações $f(x) > g(x)$ e $[f(x)]^2 > [g(x)]^2$*

Inequações do tipo $\sqrt{f(x)} < g(x)$:

Para inequações deste tipo, resolvemos em dois passos. Primeiro estabelecemos o domínio de validade, isto é,

$$f(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad g(x) > 0 \tag{2.7.3}$$

Depois elevamos ao quadrado e resolvemos

$$f(x) < [g(x)]^2 \tag{2.7.4}$$

As condições (2.7.3) e (2.7.4) podem ser agrupadas da seguinte forma

$$0 \leq f(x) < [g(x)]^2 \quad \text{e} \quad g(x) > 0$$

Esquemáticamente, temos

$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < [g(x)]^2 \quad \text{e} \quad g(x) > 0$

Analogamente, podemos estabelecer para a inequação $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ o seguinte esquema

$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq [g(x)]^2 \quad \text{e} \quad g(x) \geq 0$
--

Exemplo 2.51. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações

$$(a) \sqrt{x^2 - 3x} < 2 \qquad (b) \sqrt{2x + 5} \leq x + 1$$

(a) A condição de existência é:

$$(I) \ x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow x(x - 3) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ e } x \geq 3 \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \text{ e } x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Por outro lado, elevando a inequação ao quadrado temos que

$$\sqrt{x^2 - 3x} < 2 \Rightarrow x^2 - 3x < 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) < 0.$$

Usando as técnicas de inequação-produto, segue que

$$(II) \ -1 < x < 4.$$

Assim fazendo a interseção das condições (I) e (II) obtemos o conjunto solução

$$S = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 0 \text{ ou } 3 \leq x < 4\}.$$

(b) Temos que

$$\sqrt{2x + 5} < x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 2x + 5 \text{ (Cond.Existência)} \\ x + 1 \geq 0 \text{ (Cond.Existência)} \\ 2x + 5 \leq (x + 1)^2 \text{ (Elevar ao quadrado)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ e \\ 2x + 5 \geq 0 \\ e \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \quad (I) \\ e \\ x \geq -5/2 \quad (II) \\ e \\ x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \quad (III) \end{cases}$$

Fazendo a interseção das condições (I), (II) e (III) obtemos o conjunto solução

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\}$$

Inequações do tipo $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Observe primeiramente que se $g(x) < 0$ e $f(x) \geq 0$ então a inequação $\sqrt{f(x)} > g(x)$ está automaticamente satisfeita. Assim sendo, o primeiro caso a ser considerado é este: $g(x) < 0$ e $f(x) \geq 0$.

Depois, estabelecemos o domínio de validade da inequação para o outro caso, isto é, quando $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$. Neste caso a inequação proposta é equivalente a resolver

$$f(x) > [g(x)]^2$$

Esquemáticamente, temos

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{e} & g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ f(x) > [g(x)]^2 & \text{e} & g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Analogamente para a inequação $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$, temos

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{e} & g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ f(x) \geq [g(x)]^2 & \text{e} & g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo 2.52. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações

(a) $\sqrt{3x-5} \geq 2$

(b) $\sqrt{3x^2-7x+2} > -4$

(c) $\sqrt{2x-1} > x-2$

(a) Observe que aqui temos $f(x) = 3x-5$ e $g(x) = 2$ que é sempre maior que zero. Logo a inequação é verdadeira se $3x-5 \geq 4$, ou seja, para $x \geq 3$. Portanto o conjunto solução é dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 3\}$$

(b) Neste caso, $g(x) = -4 < 0$ e portanto basta resolvermos $3x^2 - 7x + 2 \geq 0$, que nos dá a solução $x < 1/3$ ou $x > 2$. Assim

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > 2 \right\}$$

(c) Aqui temos $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = x - 2$. Assim

$$\sqrt{2x-1} > x-2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 & e & x-2 < 0 & (I) \\ \text{ou} \\ 2x-1 > (x-2)^2 & e & x-2 \geq 0 & (II) \end{cases}$$

$$(I) \quad 2x-1 \geq 0 \quad e \quad x-2 < 0 \Rightarrow x \geq 1/2 \quad e \quad x < 2 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right)$$

$$(II) \quad \begin{cases} 2x-1 > (x-2)^2 \\ e \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+5 < 0 \\ e \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (1, 5) \\ e \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [2, 5)$$

Sendo assim o conjunto solução é dado por

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right) \cup [2, 5) \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{1}{2} \leq x < 5 \right\}$$

Inequações do tipo $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

Apesar de parecer ser o caso mais complicado, é o caso mais fácil de resolver. Primeiro estabelecemos o domínio de validade da inequação, isto é, quando $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$. Depois elevamos ao quadrado obtendo a inequação $f(x) > g(x)$. Assim temos uma inequação do tipo

$$f(x) > g(x) \geq 0$$

Esquematicamente,

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x) \geq 0$$

De modo análogo, para a inequação $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$ temos

$$\boxed{\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x) \geq 0}$$

Exemplo 2.53. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\sqrt{2x^2 - x - 1} > \sqrt{x^2 - 4x + 3}$. Observe que

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - x - 1} > \sqrt{x^2 - 4x + 3} &\Rightarrow 2x^2 - x - 1 > x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 > x^2 - 4x + 3 \\ e \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 & (I) \\ e \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 & (II) \end{cases} \end{aligned}$$

(I) As raízes da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$ são $x_1 = -4$ e $x_2 = 1$, logo $x^2 + 3x - 4 > 0$ se $x < -4$ ou se $x > 1$.

(II) As raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$, logo $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ se $x \leq 1$ ou se $x \geq 3$.

Unindo essas informações concluímos que o conjunto solução é dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x < -4 \text{ ou } x \geq 3\}.$$

Funções

Semana 6

O objeto fundamental do cálculo é a **classe das funções**, que aparecem quando uma determinada quantidade depende de outra (ou outras). Por exemplo: a área A de um círculo depende de seu raio r e a lei que relaciona r com A é dada por $A = \pi r^2$. Neste caso dizemos que A é **uma função de r** . Outros exemplos são: a população P de uma determinada espécie que depende do tempo t , o custo C de envio de um pacote pelo correio que depende de seu peso w .

Uma função é uma regra. Para falarmos de uma função precisamos dar a ela um nome e por isso usamos letras minúsculas para representá-las, como $f, g, h, \dots$. Por exemplo, podemos usar a letra f para representar uma regra como segue:

“ f ” é a regra “eleve ao quadrado”

Quando escrevemos $f(2)$, queremos dizer “aplique a regra f ao número 2”. Aplicando a regra acima, temos

$$f(2) = 2^2 = 4, \quad f(3) = 3^2 = 9, \quad f(-1) = (-1)^2 = 1,$$

e mais geralmente, $f(x) = x^2$.

3.1 Noções gerais

Definição 3.1. Dados dois conjuntos $A, B \neq \emptyset$ uma **função** f de A em B , que escrevemos $f : A \rightarrow B$, é uma lei ou regra que associa a cada $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$.

- (i) A é chamado **domínio** de f e B é chamado **contradomínio** de f ,
- (ii) o conjunto $\text{Im}(f) = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$ é chamado **imagem** de f .
- (iii) Para indicar que y vem de uma função que atua sobre x , usamos $y = f(x)$. Aqui x é chamada a **variável dependente** e y é chamada a **variável independente**.

Notações alternativas. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Podemos denotar:

$D_f = D(f) = A$ para o domínio de f ;

$f(D_f) = \text{Im}(f)$ para a imagem de f ;

$CD(f)$ para o contradomínio de f .

Também podemos descrever a ação de f ponto a ponto como $x \in A \mapsto f(x) \in B$.

Convenção: Usualmente consideramos A e B como subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se o domínio de uma função real de uma variável real f não é dado explicitamente então, por convenção, adotamos como domínio o conjunto de todos os números reais x para os quais $f(x)$ é um número real.

Pode ser útil você pensar que uma função é uma máquina: Se x está no domínio de f , então quando x entra na máquina ele é visto como uma entrada e a máquina produz uma saída $f(x)$, de acordo com a lei da função. Portanto podemos pensar no domínio como o conjunto de todas as possíveis entradas e a imagem como o conjunto de todas as possíveis saídas. A figura abaixo ilustra essa interpretação.

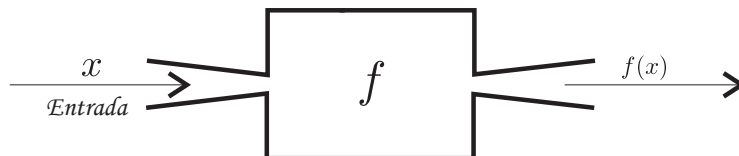
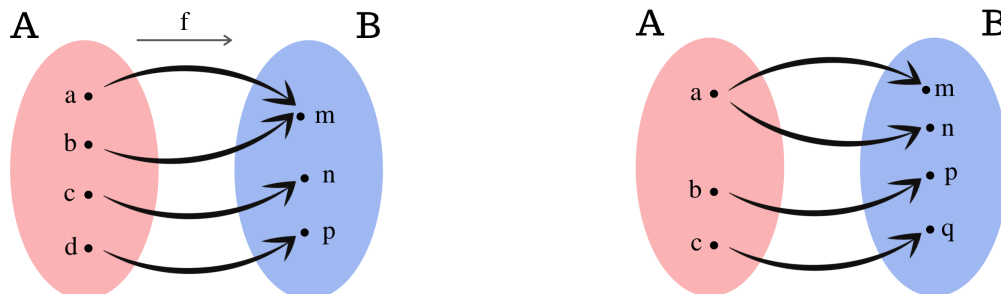


Figura representando uma função como uma máquina.

Uma maneira tradicional de visualizar funções é através de diagramas. As setas associam entradas em A às saídas em B .



Como cada elemento do domínio pode ser associado a apenas um elemento do contradomínio, na imagem acima temos dois casos: o primeiro é uma função de A em B e o segundo caso não, pois neste último o ponto a é associado a mais de um ponto do contradomínio.

Exemplo 3.2. Uma função f é definida pela fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

(a) *Expresse em palavras como f age em uma entrada x para produzir uma saída $f(x)$.*

(b) *Calcule $f(3)$, $f(-2)$ e $f(\sqrt{5})$.*

(c) *Encontre o domínio e a imagem de f .*

(a) *A fórmula nos diz que primeiro elevamos a entrada x ao quadrado e depois adicionamos 4 ao resultado. Assim, f é a função*

“eleve ao quadrado, depois adicione 4”

(b) *Os valores de f são encontrados substituindo x na fórmula $f(x) = x^2 + 4$. Assim,*

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13, \quad f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8, \quad f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9$$

(c) *O domínio de f consiste de todas as possíveis entradas x . Como podemos avaliar a fórmula $f(x) = x^2 + 4$ para todos os números reais, o domínio de f é $\mathbb{R}$. A imagem de f consiste de todas as possíveis saídas. Como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $x^2 + 4 \geq 4$. Logo toda saída de f satisfaz $f(x) \geq 4$. Portanto a imagem de f é o conjunto*

$$\{y \in \mathbb{R}; y \geq 4\} = [4, +\infty).$$

Exemplo 3.3. Se $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ e a, h são números reais com $h \neq 0$, calcule

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Note que $f(a+h) = 2(a+h)^2 + 3(a+h) - 1 = 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1 - (2a^2 + 3a - 1)}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

Observação 3.4 (Função definida por partes). Uma função pode ter uma lei de formação diferente para “partes” (subconjuntos) distintas de seu domínio. Por exemplo:

Definição 3.5. Uma **tabela de valores** para uma função é uma tabela com duas colunas: uma para as entradas e outra para as saídas. Ela nos ajuda a analisar uma função numericamente.

Exemplo 3.6. A área de um quadrado de base x é dada pela função $f(x) = x^2$. Assim podemos montar a seguinte tabela

x	$f(x)$
1	1
2	4
3	9
4	16

Observação 3.7. A unicidade do valor da imagem é muito importante para estudarmos o seu comportamento. Saber que $f(2) = 8$ e posteriormente verificar que $f(2) = 4$ é uma contradição. O que acontece é que jamais teremos uma função definida por uma fórmula ambígua, como por exemplo $f(x) = 3x \pm 2$. Em resumo, não esqueça: **cada elemento do domínio é levado pela função em apenas um elemento do contradomínio.**

Exemplo 3.8. A fórmula $y = x^2$ define y como função de x ? E x como função de y ? Podemos escrever $y = f(x)$, com $f(x) = x^2$. Como elevar ao quadrado não causa ambiguidades, y é uma função de x . Entretanto, se tentamos ver x como função de y , já não é possível: de fato, $y = x^2$ implica que $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$, o que causa ambiguidade. Logo, x não é uma função de y .

3.2 Domínio e Imagem

Uma função pode ser definida algebricamente por meio da lei em termos da variável x no domínio. A regra, no entanto, não nos fornece todas as informações sem que seja definido o domínio. Por exemplo, podemos definir o volume de uma esfera como uma função de seu raio, pela fórmula

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Essa fórmula está definida para todos os números reais, mas a função volume não está bem definida para valores negativos de r . Assim, se a nossa intenção é estudar a função volume, podemos restringir o domínio para todo $r \geq 0$.

Exemplo 3.9. Encontre o domínio de cada função abaixo

(a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

A raiz quadrada só está definida para números não negativos. Logo precisamos ter $x+3 \geq 0$ e portanto temos

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -3\} = [-3, +\infty).$$

(b) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$

Aqui temos, além da raiz quadrada, um denominador que não pode ser nulo. Assim

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}; x \neq 5\} = [0, 5) \cup (5, +\infty).$$

(c) $A(s) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$, sendo $A(s)$ a área de um triângulo equilátero com lados de comprimento s .

Como o comprimento é sempre um número não negativo, temos

$$D_A = \{s \in \mathbb{R}; s \geq 0\} = [0, +\infty).$$

Encontrar a imagem de uma função $y = f(x)$ é muitas vezes mais árduo que encontrar o seu domínio. Para encontrar o domínio, olhamos para os valores no eixo das abscissas (eixo horizontal x), que são as primeiras coordenadas dos pontos do gráfico. Para encontrar a imagem, olhamos para os valores no eixo vertical y , que são as segundas coordenadas dos pontos do gráfico.

Exemplo 3.10. Encontre a imagem da função $f(x) = \frac{2}{x}$.

Intuitivamente fazemos o seguinte raciocínio: quanto **maior** for o valor de x , **menor** será o

valor de $f(x)$ (se não está convencido, faça alguns testes na calculadora e veja o que acontece quando o valor de x é cada vez maior). Mas por menor que seja o valor de $\frac{2}{x}$, esta fração nunca chegará a ser zero. De fato, veja que:

$$\frac{2}{x} = 0 \iff 2 = 0 \cdot x \iff 2 = 0,$$

que não pode ser verdade.

A conclusão é que $y = 0$ não pertence a imagem de f . De fato, dizer que $y \in \text{Im}(f)$ é equivalente a dizer existe x tal que $x \neq 0$ e $\frac{2}{x} = y$ e vimos acima que essa igualdade não é verdadeira para $y = 0$.

Por outro lado, seja k um número real diferente de zero. Então $k \in \text{Im}(f)$ se e somente se existe $x \neq 0$ tal que $\frac{2}{x} = k$. Ou seja, precisamos resolver em x a equação $\frac{2}{x} = k$. Facilmente “isolamos” o x e obtemos a solução $x = \frac{2}{k}$.

Concluimos que se $k \neq 0$, temos

$$f\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{2}{\frac{2}{k}} = 2 \cdot \frac{k}{2} = k.$$

Ou seja, qualquer $k \neq 0$ pertence à imagem de f . Portanto a imagem de f é dada por

$$\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\} = \mathbb{R}^*.$$

3.3 Operações com funções

Igualdade de funções

Dadas duas funções f e g , com $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$, dizemos que f e g são iguais se, e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplo 3.11. (a) As funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ são iguais, pois para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $\sqrt{x^2} = |x|$.

(b) As funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ não são iguais, pois para $x < 0$ temos $x \neq |x|$.

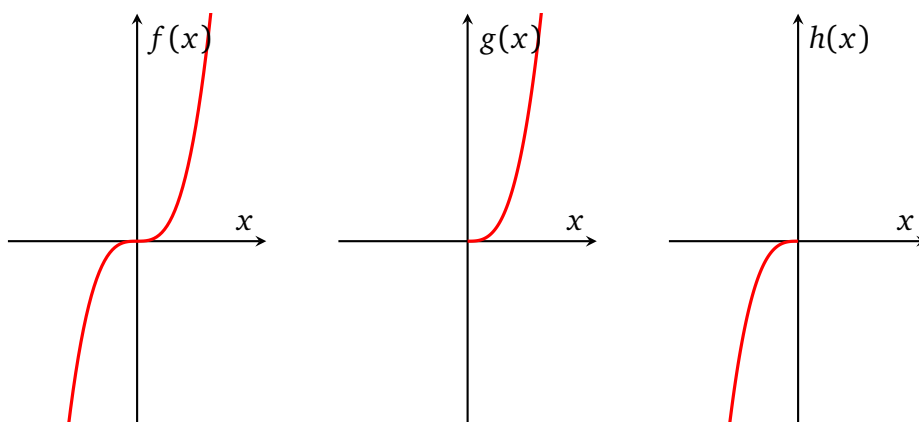
Observação 3.12. Uma função é composta de uma regra juntamente com seu domínio e contradomínio. Não confunda a regra que define a função com a função em si. Por exemplo,

considere as funções

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3; \quad g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3;$$

$$h : (-\infty, 0) \rightarrow (-\infty, 0), h(x) = x^3.$$

Estas três funções possuem a mesma regra de definição, mas são funções diferentes (há diferença no domínio e/ou contradomínio). Veja cada um de seus gráficos:



Soma, diferença, produto e quociente de funções

Duas funções podem ser combinadas na forma de novas funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g . Isso é feito termo a termo. Por exemplo, para cada x que esteja simultaneamente no domínio de f e g , podemos calcular

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

De maneira análoga definimos as outras operações. A única sutileza é que no caso do quociente f/g não podemos definir esta função para as entradas em que $g(x) = 0$.

Definição 3.13. Sejam f e g funções. Então $f + g$, $f - g$, fg e f/g são definidas por:

$$\begin{array}{l|l} (f + g)(x) = f(x) + g(x) & D(f + g) = D(f) \cap D(g) \\ (f - g)(x) = f(x) - g(x) & D(f - g) = D(f) \cap D(g) \\ (fg)(x) = f(x)g(x) & D(fg) = D(f) \cap D(g) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} & D(f/g) = \{x \in D(f) \cap D(g) / g(x) \neq 0\} \end{array}$$

Exemplo 3.14. Sejam $f(x) = \frac{1}{x-2}$ e $g(x) = \sqrt{x}$.
Então $D(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 2\}$ (pois o denominador $x-2$ não pode ser nulo) e $D(g) = [0, +\infty)$ (devido ao radical). Portanto:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}, & D(f+g) &= \{x \in \mathbb{R}/x \neq 2 \text{ e } x \geq 0\} \\(f-g)(x) &= f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x}, & D(f-g) &= \{x \in \mathbb{R}/x \neq 2 \text{ e } x \geq 0\} \\(fg)(x) &= f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}, & D(fg) &= \{x \in \mathbb{R}/x \neq 2 \text{ e } x \geq 0\} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x-2}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(x-2)}, & D(f/g) &= \{x \in \mathbb{R}/x \neq 2 \text{ e } x > 0\}\end{aligned}$$

Composição de funções

Outra maneira de combinar duas ou mais funções é definida através de uma aplicação sucessiva destas funções.

Por exemplo, imagine que você quer comprar um item que está com 10% de desconto e ainda tem um voucher de desconto de cinco reais na loja. Note que temos duas funções envolvidas:

- $g(x) = 0,9x$, que calcula o desconto de 10% no valor x ;
- $f(x) = x - 5$, que calcula o desconto do voucher de cinco reais no valor da compra.

Na hora de calcular o valor final, temos que aplicar uma função na outra. Ou seja, primeiramente calculamos o valor com 10% de desconto através da g e em seguida aplicamos o desconto da função f , deste modo:

$$f(g(x)) = g(x) - 5 = 0,9x - 5.$$

Portanto a nova função $h(x) = 0,9x - 5$ calcula o valor final a ser pago (em função do valor inicial do produto dado por x). Esta função h é chamada função composta de f com g .

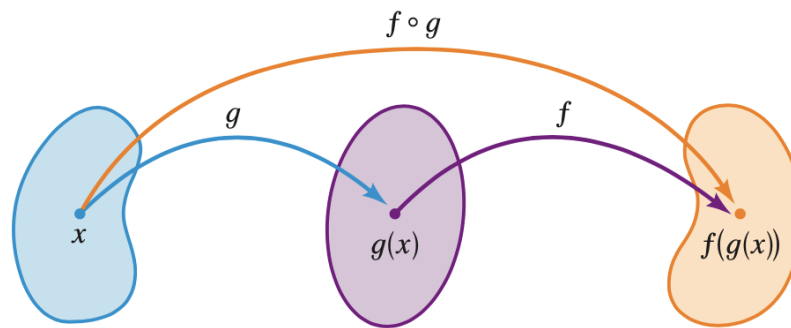
De maneira geral, temos:

Definição 3.15. Sejam $g : A \rightarrow B$ e $f : C \rightarrow D$ funções de modo que $B \subset C$. Então definimos a **função composta** $f \circ g : A \rightarrow D$ dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Observação 3.16. Note que na definição acima escolhemos $B \subset C$ para garantir que os valores $g(x)$ possam ser avaliados pela função f , ou seja, que $g(x) \in D(f)$.

Abaixo temos uma representação visual da composição através de diagramas:

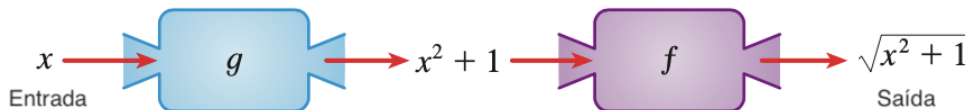


Fonte: Stewart et all. Precalculus. 7th edition (2015).

Exemplo 3.17. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 1$. Primeiramente notamos que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto $g(x) \in D(f)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, está bem definida a função composta em $\mathbb{R}$ e ela é dada por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Observação 3.18. Podemos visualizar a função composta usando aquela ideia de função como uma máquina. Neste caso temos duas máquinas (f e g). Veja a ilustração no caso do exemplo anterior:



Fonte: Stewart et all. Precalculus. 7th edition (2015).

Observação 3.19. A mesma ideia pode ser usada para definir composição de três ou mais funções.

Exemplo 3.20. Sejam $f(x) = \frac{x}{x^{10} + 1}$, $g(x) = 2x + 3$ e $h(x) = x^3$. Então

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(2x^3 + 3) = \frac{2x^3 + 3}{(2x^3 + 3)^{10} + 1}.$$

Note que a composição está bem definida, isto é, os domínios e imagens estão “encaixados” de modo a não ter inconsistências.

Exemplo 3.21 (Reconhecer a composição de funções). A função $F(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3}$ pode ser

decomposta através de funções mais simples, a saber:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = x + 3, \quad h(x) = x^2.$$

Ou seja, $F = f \circ g \circ h$.

Semana 7

3.4 O gráfico de uma função

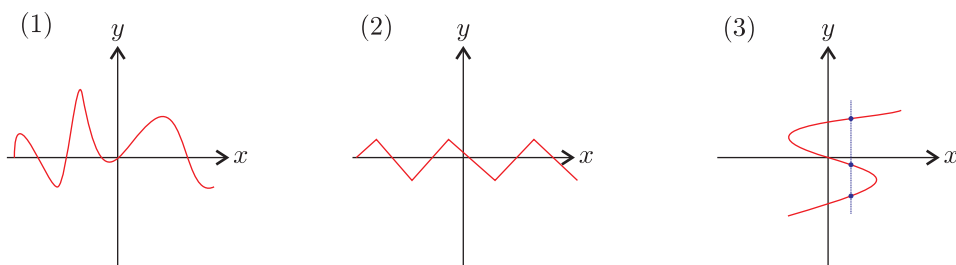
Definição 3.22. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \rightarrow B$ uma função. O conjunto

$$G(f) = G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times B$$

é chamado **gráfico** de f .

Decorre da definição acima que $G(f)$ é o lugar geométrico descrito pelos pontos da forma $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, quando x percorre D_f . Quando $y = f(x)$ define uma função de x , podemos visualizar os valores do domínio sobre o eixo horizontal x , como também os valores da imagem sobre o eixo vertical y , tomando como referência os pares ordenados (x, y) do gráfico de $y = f(x)$.

Exemplo 3.23. Considere os três gráficos abaixo. Qual deles não representa y como uma função de x ?



Observe que o gráfico (3) não representa o gráfico de uma função $y = f(x)$. De fato, para um determinado valor de x , podemos traçar uma linha vertical (desenhada em azul no gráfico (3)) e ver que existem três pontos com a mesma coordenada, de modo que não existe um único valor de y para esse x . Os outros dois gráficos não apresentam este problema.

Teste da linha vertical: Um gráfico (conjunto de pontos (x, y)) no plano cartesiano define y como uma função de x se, e somente se, nenhuma linha vertical cruza o gráfico em mais de um ponto.

3.5 Transformações de funções

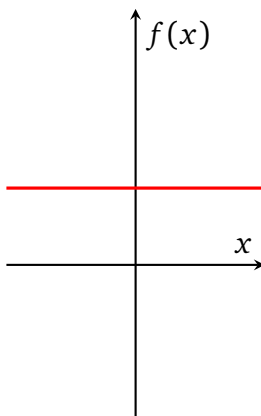
Em breve.

Funções elementares

Semana 8

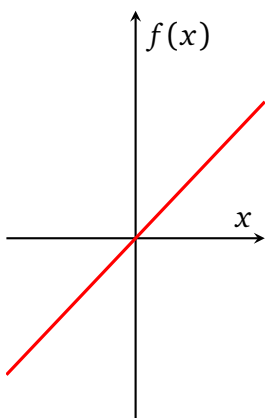
4.1 Função constante

Uma aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ recebe o nome de **função constante** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$. Isto é, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$. O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo dos x passando pelo ponto $(0, c)$. A imagem é o conjunto $\text{Im}(f) = \{c\}$.



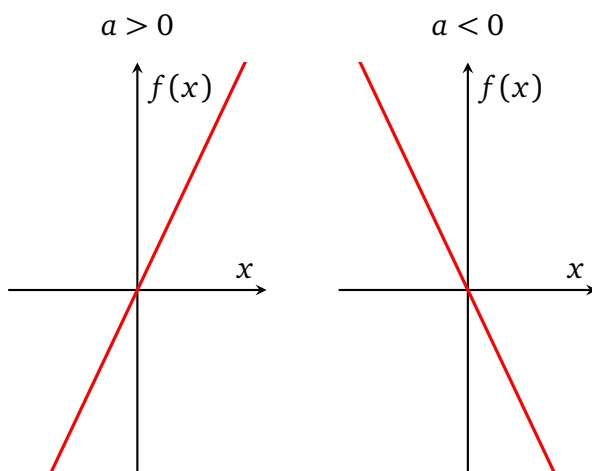
4.2 Função identidade

Uma aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ recebe o nome de **função identidade** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x . Isto é, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes. A imagem é o conjunto $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

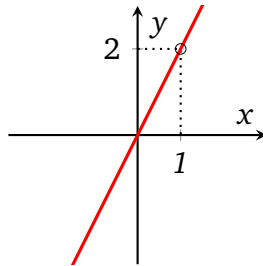


4.2.1 Função linear

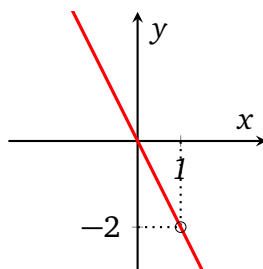
Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **linear** quando a cada $x \in \mathbb{R}$ ela associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ um número real dado. Isto é, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. A imagem é o conjunto $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ e o gráfico é uma reta passando pelo 1º e 3º quadrantes se $a > 0$ e passando pelo 2º e 4º quadrantes se $a < 0$.



Exemplo 4.1. Construir o gráfico da função $y = 2x$. Lembremos que dois pontos distintos determinam uma única reta e portanto na função linear só precisamos analisar a função para dois valores diferentes de x . Note que $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$ e portanto o gráfico é



Exemplo 4.2. Construir o gráfico da função $y = -2x$. Analogamente, $f(0) = 0$ e $f(1) = -2$ e então o gráfico da função é



4.2.2 Função afim

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ recebe o nome de **função afim** quando a cada $x \in \mathbb{R}$ estiver associado o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Isto é,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, \quad a \neq 0.$$

O conjunto imagem desta função é $\mathbb{R}$. De fato, dado $y_0 \in \mathbb{R}$, existe $x_0 = \frac{y_0 - b}{a}$ tal que

$$f(x_0) = f\left(\frac{y_0 - b}{a}\right) = a\left(\frac{y_0 - b}{a}\right) + b = y_0 - b + b = y_0.$$

Exemplo 4.3. 1) $y = 3x + 2$, onde $a = 3$ e $b = 2$

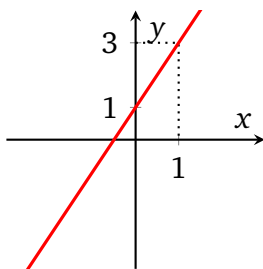
2) $y = -2x + 1$, onde $a = -2$ e $b = 1$

3) $y = -x$, onde $a = -1$ e $b = 0$

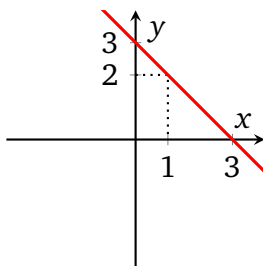
Note que para $b = 0$ a função afim $y = ax + b$ se transforma na função linear $y = ax$. Podemos dizer então que a função linear é um caso particular da função afim.

O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) é uma reta. Não vamos demonstrar essa propriedade, mas construiremos alguns exemplos. Será útil lembrar que **dois pontos distintos determinam uma única reta**. Ou seja, na prática, basta encontrar dois pontos do tipo $(x, f(x))$ que pertencem ao gráfico da função e traçar a reta que passa por eles. Muitas vezes é útil também identificar onde a reta corta o eixo x (quando $y = 0$) e onde corta o eixo y (quando $x = 0$).

Exemplo 4.4. Construir o gráfico da função $y = 2x + 1$. Analisamos a função em dois valores diferentes de x . Note que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Além disso, se $x = -1/2$ então $y = 0$, ou seja, a reta cruza o eixo x quando $y = 0$.



Exemplo 4.5. Construir o gráfico da função $y = -x + 3$. Analogamente, temos $f(0) = 3$ e $f(1) = 2$. Além disso, $f(3) = 0$. Assim o gráfico é dado por



Coeficiente angular

Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim, o coeficiente a é chamado **coeficiente angular** ou **taxa de variação** da reta representada no plano cartesiano.

Zero da função afim

Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Chamamos de **zero** da função a todo número $x_0 \in D_f$ cuja imagem é nula, isto é, $f(x_0) = 0$.

$$x_0 \text{ é zero de } y = f(x) \iff f(x_0) = 0$$

4.3 Função quadrática

Uma aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ recebe o nome de **função quadrática** ou **função do 2º grau** quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$. Isto é,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

Exemplo 4.6. 1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, onde $a = 1$, $b = 2$ e $c = 2$

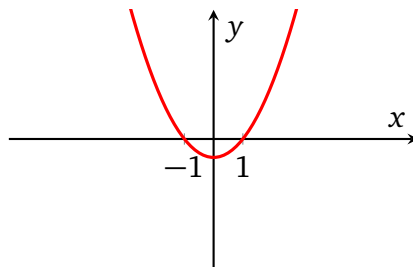
2) $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 4x + \sqrt{\pi}$, onde $a = \sqrt{2}$, $b = -4$ e $c = \sqrt{\pi}$

3) $f(x) = -3x^2 + 5x - 10$, onde $a = -3$, $b = 5$ e $c = -10$

Proposição 4.7. O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Podemos ver isso usando a tabela de valores, ou pelo menos ganhar intuição de que realmente é verdade. A demonstração formal é feita, em geral, no curso de Geometria Analítica.

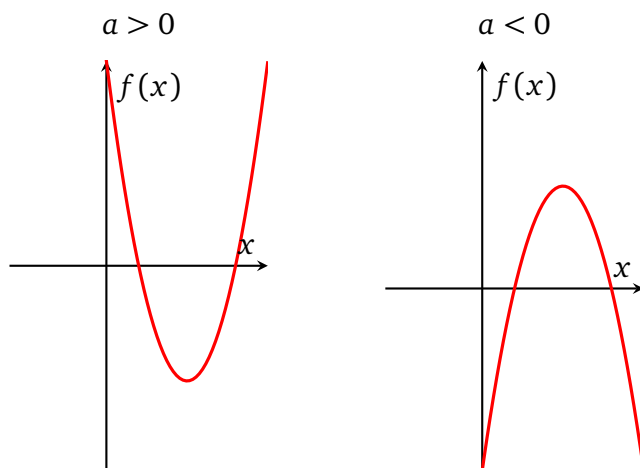
Exemplo 4.8. Construir o gráfico da função $y = x^2 - 1$. Note que $f(-1) = f(1) = 0$, isto é, a parábola cruza o eixo x em dois pontos: -1 e 1 . Além disso, $f(0) = -1$ e portanto a parábola cruza o eixo y em -1 . Resumindo, os pontos do plano cartesiano $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, -1)$ pertencem ao gráfico da função. Além disso, podemos ver, por exemplo, que $f(-3) = f(3) = 8$ e $f(-2) = f(2) = 3$.



Concavidade:

A parábola representativa da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para cima ou voltada para baixo, dependendo do sinal de a : de fato, se $a > 0$, a

concavidade da parábola está voltada para cima e se $a < 0$ a parábola é côncava para baixo.



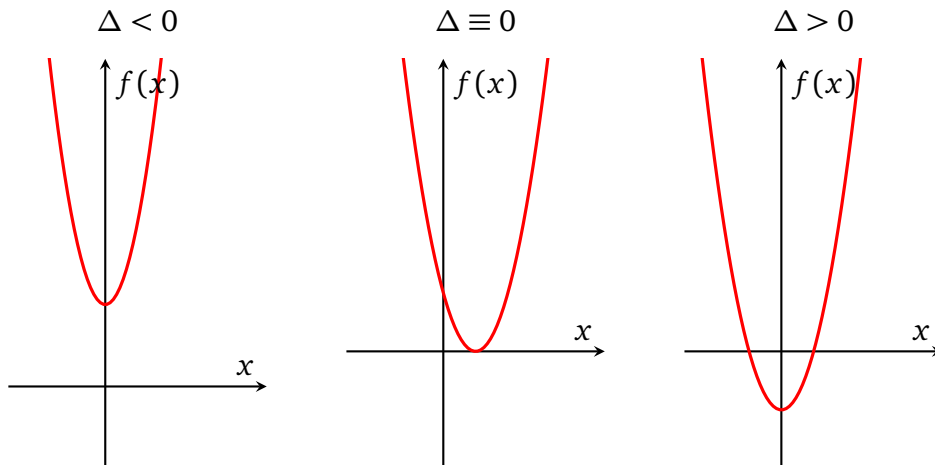
Zeros da função:

Os zeros, ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores reais de x tais que $f(x) = 0$, e portanto são as soluções da equação de segundo grau

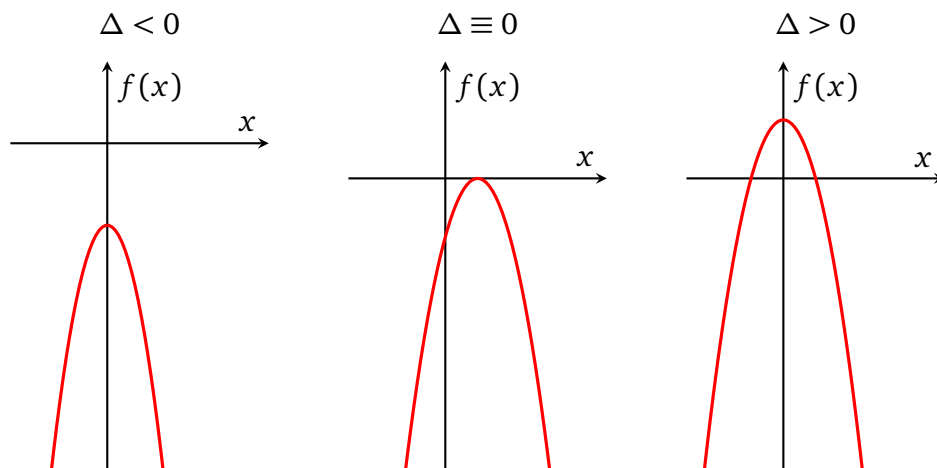
$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Interpretando geometricamente, dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos x . Assim, se $\Delta = b^2 - 4ac$, temos os possíveis gráficos

$$a > 0$$



$$a < 0$$

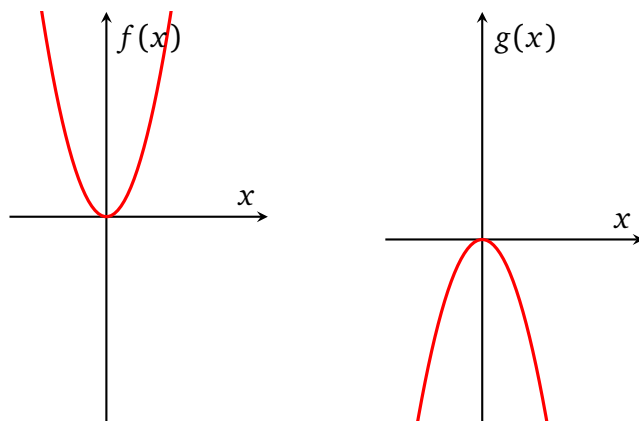


Máximo e mínimo

Definição 4.9. Dizemos que o número $y_M \in \text{Im}(f)$ é o **valor de máximo** da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ para qualquer $y \in \text{Im}(f)$. Neste caso, o valor de $x_M \in D_f$ tal que $f(x_M) = y_M$ é chamado **ponto de máximo** da função.

Definição 4.10. Dizemos que o número $y_m \in \text{Im}(f)$ é o **valor de mínimo** da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leq y$ para qualquer $y \in \text{Im}(f)$. Neste caso, o valor de $x_m \in D_f$ tal que $f(x_m) = y_m$ é chamado **ponto de mínimo** da função.

Exemplo 4.11. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$. Então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $y_m = 0$ é valor de mínimo e $x_m = 0$ é ponto de mínimo da função f . Além disso, $g(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $y_M = 0$ é valor de máximo e $x_M = 0$ é ponto de máximo da função g .



Teorema 4.12. A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite um valor máximo $y = -\frac{\Delta}{4a}$ em $x = -\frac{b}{2a}$ se, e somente se, $a < 0$.

Teorema 4.13. A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite um valor mínimo $y = -\frac{\Delta}{4a}$ em $x = -\frac{b}{2a}$ se, e somente se, $a > 0$.

Em ambos os teoremas acima, o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado **vértice** da parábola.

Semana 9

4.4 Funções injetivas e suas inversas

Consideremos as funções reais $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.

É fácil perceber que $f(-1) = f(1)$, pois $f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1)$. Ou seja, este exemplo ilustra que há **elementos distintos** no domínio de f tais que suas **imagens são iguais**. Já para a função g isto não acontece. Para quaisquer dois elementos distintos do domínio, digamos x e y reais com $x \neq y$, temos $g(x) = x$ e $g(y) = y$ e portanto $g(x) \neq g(y)$. Ou seja, para a função g , **elementos distintos** tem **imagens distintas**.

Esta característica da função g é importante e dá uma classificação especial: a de função injetiva.

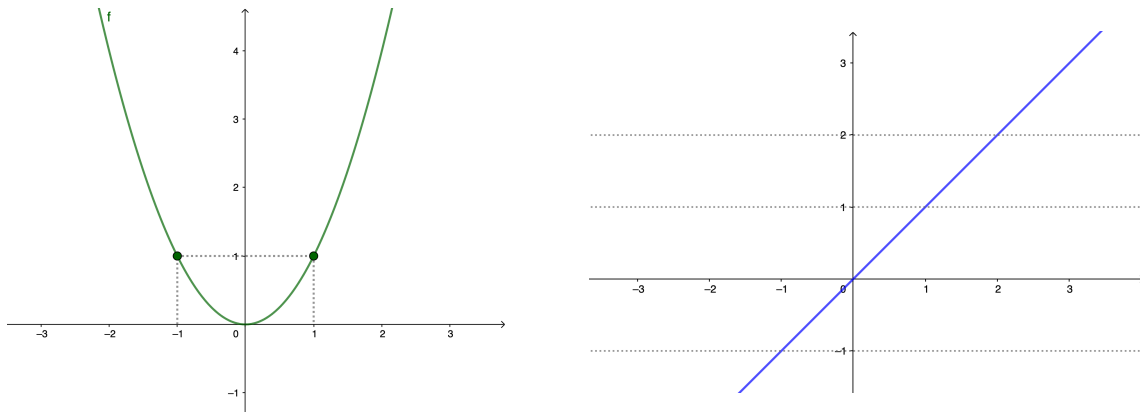
Definição 4.14. Uma **função** f de domínio D é dita **injetiva** (ou “injetora”, ou “um-a-um”) quando elementos distintos de D possuem imagens distintas. Isto é:

$$\text{se } x \neq y, \text{ então } f(x) \neq f(y).$$

Uma maneira equivalente e muitas vezes útil de definir função injetiva é esta:

$$\text{se } f(x) = f(y), \text{ então } x = y. \quad (4.4.1)$$

Voltemos ao exemplo anterior, com $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$. Abaixo estão, respectivamente, seus gráficos:

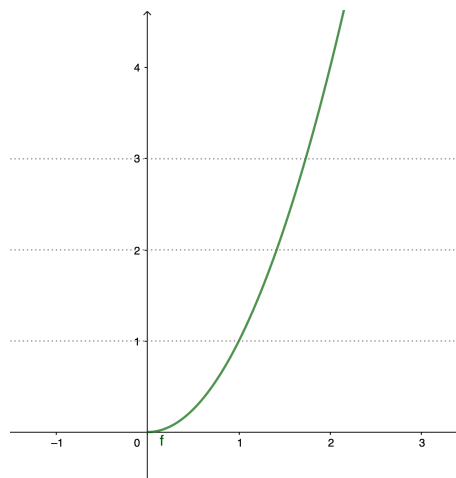


Os pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ destacados no gráfico de f indicam que $f(-1) = 1 = f(1)$, como já comentamos anteriormente. Visualmente, podemos interpretar como uma **linha horizontal** (a saber, a reta $y = 1$ que corta o eixo y em 1) que tem **duas interseções com o gráfico** da função f (nos pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$). Isto indica que a função f não é injetiva.

Já no gráfico da função g traçamos algumas linhas horizontais e podemos intuir que o mesmo acontecerá com qualquer outra linha horizontal: cada linha horizontal tem somente uma interseção com o gráfico de g . Esta é uma maneira geométrica de determinar se a função é injetiva.

Teste da linha horizontal: Uma função é injetiva se e somente se qualquer linha horizontal intercepta o seu gráfico no máximo em um ponto.

Observação 4.15. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ não é injetiva, mas podemos restringir seu **domínio** de modo que a função seja injetiva. De fato, $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ é injetiva. Usando o teste da linha horizontal notamos que cada linha vertical que corta o gráfico possui apenas uma interseção:



Exemplo 4.16. Verificar que $f(x) = 5x + 2$ é injetiva, usando a equivalência dada em (4.15).

Suponhamos que $x, y \in \mathbb{R}$ satisfazem $f(x) = f(y)$. Ou seja,

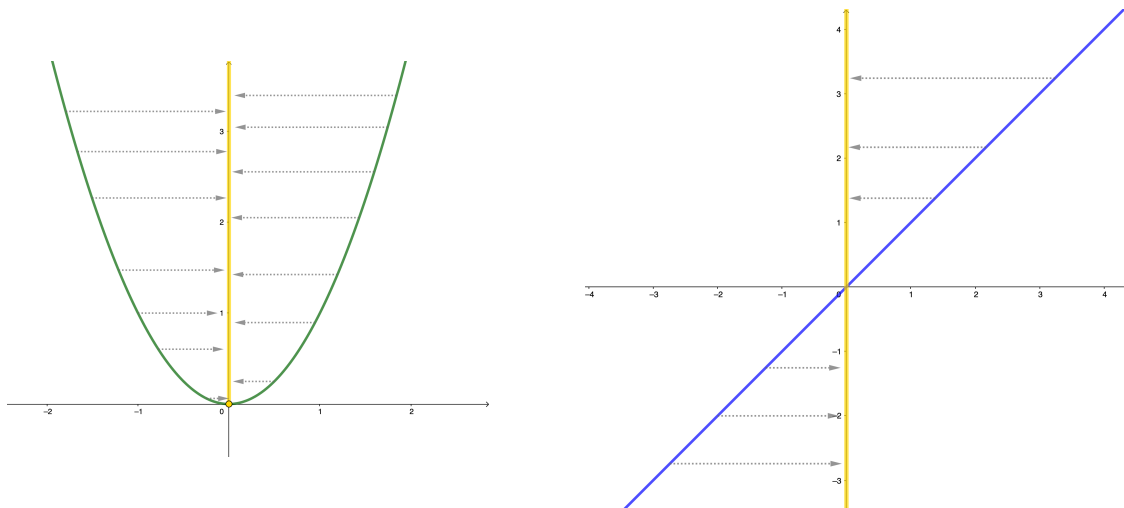
$$5x + 2 = 5y + 2 \Rightarrow 5x = 5y \Rightarrow x = y.$$

Portanto f é injetiva.

Outra classificação importante é de função sobrejetiva:

Definição 4.17. Uma função f é dita **sobrejetiva** se sua imagem é igual ao seu contradomínio. (Isto é, se $Im(f) = CD(f)$.)

Considerando as funções reais $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$, temos $CD(f) = \mathbb{R} = CD(g)$. Observando o gráfico (através da projeção do gráfico no eixo y , veja abaixo a imagem das funções marcadas em amarelo), é fácil notar que $Im(f) = [0, +\infty)$ e $Im(g) = \mathbb{R}$.



Portanto f não é sobrejetiva (pois $Im(f) \neq CD(f)$) e g é sobrejetiva (pois $Im(g) = CD(g)$).

Observação 4.18. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva, mas podemos restringir o seu **contradomínio** de modo que a função seja sobrejetiva.

De fato, $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $g(x) = x^2$ é sobrejetiva, pois $CD(g) = Im(g)$.

Quando uma **função** é simultaneamente injetiva e sobrejetiva dizemos que ela é **bijetiva** (ou bijetora).

É o caso da função $g(x) = x$, como vimos acima. E também da função $f(x) = x^2$, se considerarmos o domínio e o contradomínio adequados. Escolhemos estes conjuntos baseados na Observação 4.15. Ou seja, vamos considerar o domínio $D(f) = [0, +\infty)$ para

que a função seja injetiva. Observando o gráfico desta função (ilustrado na Observação 4.15), notamos que a imagem da função restrita a este domínio continua sendo $[0, +\infty)$. Portanto definimos

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = x^2$$

e desta forma temos f injetiva e sobrejetiva, isto é, bijetiva.

Este processo pode ser feito para qualquer função injetiva. Ou seja:

Sempre que uma função for injetiva, podemos restringir o seu contradomínio para ser igual à imagem e assim forçamos a função a ser bijetiva.

Mas qual a vantagem de uma função ser bijetiva?

Vejamos o que acontece com a função bijetiva (*verifique!*)

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty), \quad f(x) = x^2 + 1.$$

A função f associa um número $x \in [0, +\infty)$ a um novo valor $y = f(x) \in [1, +\infty)$. Agora queremos fazer o processo inverso: encontrar uma função que leva y de volta ao número x . Por exemplo, se $y = 5$, então $y \in [1, +\infty)$. Qual seria o valor $x \geq 0$ que faz com que $f(x) = 5$?

Para determinar, calculamos:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2.$$

(Lembre que o valor de x não pode ser negativo e por isso não consideramos a solução $x = -2$.)

Portanto, o valor procurado é 2. De modo geral, para qualquer $y \in [1, +\infty)$, podemos calcular:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y - 1}.$$

(Note que é possível fazer os cálculos acima pois $y \geq 1$ e portanto $y - 1 \geq 0$.)

A expressão que chegamos para x pode ser usada para definir uma nova função $f^{-1} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$, que faz este "processo inverso" da função f . Esta função é chamada função inversa de f :

Definição 4.19. Seja $f : A \rightarrow B$ função bijetiva. Então existe a **função inversa** $f^{-1} : B \rightarrow A$ que satisfaz

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Observação 4.20. Nem sempre uma função tem inversa. Mas sempre que a função for injetiva, restringimos o contradomínio à sua imagem de modo que ela seja bijetiva e assim é possível encontrar a sua função inversa. Além disso, temos o seguinte padrão:

$$\text{Domínio de } f^{-1} = \text{Imagem de } f$$

$$\text{Imagem de } f^{-1} = \text{Domínio de } f$$

Portanto definimos uma função (f^{-1}) que “desfaz” o que a f faz. Ou seja, se começamos com x , aplicamos a f e em seguida a f^{-1} , então voltamos para x . Veja este processo para o exemplo $f : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 1$ e $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2 + 1) - 1} = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

(Lembre que $x \in [0, +\infty)$ pois está no domínio de f . Ou seja, $x \geq 0$ e portanto $|x| = x$.)

O mesmo acontece se fizermos a composta de f com f^{-1} . Isto é, $f(f^{-1}(y)) = y$. (Verifique!)

Este resultado é geral e segue da definição de inversa.

Proposição 4.21. Seja $f : A \rightarrow B$ função bijetiva. Então a sua inversa f^{-1} satisfaz as seguintes propriedades de cancelamento:

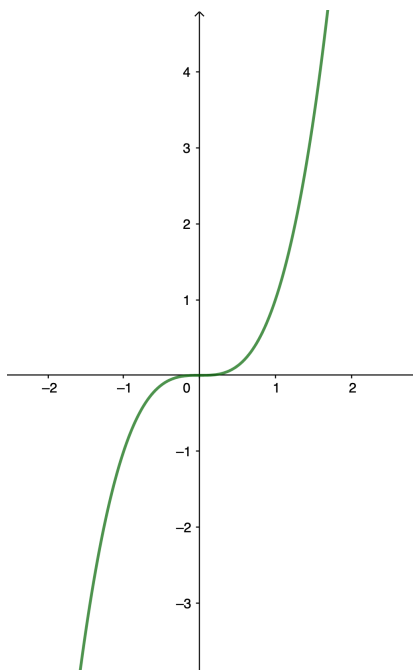
$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in A$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in B$$

Além disso, se uma função satisfaz estas propriedades de cancelamento para a f , obrigatoriamente esta função é a função inversa de f .

A última afirmação nos dá uma maneira prática de verificar se uma função é inversa de outra. Basta fazer a composição das duas e o resultado deve ser x .

Exemplo 4.22. Verifique que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{1/3}$ são inversas uma da outra.



Pelo gráfico da função $f(x) = x^3$ (figura ao lado), é fácil ver que a função é bijetiva (injetiva através dos cortes horizontais com única interseção e sobrejetiva pois a imagem é $\mathbb{R}$).

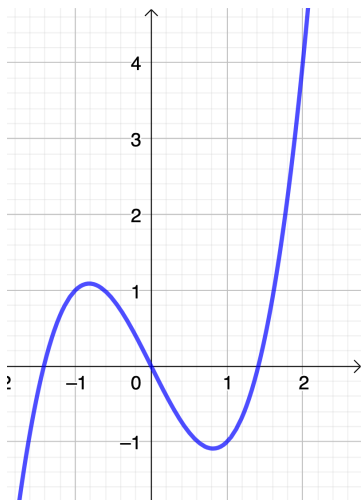
Agora notemos o que acontece ao compor as funções f e g :

$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x^{\frac{1}{3} \cdot 3} = x$$

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x^{3 \cdot \frac{1}{3}} = x.$$

Pela Proposição 4.21 segue que f e g são inversas uma da outra.

Exemplo 4.23. Uma função possui o gráfico abaixo. Calcule $f^{-1}(4)$ e $f^{-1}(-1)$.



Estudando o gráfico vemos que $f(2) = 4$ e $f(1) = -1$.

Usando a definição de função inversa

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

concluimos que

$$f^{-1}(4) = 2 \quad \text{e} \quad f^{-1}(-1) = 1.$$

Observação 4.24. Cuidado para não confundir $f^{-1}(x)$ com $(f(x))^{-1}$. O primeiro é a função inversa de f aplicada em x e o segundo é o inverso de $f(x)$, ou seja, $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.

Nos próximos dois exemplos exercitaremos uma **estratégia para encontrar a inversa de uma função**.

Exemplo 4.25. Calcule a função inversa de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4 - x^5}{6}$.

Escrevemos $y = f(x)$ e isolamos o x em função de y :

$$\begin{aligned}y &= \frac{4-x^5}{6} \\6y &= 4-x^5 \\6y-4 &= (-1)x^5 \\x^5 &= 4-6y \\x &= (4-6y)^{1/5}\end{aligned}$$

Portanto a inversa é $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = (4-6x)^{1/5}$.

Note que $Im(f) = \mathbb{R}$ e que f é injetiva. Assim o domínio e a imagem da inversa de f são $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.26 (Função inversa de função racional). Calcule a função inversa de

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}.$$

Primeiramente notemos que o domínio de f é $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e que é fácil verificar que é injetiva (verificando que $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$). De fato, se $f(x_1) = f(x_2)$, então

$$\begin{aligned}\frac{2x_1+3}{x_1-1} &= \frac{2x_2+3}{x_2-1} \\(2x_1+3)(x_2-1) &= (2x_2+3)(x_1-1) \\\cancel{2x_1x_2} + 3x_2 - 2x_1 - 3 &= \cancel{2x_1x_2} + 3x_1 - 2x_2 - 3 \\5x_1 &= 5x_2 \\x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

Escrevemos $y = f(x)$ e isolamos o x em função de y :

$$\begin{aligned}y &= \frac{2x+3}{x-1} \\y(x-1) &= 2x+3 \\yx-y &= 2x+3 \\yx-2x &= y+3 \\yx-2x &= y+3 \\x(y-2) &= y+3 \\x &= \frac{y+3}{y-2}.\end{aligned}$$

Note que o processo acima só vale para $y \neq 2$ (pois o denominador não pode ser nulo). Na verdade é possível mostrar que $Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e de fato y não assumirá o valor 2.

Portanto temos $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definida por $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

Gráfico da inversa de uma função

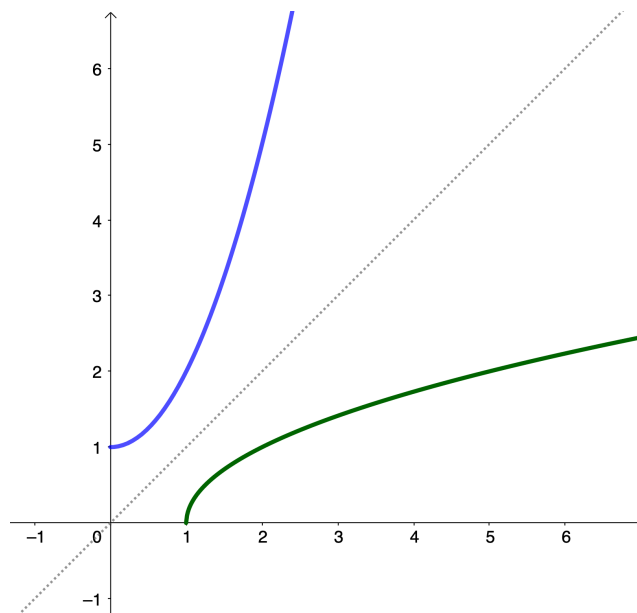
Já vimos que a inversa de

$$f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), f(x) = x^2 + 1$$

é

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty), f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}.$$

Vamos comparar os seus gráficos. O gráfico de f é facilmente determinado pois é a conhecida parábola $y = x^2$ deslocada uma unidade para cima; e o gráfico de f^{-1} também é obtido facilmente deslocando o gráfico de $y = \sqrt{x}$ uma unidade para direita. (Ambos os argumentos usando transformação de funções). Ou seja, abaixo temos o **gráfico de f em azul** (note que é somente metade da parábola pois o domínio de f é somente os números não negativos) e **de f^{-1} em verde**:



Podemos perceber que um gráfico é a reflexão do outro através da reta $y = x$ (marcada em pontilhado). Esta propriedade vale sempre para o gráfico de f e de f^{-1} e é muito útil

para traçar o gráfico de uma conhecendo a outra.

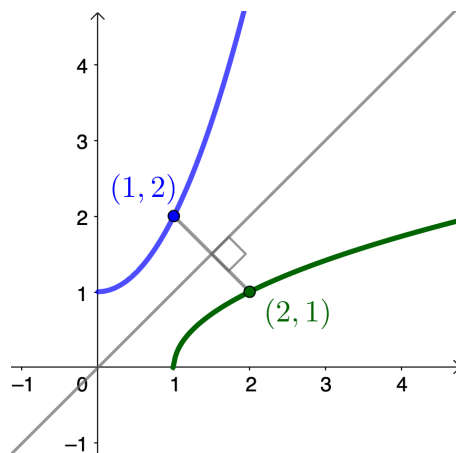
Proposição 4.27. O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo o gráfico de f através da reta $y = x$.

Esta propriedade vem da definição de função inversa

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Assim um ponto (x, y) pertence ao gráfico de f se e somente se (y, x) pertence ao gráfico de f^{-1} .

Ao lado temos isto ilustrado para as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$, nos pontos em que $f(1) = 2$ e $f^{-1}(2) = 1$.



Semana 10

4.5 Função exponencial

Nosso objetivo é estudar funções em que a incógnita está no expoente de uma potência.

Por exemplo, $f(x) = 2^x$ é uma função exponencial de base 2. Vamos avaliar esta função em alguns pontos:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ f(0) &= 2^0 = 1 \\ f(1) &= 2^1 = 2 \\ f(3) &= 2^3 = 8 \\ f(8) &= 2^8 = 256 \\ f(15) &= 2^{15} = 32768 \end{aligned}$$

Podemos observar que os valores vão crescendo rapidamente. Ou seja, uma pequena variação em x significa uma variação muito mais expressiva em $f(x)$ (principalmente para valores grandes de x).

Definição 4.28. Uma **função exponencial de base a** (com $a > 0$ e $a \neq 1$) é uma função

definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$f(x) = a^x.$$

No estudo das funções exponenciais será muito útil a Proposição 1.12, que traz as propriedades de potenciação. Lembremos aqui de algumas:

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

4.5.1 Gráfico de funções exponenciais

Vamos estudar duas funções exponenciais e com elas perceber um certo padrão para os gráficos de funções exponenciais: $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Montamos uma tabela:

x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$\frac{1}{8}$	8
-2	$\frac{1}{4}$	4
-1	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$

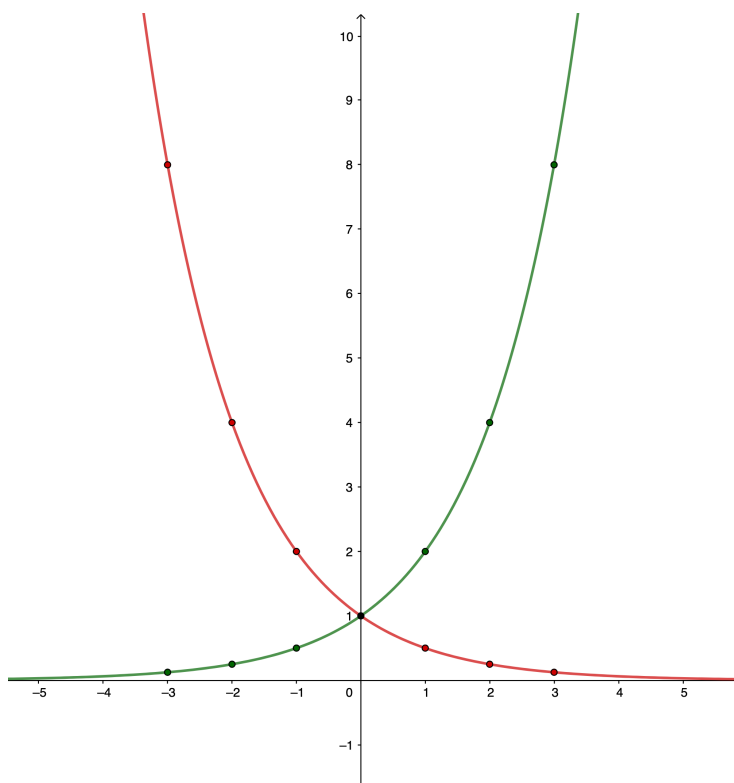
e esboçamos o gráfico (de f em verde e de g em vermelho) (próxima página).

Observe que $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x} = f(-x)$ (de onde vem a reflexão horizontal).

Notemos alguns padrões para uma função $f(x) = a^x$ (com $a > 0$, $a \neq 1$):

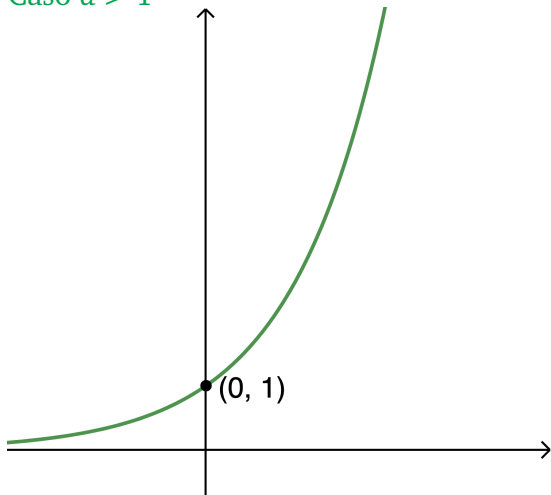
- Sempre ocorre $f(0) = a^0 = 1$ e portanto o ponto $(0, 1)$ pertence ao gráfico.
- Se $a > 1$, então a função **cresce rapidamente** (“explode” quando x vai assumindo valores cada vez maiores) e quanto menor o valor de x , mais próximo de 0 fica $f(x)$.
- Se $0 < a < 1$, então a função **decresce rapidamente** (quanto maior o valor de x , mais próximo de 0 fica $f(x)$) e “explode” quando x vai assumindo valores cada vez menores.

- A reta $y = 0$ (eixo- x) é uma *assíntota*, isto é, a curva se aproxima desta reta, mas nunca a “toca”.
- A função assume somente valores positivos.

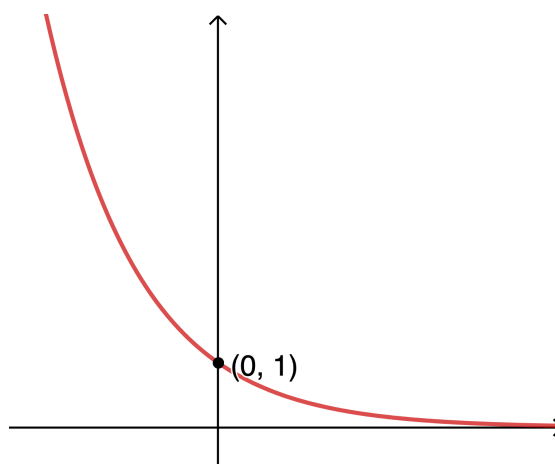


Portanto podemos concluir: A função exponencial $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) tem domínio $D(f) = \mathbb{R}$, imagem $Im(f) = (0, +\infty)$ e seu gráfico possui uma das formas abaixo:

Caso $a > 1$



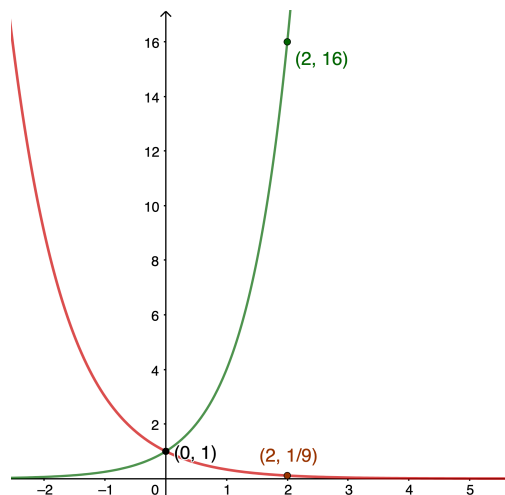
Caso $0 < a < 1$



Exemplo 4.29. Estudando os pontos marcados no gráfico, determinar a base da função exponencial em cada caso:

Quando $f(2) = 16$, temos $a^2 = 16$, com $a > 0$, ou seja, $a = \sqrt{16} = 4$. Portanto $f(x) = 4^x$.

Quando $f(2) = \frac{1}{9}$, temos $a^2 = \frac{1}{9}$, com $a > 0$, ou seja, $a = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. Portanto $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

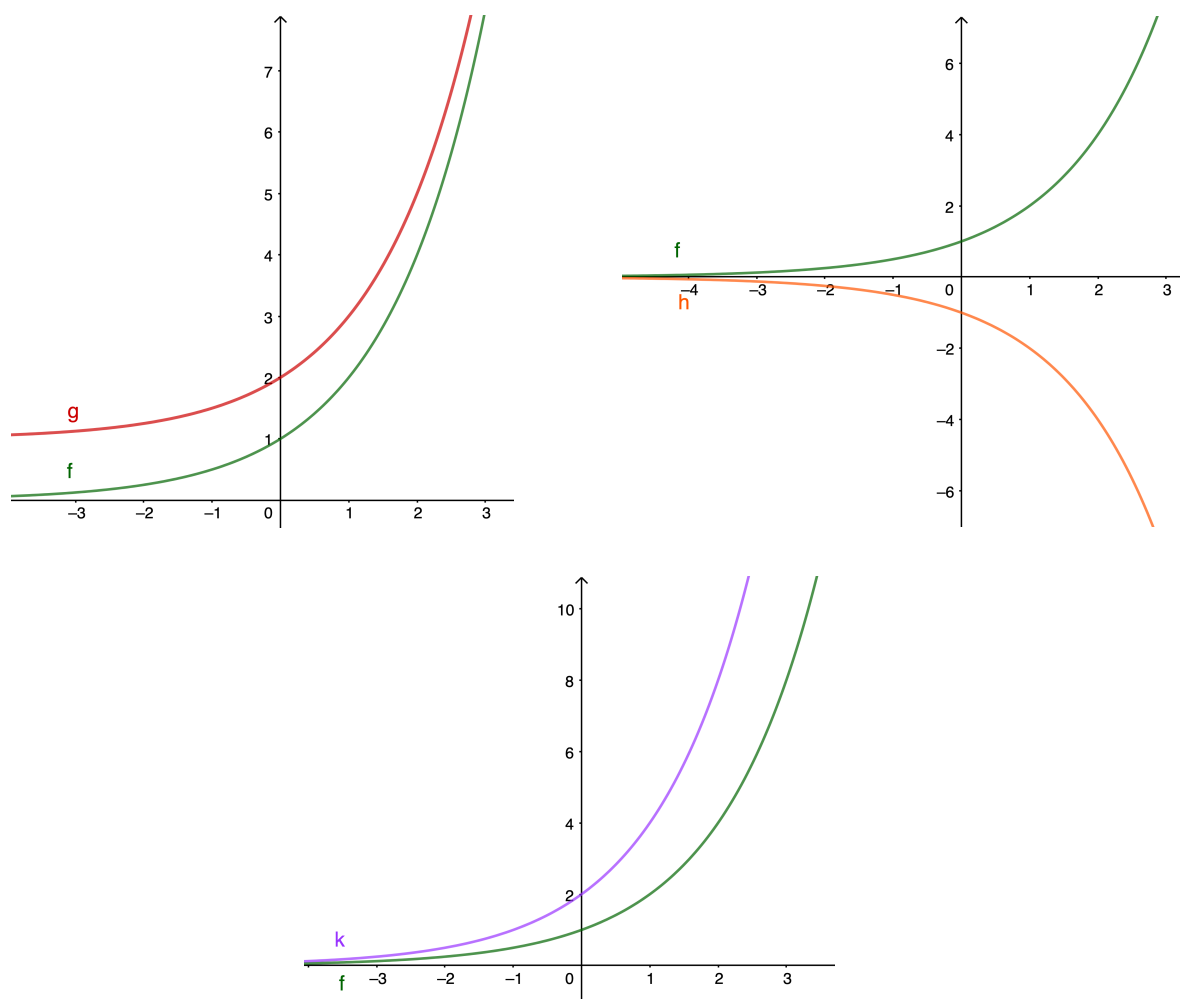


Transformações de Funções Exponenciais

As transformações de funções como reflexão, translação, etc, tbm ocorrem para as funções exponenciais. Por exemplo, partindo da função $f(x) = 2^x$, podemos construir os gráficos de:

$$g(x) = 1 + 2^x \quad h(x) = -2^x \quad k(x) = 2^{x+1}$$

- A função g é construída adicionando uma unidade na função f . Portanto temos que transladar o gráfico de f verticalmente uma unidade para cima. Neste caso, surge uma nova assíntota $y = 1$ e a imagem da função é $Im(g) = (1, +\infty)$.
- A função h é construída multiplicando a função f por -1 . Seu gráfico portanto é uma reflexão no eixo x da função f . A imagem é $Im(h) = (-\infty, 0)$.
- A função k é obtida substituindo x por $x+1$. Isto caracteriza uma translação horizontal de uma unidade para a esquerda. Não há mudança na imagem e na assíntota.



4.5.2 Função Exponencial Natural

O número e é definido como o valor que a expressão $(1 + 1/n)^n$ assume quando n é assumido cada vez maior.

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815
100000	2,71827
1000000	2,71828

Este valor (2,71828) já é uma boa aproximação para cinco casas decimais. É possível

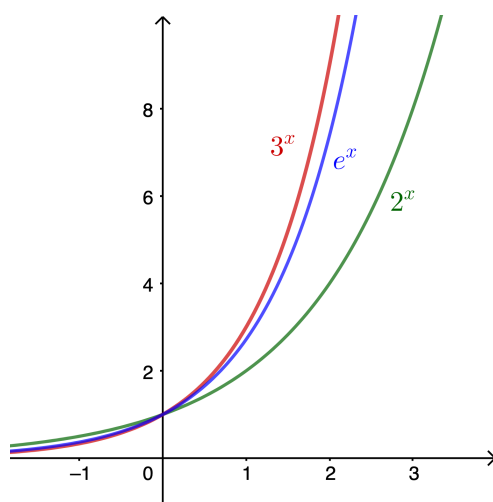
provar que o número e é irracional e portanto não conseguimos escrever seu valor exato na forma decimal.

Há outras maneiras de construir/definir o número e (você pode pesquisar, por curiosidade). A função exponencial

$$f(x) = e^x$$

é chamada a **função exponencial natural**. Em muitas aplicações surge a necessidade de trabalhar com esta função.

Como $2 < e < 3$, o gráfico de $f(x) = e^x$ fica entre os gráficos de 2^x e 3^x .



Semana 11

4.6 Função logarítmica

Já vimos que a função exponencial $f(x) = a^x$ (com $a > 0, a \neq 1$) é uma função injetiva com imagem $Im(f) = (0, +\infty)$. Ou seja, existe uma função inversa $f^{-1}(x) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Lembre que a função inversa é aquela que satisfaz:

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Esta inversa da função exponencial a^x é chamada função logarítmica de base a .

Definição 4.30. Seja $a > 0$, $a \neq 1$. A **função logarítmica de base a** é denotada por $\log_a x$ e é definida pela equivalência

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

A expressão $\log_a x$ é lida como “logaritmo de x na base a ”.

Observação 4.31. Da definição acima concluímos que o **logaritmo** é um **expoente**, ou seja, dizer que $\log_a x = y$ significa dizer que y é o expoente que faz com que a elevado a ele resulte em x . Por exemplo, se quisermos calcular $\log_2 4$, devemos nos perguntar “A qual expoente devemos elevar 2 para obter 4?”. Como a resposta é 2, portanto $\log_2 4 = 2$.

Observação 4.32. A equivalência em destaque nos mostra duas equações, cada uma delas podemos chamar por um nome especial:

Forma logarítmica: $\log_a x = y$

Forma exponencial: $a^y = x$

Exemplo 4.33. A forma exponencial $5^0 = 1$ nos dá a forma logarítmica $\log_5 1 = 0$. Analogamente, temos:

$$\log_{467463} 1 = 0 \quad \text{pois} \quad 467463^0 = 1$$

$$\log_{11} 11 = 1 \quad \text{pois} \quad 11^1 = 11$$

$$\log_2 16 = 4 \quad \text{pois} \quad 2^4 = 16$$

$$\log_5 25 = 2 \quad \text{pois} \quad 5^2 = 25$$

$$\log_{10} 100000 = 5 \quad \text{pois} \quad 10^5 = 100000$$

$$\log_{10} 0,001 = -3 \quad \text{pois} \quad 10^{-3} = 0,001$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2} \quad \text{pois} \quad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Observe que os dois primeiros exemplos acima podem ser generalizados, pois **qualquer número elevado a zero é um** e também pois **elevar qualquer número à um resulta nele mesmo**.

Além disso, usando as propriedades de cancelamento da função inversa (Proposição 4.21) para as funções $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, temos

$$a^{\log_a x} = x, \quad \forall x > 0; \quad \log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ou seja, podemos calcular, por exemplo:

$$\log_5 125 = \log_5 5^3 = \log_5 5^3 = 3;$$

$$6^{\log_6 5} = 5^{\log_6 5} = 5.$$

Estas observações são propriedades importantes de logaritmo:

Propriedades do Logaritmo:

Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e $y > 0$.

- (i) $\log_a 1 = 0$
- (ii) $\log_a a = 1$
- (iii) $\log_a a^b = b$
- (iv) $a^{\log_a b} = b \quad (b > 0)$
- (v) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- (vi) $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
- (vii) $\log_a x^b = b \log_a x$
- (viii) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (b > 0, b \neq 1)$ [Mudança de base]

As propriedades (v), (vi) e (vii) seguem das propriedades de exponencial. Veja:

(v) Vamos chamar $X = \log_a x$ e $Y = \log_a y$ e escrever as equações exponenciais correspondentes:

$$x = a^X \quad \text{e} \quad y = a^Y.$$

Agora calculamos (usando a propriedade de exponencial $b^m b^n = b^{m+n}$):

$$\log_a(xy) = \log_a(a^X a^Y) = \log_a a^{X+Y} = \log_a a^{X+Y} \stackrel{(iii)}{=} X + Y = \log_a x + \log_a y.$$

(No cancelamento usamos a propriedade (iii).)

(vi) Podemos usar a propriedade (v) para obter:

$$\log_a x = \log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y \right) \stackrel{(v)}{=} \log_a \frac{x}{y} + \log_a y$$

e a propriedade é obtida isolando o termo $\log_a \frac{x}{y}$.

(vii) Chamamos $X = \log_a x$ e assim $a^X = x$. Logo

$$\log_a x^b = \log_a (a^X)^b = \log_a a^{bX} \stackrel{(iii)}{=} bX = b \log_a x$$

(viii) Chamando $y = \log_a x$ obtemos a forma exponencial equivalente $x = a^y$. Aplicando $\log_b$ em ambos os lados obtemos

$$\log_b x = \log_b a^y \stackrel{(vii)}{=} y \log_b a$$

e portanto $y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Exemplo 4.34. Vamos ver alguns exemplos que utilizam essas propriedades para facilitar o cálculo de expressões envolvendo logaritmo:

$$(a) \log_4 2 + \log_4 32 \stackrel{(v)}{=} \log_4 (2 \cdot 32) = \log_4 64 = 3, \quad \text{pois } 4^3 = 64.$$

$$(b) \log_3 189 - \log_3 7 \stackrel{(vi)}{=} \log_3 \frac{189}{7} = \log_3 27 = 3, \quad \text{pois } 3^3 = 27.$$

$$(c) -\log_{49} \frac{1}{7} = (-1) \log_{49} \frac{1}{7} \stackrel{(vii)}{=} \log_{49} \left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = \log_{49} 7 = \frac{1}{2}, \quad \text{pois } 49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7.$$

$$(d) 4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = 2^{2 \log_2 3} \stackrel{(vii)}{=} 2^{\log_2 3^2} \stackrel{(iv)}{=} 3^2 = 9.$$

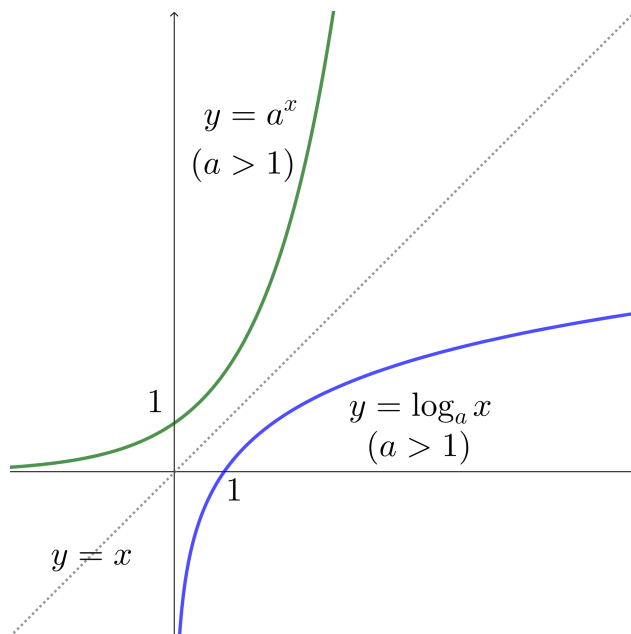
$$(e) \log_3 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \approx \frac{0,69897}{0,47712} \approx 1,465 \text{ (usando calculadora).}$$

Observação 4.35. Muitas calculadoras não possuem a função $\log_a$ com a base qualquer, mas $\log_{10}$ sim. Portanto a propriedade de mudança de base é muito útil para calcular logaritmo quando temos somente uma calculadora para nos auxiliar.

4.6.1 Gráfico de funções logarítmicas

Vimos na Seção 4.4 que os gráficos de uma função e de sua inversa são obtidos um a partir do outro com uma reflexão através da reta $y = x$.

Já que a função logarítmica é definida como a função inversa da função exponencial, seu gráfico pode ser obtido através deste processo de reflexão.



Na figura acima temos o caso da função $f(x) = \log_a x$ quando $a > 1$.

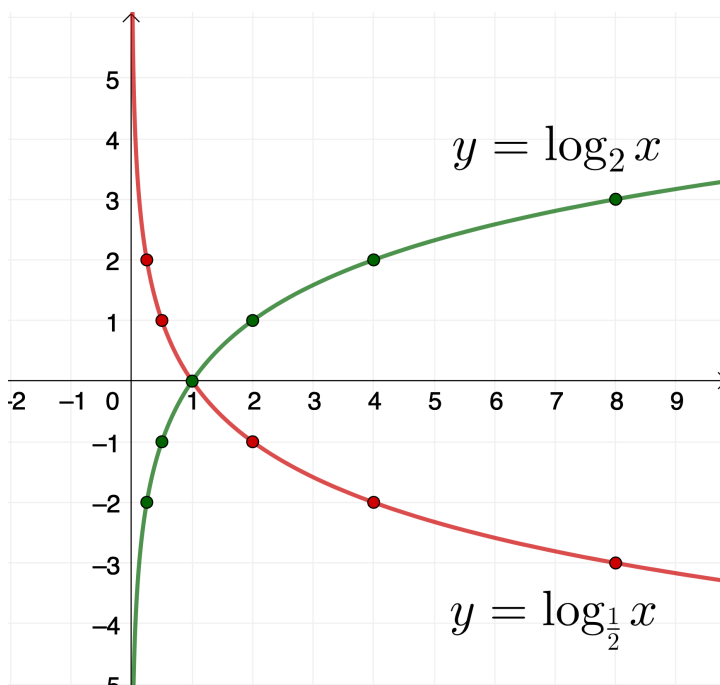
Observações importantes: Note que este gráfico está de acordo com a definição da função logaritmo, onde $(0, +\infty)$ é o **domínio** da função e $\mathbb{R}$ é a **imagem**. Outra observação importante é que o **ponto $(1, 0)$ pertence ao gráfico**, já que $\log_a 1 = 0$. Também notamos que o **eixo y é uma assíntota** para o gráfico (quanto mais perto de 0 o valor de x , menor será $f(x)$ e portanto vai se aproximando cada vez mais do eixo y nos valores negativos).

Também podemos utilizar uma tabela para nos auxiliar no esboço do gráfico. Vejamos abaixo os exemplos $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Através da tabela

x	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$8 = 2^3$	3	-3
$4 = 2^2$	2	-2
2	1	-1
1	0	0
$\frac{1}{2} = 2^{-1}$	-1	1
$\frac{1}{4} = 2^{-2}$	-2	2

podemos marcar alguns pontos no plano e utilizar de guia para traçar os gráficos:



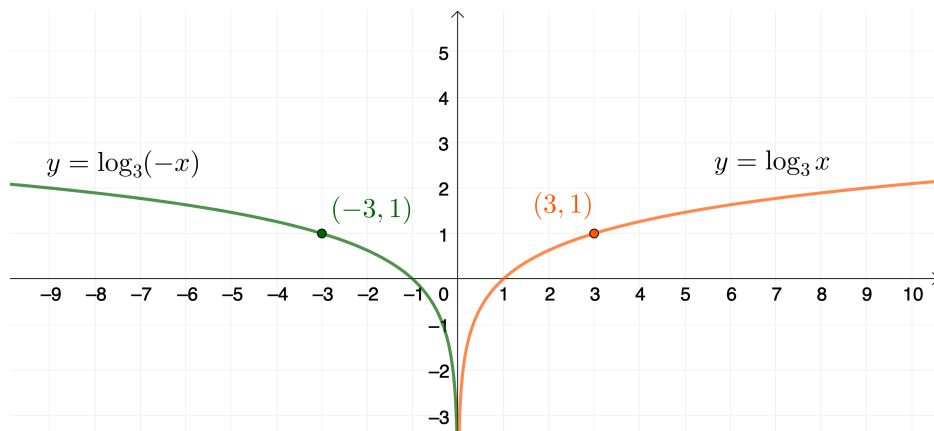
Observação 4.36. O gráfico acima da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ apresenta o padrão dos gráficos das funções $f(x) = \log_a x$ quando $0 < a < 1$. Ou seja, também tem o eixo y como assíntota, passa pelo ponto $(1,0)$, tem domínio igual a $(0, +\infty)$ e imagem $\mathbb{R}$. É uma função decrescente (quanto maior o valor de x , menor o valor de y). Imagem e assíntotas são as mesmas de f .

Observação 4.37. Note que os pontos $(a, 1)$ e $(a^{-1}, -1)$ sempre pertencem ao gráfico de $y = \log_a x$, pois $\log_a a = 1$ e $\log_a a^{-1} = -1$. Nos exemplos acima, tivemos os pontos $(2, 1)$ e $(\frac{1}{2}, -1)$ para $y = \log_2 x$; $(\frac{1}{2}, 1)$ e $(2, -1)$ para $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Estes pontos podem servir de auxílio para esboçar o gráfico sem a necessidade de montar uma tabela.

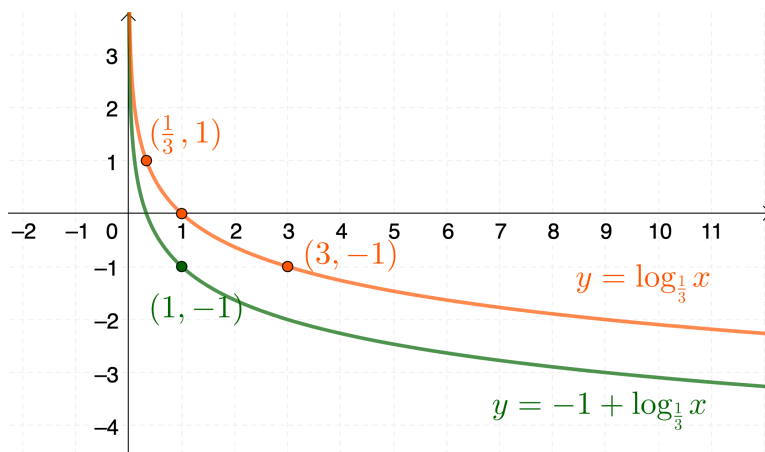
Transformações de Funções Logarítmicas

Assim como fizemos para as funções exponenciais, podemos usar as transformações de funções para construir outras funções a partir de uma função do tipo $f(x) = \log_a x$. Vejamos alguns exemplos:

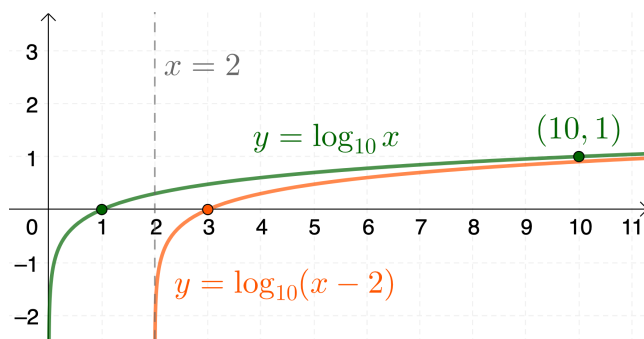
Exemplo 4.38. A função $g(x) = \log_3(-x)$ é construída multiplicando o argumento x da função $f(x) = \log_3 x$ por -1 . Seu gráfico portanto é uma reflexão no eixo x da função f . O domínio é $D(g) = (-\infty, 0)$.



Exemplo 4.39. A função $g(x) = -1 + \log_{\frac{1}{3}} x$ é construída subtraindo uma unidade da função $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$. Portanto temos que transladar o gráfico de f verticalmente uma unidade para baixo. O domínio e a imagem não se alteram.



Exemplo 4.40. A função $g(x) = \log_{10}(x - 2)$ é obtida substituindo x por $x - 2$ na função $f(x) = \log_{10} x$. Isto caracteriza uma translação horizontal de duas unidades para a direita. O domínio de g é $D(g) = (2, +\infty)$ e sua assíntota vertical é a reta $x = 2$.



4.6.2 Logaritmos especiais

Há duas funções logarítmicas muito usadas em aplicações e por isso elas possuem nomes e notações próprias:

Logaritmo Comum (ou Decimal): É o logaritmo de base 10:

$$\log x = \log_{10} x$$

Da definição de logaritmo, calculamos:

$$\log 10 = 1, \quad \log 100 = \log 10^2 = 2, \quad \log 0,1 = \log 10^{-1} = -1$$

Quando um número não for uma potência inteira de 10, por exemplo, se $x = 30$, então podemos fazer uma estimativa: Como $10 < 30 < 100$ e a função $\log$ de base maior do que 1 é crescente, então

$$1 = \log 10 < \log 30 < \log 100 = 2.$$

Por ser uma função muito utilizada, a maioria das calculadoras científicas trazem a opção **log** e através delas temos aproximações melhores. Neste caso, $\log 30 \approx 1,4771$.

O gráfico desta função foi esboçado no Exemplo 4.40.

Logaritmo Natural (ou Neperiano): É o logaritmo de base e :

$$\ln x = \log_e x$$

Pela definição de logaritmo, a função $g(x) = \ln x$ é a inversa da função $f(x) = e^x$. Portanto temos a seguinte relação:

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

Desta equivalência podemos destacar algumas propriedades muito utilizadas:

$$\ln 1 = 0 \quad (\text{pois } e^0 = 1)$$

$$\ln e = 1 \quad (\text{pois } e^1 = e)$$

$$\ln e^x = x$$

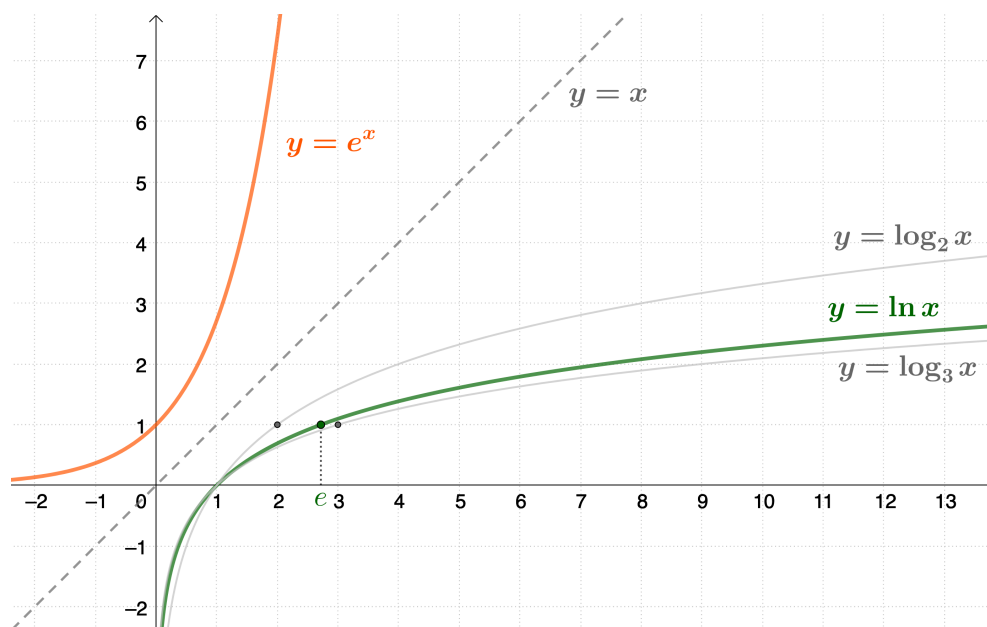
$$e^{\ln x} = x \quad (\text{aqui substituímos } y = \ln x \text{ na relação acima } e^y = x)$$

Podemos calcular:

$$\ln e^2 = 2 \quad \ln \frac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3$$

Ou ainda, usando a opção **ln** de uma calculadora científica, temos estimativas para $\ln x$, quando x não é uma potência de e .

Podemos obter o gráfico de $y = \ln x$ usando a reflexão de $y = e^x$ através da reta $y = x$. Veja abaixo:



Note que o gráfico de $y = \ln x$ fica entre os gráficos de $y = \log_2 x$ e $y = \log_3 x$, já que $2 < e < 3$.

Semana 12

4.7 Equações exponenciais e logarítmicas

4.7.1 Equações exponenciais

As equações exponenciais são aquelas em que a incógnita aparece no expoente.

Exemplo 4.41. São exemplos de equações exponenciais:

$$3^x = 9, \quad 4^{x+1} = 256, \quad 3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 = 0.$$

Para resolver estas equações é importante que saibamos bem:

- resolução de equações do primeiro e segundo grau
- propriedades de potência

O caso mais simples de equação exponencial é do tipo

$$a^x = b,$$

para a um número real tal que $a \neq 1$. Note que dessa forma, $b > 0$, mas a equação continua válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Muitas vezes podemos resolver uma equação do tipo $a^x = b$ pelo método da redução a uma base comum, que consiste em escrever b como potência de a , ou seja, escrever $b = a^k$, para algum $k \in \mathbb{R}$, e portanto $a^x = b = a^k \Rightarrow x = k$.

Portanto, a seguinte propriedade é essencial na resolução de equações exponenciais:

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y, \text{ para } a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Note que esta propriedade é verdadeira pois a função exponencial é injetiva.

Exemplo 4.42. Resolva $4^{x+1} = 256$.

Observe que podemos escrever $256 = 4^4$, de modo que a equação é $4^{x+1} = 4^4$ e portanto $x + 1 = 4$, o que implica que $x = 3$. O conjunto solução é $S = \{3\}$.

Exemplo 4.43. Resolva $3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 = 0$.

Para resolver esse tipo de equação, primeiro fazemos uma mudança de variáveis, com $y = 3^x$, de modo que a equação se torna

$$y^2 - 18y + 81 = 0,$$

que é uma equação de segundo grau em y , que possui uma única solução: $y = 9$. Agora, se $y = 9$ e $y = 3^x$, basta resolver $3^x = 9$, cuja solução é $x = 2$.

Agora, vejamos o caso mais geral, em que não conseguimos resolver diretamente ao comparar expoentes. Por exemplo:

$$3^{x+2} = 7$$

Neste caso, não conseguimos expressar 7 como potência de 3 (com expoente inteiro).

Aqui a estratégia é usar a propriedade de logaritmo: $\log_a a^b = b$. Ou seja, aplicamos o logaritmo em ambos os lados da equação (note que isso é possível pois ambos os valores são positivos!):

$$\log_3 3^{x+2} = \log_3 7$$

e usamos a propriedade citada:

$$x + 2 = \log_3 7,$$

o que nos dá $x = \log_3 7 - 2$.

Para resolver usando uma calculadora, fazemos a mudança de base e concluímos:

$$x = \frac{\log 7}{\log 3} - 2 \approx -0,228756$$

Em resumo a técnica é:

- Isolar o termo exponencial em um lado da equação
- Aplicar o logaritmo em cada lado (na mesma base da potência)
- Usar propriedade para “cancelar o logaritmo” ($\log_a a^b = b$)
- Resolver a equação em termos da variável

Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplo 4.44. $e^{3-2x} = 4$

Aplicamos o $\ln$ em ambos os lados e usamos a propriedade $\ln e^b = b$:

$$\ln e^{3-2x} = \ln 4 \Rightarrow 3 - 2x = \ln 4 \Rightarrow -2x = \ln 4 - 3$$

$$\text{e portanto } x = \frac{3 - \ln 4}{2} \approx 0,807.$$

Exemplo 4.45. $3^{2x} + 2(3^x) - 15 = 0$

Neste caso, para isolar o termo exponencial, vamos resolver uma equação do segundo grau. Note que chamando $y = 3^x$ obtemos a equação $y^2 + 2y - 15 = 0$, cujas soluções são $y = -5$ e $y = 3$ (confira esta resposta usando soma e produto). Retornamos à variável x :

$$3^x = -5 \quad \text{e} \quad 3^x = 3.$$

Como $3^x > 0$ para todo x , então não pode ocorrer $3^x = -5$. Portanto a única possibilidade é $3^x = 3$, cuja solução é $x = 1$.

Exemplo 4.46. $3xe^x + x^2e^x = 0$

Começamos com uma fatoração:

$$(3x + x^2)e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad (3 + x)xe^x = 0.$$

Como $e^x \neq 0$, então podemos dividir por e^x em ambos os lados e segue que $(3 + x)x = 0$, cujas soluções são $x = 0$ e $x = -3$.

4.7.2 Equações logarítmicas

As equações logarítmicas são aquelas em que a incógnita aparece no logaritmo.

São exemplos de equações exponenciais:

$$\log_3 x = 2, \quad \log(x + 1) = 5, \quad \ln x - \ln x^2 = 2.$$

Para resolver as equações logarítmicas teremos que saber bem a definição e as propriedades de logaritmo. Principalmente, temos que lembrar a seguinte equivalência da definição de logaritmo:

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

É comum chamarmos a equação do lado esquerdo de *forma logarítmica* e a do lado direito de *forma exponencial*.

Veja o que acontece nos exemplos acima. No primeiro caso, da definição de logaritmo temos a equivalência

$$\log_3 x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^2 = 9;$$

no segundo:

$$\log(x + 1) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 10^5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 100000 - 1 = 99999;$$

e no último, usamos a propriedade $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ para obter:

$$2 = \ln x - \ln x^2 = \ln \frac{x}{x^2} = \ln \frac{1}{x}$$

e escrevendo na forma exponencial temos

$$\ln \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow e^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{e^2}.$$

Observação 4.47. Note que nos três casos acima, ao substituir o valor obtido para x na equação, a condição de existência de logaritmo não foi afetada (isto é, as soluções fazem com que o argumento do logaritmo seja positivo). De fato, no primeiro exemplo, podemos fazer $x = 9$ pois neste caso $x > 0$. No segundo, fica $x + 1 = 100000 > 0$. E no último $x = \frac{1}{e^2} > 0$ e $x^2 = \frac{1}{e^4} > 0$.

Algumas vezes é útil a estratégia de redução à mesma base (parecido com o que fizemos nas equações exponenciais). Neste caso, lembramos que a função logarítmica é injetiva e portanto vale:

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y.$$

Vejamos um exemplo que ilustra esta estratégia:

Exemplo 4.48. $\log(x^2 + 1) = \log(x - 2) + \log(x + 3)$

Usamos a propriedade $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ para concluir

$$\log(x^2 + 1) = \log(x - 2)(x + 3).$$

Como a base é a mesma podemos concluir pela propriedade acima que

$$x^2 + 1 = (x - 2)(x + 3)$$

e resolvemos facilmente:

$$x^2 + 1 = x^2 + x - 6 \Rightarrow x = 7.$$

Note que satisfaz a condição de existência, pois temos

$$x^2 + 1 = 7^2 + 1 = 50 > 0, \quad x - 2 = 7 - 2 = 5 > 0, \quad x + 3 = 7 + 3 = 10 > 0.$$

De modo geral, o método para resolver uma equação logarítmica é:

- Isolar o termo logarítmico em um lado da equação
- Escrever a equação na forma exponencial
- Resolver a equação em termos da variável
- Verificar se a solução satisfaz a condição de existência do logaritmo

Exemplo 4.49. $\log_2(25 - x) = 3$

Escrevemos na forma exponencial: $25 - x = 2^3 = 8$

Resolvemos em termos de x : $x = 25 - 8 = 17$.

Verificamos a condição de existência: $25 - x = 25 - 17 = 8 > 0$

Exemplo 4.50. $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$

Usamos propriedade de logaritmo: $\log(x + 2)(x - 1) = 1$

Escrevemos na forma exponencial: $(x + 2)(x - 1) = 10$

Resolvemos em termos de x : $x^2 + x - 2 = 10 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$

Podemos resolver facilmente por soma e produto: $x_1 = -4$ ou $x_2 = 3$.

Verificamos a condição de existência:

$x_1 + 2 = -4 + 2 = -2 < 0$, o que significa que -4 não satisfaz a condição

$x_2 + 2 = 3 + 1 > 0$ e $x_2 - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$.

Portanto a solução é somente $x = 3$.

Observação 4.51. Uma outra possibilidade de equação logarítmica é aquela em que a variável aparece na base ao invés de aparecer no argumento. Por exemplo:

$$\log_{x+1} 32 = 5.$$

Neste caso, usamos a forma exponencial obtendo $(x + 1)^5 = 32$ e podemos elevar à $\frac{1}{5}$ em ambos os lados:

$$[(x + 1)^5]^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} \Rightarrow (x + 1)^{5 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32}.$$

Fatorando temos $32 = 2^5$. Portanto $x + 1 = \sqrt[5]{2^5}$, ou seja, $x = 2 - 1 = 1$.

Funções trigonométricas

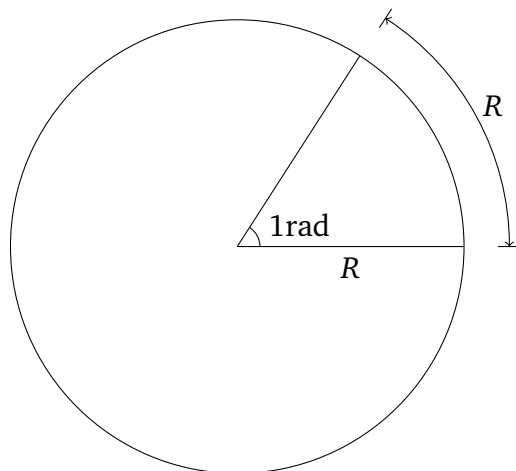
5.1 Ângulos

Antes de começarmos a falar das funções trigonométricas, precisamos falar de ângulos. Mais especificamente, de qual unidade usaremos para medi-los. A unidade mais comum “nas ruas” é o grau. Porém, esta é uma unidade ruim para usarmos no Cálculo, porque ela é, de certo modo, completamente artificial. Dividir uma circunferência em 360 partes é tão arbitrário quanto dividi-la em qualquer outro número de partes. De fato, existe uma outra unidade de medida de ângulo chamada grado, na qual a circunferência é dividida em 400 partes, e que praticamente não é utilizada.

A nossa busca, portanto, é por uma unidade de medida de ângulo mais intrínseca à circunferência, e o radiano é a unidade que usaremos.

A definição de radiano é bastante simples¹: dada uma circunferência, um arco cujo comprimento é igual a raio da circunferência descreve um ângulo de 1 radiano. Em outras palavras: se tomarmos um pedaço de barbante cujo comprimento é igual ao raio da circunferência, ao enrolarmos este pedaço de barbante ao longo da circunferência, o ângulo descrito pelo arco de barbante obtido é igual a 1 radiano (1 rad).

¹se começarmos a nos perguntar como calcular formalmente o comprimento de um arco de circunferência, aí a definição não fica assim tão simples. Ignoraremos tal dificuldade...



Lembramos que π é definido como o comprimento C da circunferência dividido pelo seu diâmetro, isto é,

$$\pi = \frac{C}{2R},$$

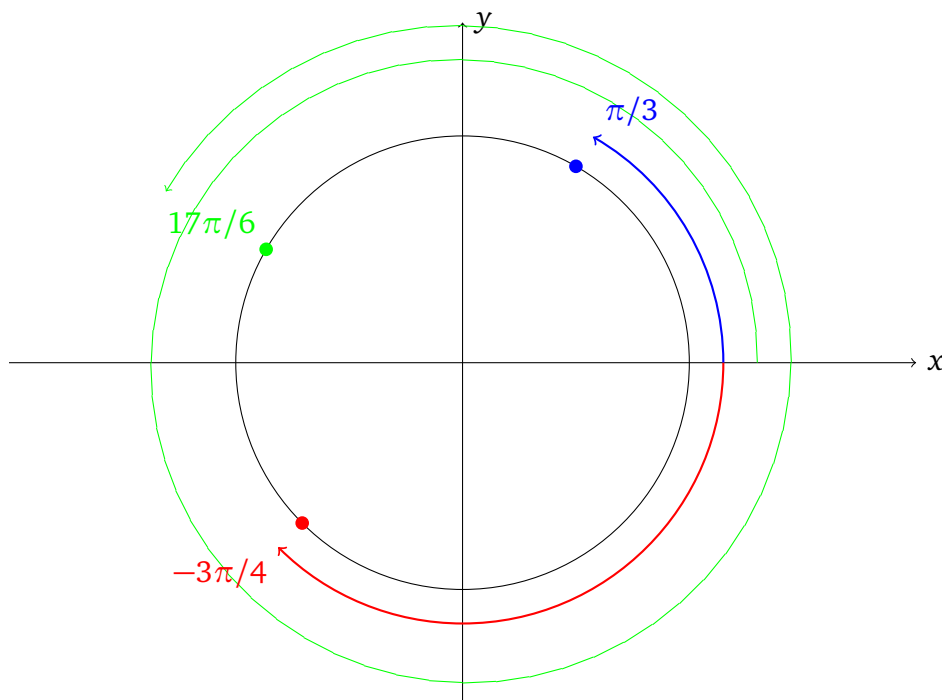
de tal modo que uma volta completa na circunferência corresponde a um ângulo de 2π radianos. Isto é, $360^\circ = 2\pi$ rad. Segue uma tabela com a conversão entre ângulos “populares” entre graus e radianos:

30°	$\pi/6$ rad
45°	$\pi/4$ rad
60°	$\pi/3$ rad
90°	$\pi/2$ rad
180°	π rad
360°	2π rad

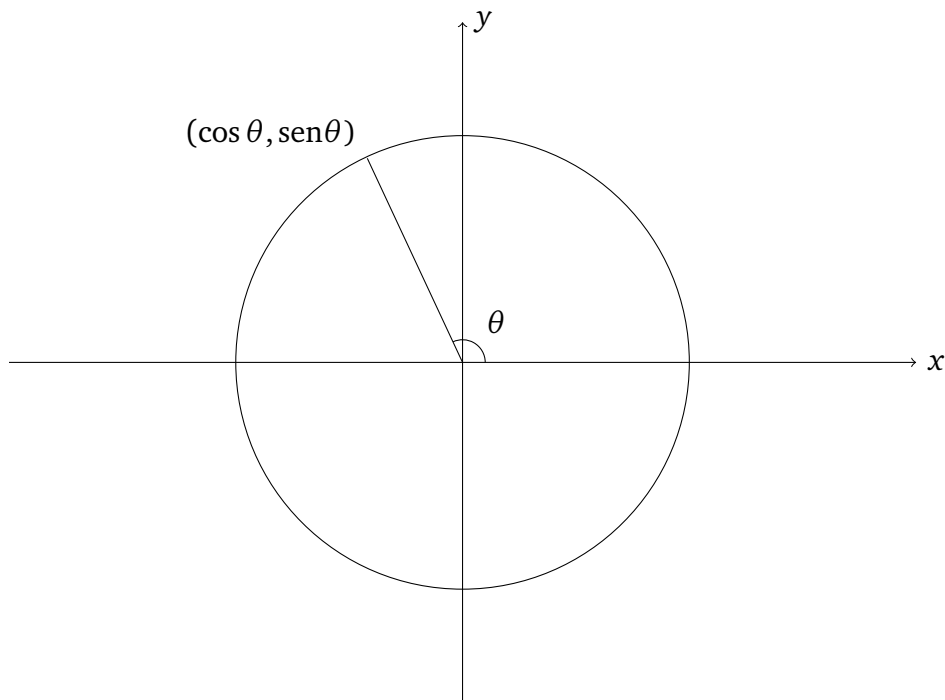
Como todas as definições de funções trigonométricas usarão ângulos em radianos, omitiremos o “rad” da nossa notação. Assim, quando mencionarmos um ângulo de $\pi/3$ ou qualquer outro valor numérico real, estará implícito que a unidade usada é o radiano (veremos a seguir que significado dar a um ângulo negativo).

5.2 O círculo trigonométrico e as funções seno e cosseno

Fixemos um círculo de raio 1 e centro na origem $(0,0)$ do plano cartesiano. Este será o nosso amigo círculo trigonométrico, a partir do qual definiremos as funções seno e cosseno. Dado um número real θ (que representa um ângulo em radianos), medimos no círculo trigonométrico um arco de comprimento $|\theta|$ a partir do ponto $(1,0)$, percorrendo a circunferência no sentido anti-horário se $\theta \geq 0$ e no sentido horário se $\theta < 0$. Como o círculo trigonométrico tem raio 1, um arco de comprimento $0 \leq \theta \leq 2\pi$ corresponde a um ângulo de mesmo valor. Como θ pode ser qualquer número real, nosso arco sobre o círculo trigonométrico pode dar várias “voltas”.



Uma vez obtido nosso arco, seu ponto final possui coordenadas x e y que dependem unicamente do valor de θ . Isto é, suas coordenadas são funções de θ . A função que representa a coordenada y é chamada de seno e a função que representa a coordenada x é chamada de cosseno.



Definimos portanto duas funções sen e cos cujo domínio é $\mathbb{R}$ e cujo contradomínio também podemos tomar igual a $\mathbb{R}$:

$$\text{sen}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{cos}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Alguns fatos seguem imediatamente da nossa definição de sen e cos a partir do ciclo trigonométrico:

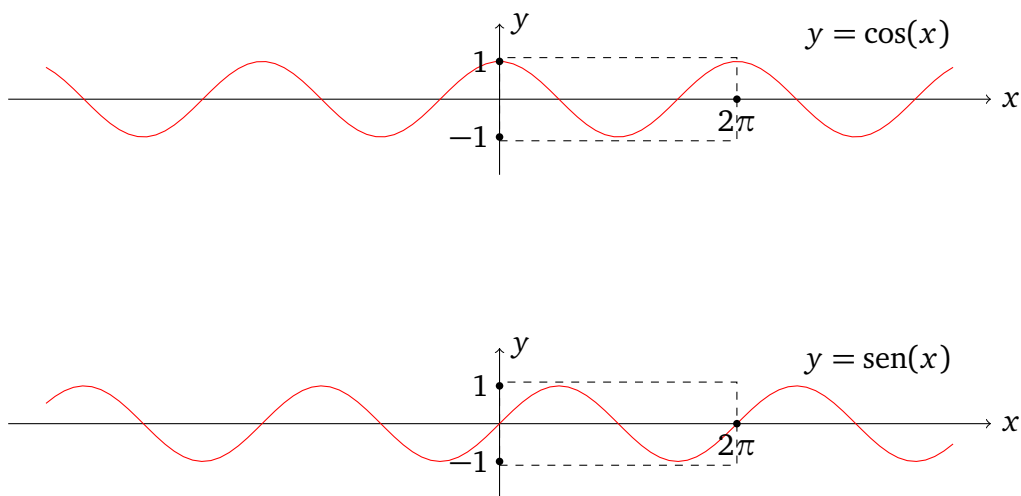
1. Como a equação que descreve o círculo trigonométrico é $x^2 + y^2 = 1$, temos $\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Esta é a chamada relação fundamental da trigonometria.
2. As funções sen e cos não são injetoras. Pelo contrário, elas são “muito não injetoras”: de fato, se um ponto do círculo trigonométrico representa um ângulo θ , então ele também representa todos os ângulos que diferem de θ por um número inteiro de voltas no círculo trigonométrico. Isto é,

$$\text{sen}(\theta + 2k\pi) = \text{sen}(\theta), \quad \text{cos}(\theta + 2k\pi) = \text{cos}(\theta)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

3. A imagem de ambas as funções é igual ao intervalo $[-1, 1]$.

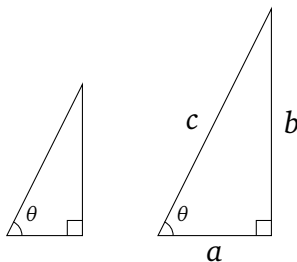
A segunda propriedade acima merece mais algumas palavras: se uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que existe $p \neq 0$ satisfazendo $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in A$, dizemos que f é periódica. Se existe um menor p positivo tal que $f(x + p) = f(x) \forall x \in A$, então dizemos que p é o período da função f . Assim, as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π . Seus gráficos, portanto, podem ser completamente conhecidos se forem conhecidos em um intervalo fechado de comprimento 2π .



5.3 As funções trigonométricas nos triângulos retângulos. A função tangente.

Provavelmente, o primeiro contato que temos com as funções sen e cos envolvem um triângulo retângulo e as palavras “cateto adjacente”, “cateto oposto” e “hipotenusa”. Vamos lembrar como isso funciona.

Dado um ângulo $\theta \in]0, \pi/2[$, considere triângulos retângulos que possuem um dos ângulos internos igual a θ . Todos esses triângulos são semelhantes:



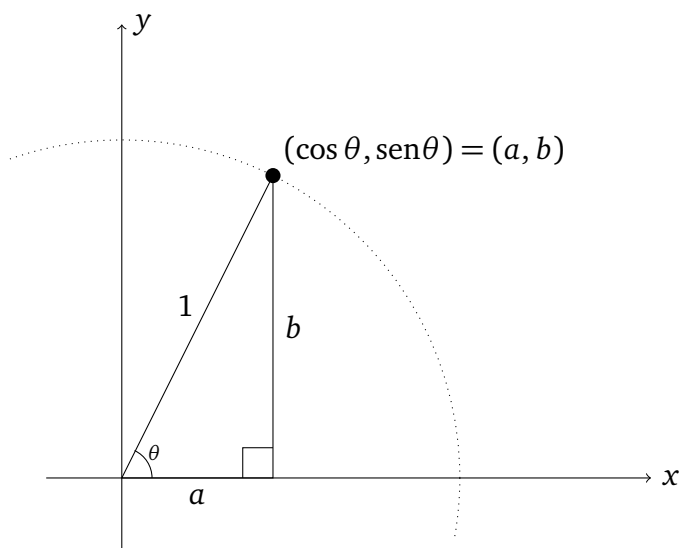
Assim, a razão a/c entre o cateto adjacente ao ângulo de medida θ e a hipotenusa do triângulo retângulo é igual em todos esses triângulos. Esta razão recebe o nome de $\cos \theta$:

$$\cos \theta = \frac{a}{c}.$$

De forma similar, definimos

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{c}.$$

É fácil ver que estas definições coincidem com a definição de seno e cosseno dadas pelo círculo trigonométrico. De fato, se a hipotenusa do triângulo retângulo tem medida $c = 1$, temos $a = \cos \theta$, $b = \operatorname{sen} \theta$ e podemos desenhar a seguinte figura:



Portanto a nossa definição usando o círculo trigonométrico coincide com a definição nos triângulos retângulos e tem a vantagem de poder ser estendida para qualquer ângulo real.

Ainda aproveitando o triângulo retângulo da direita da figura do início desta seção,

introduzimos mais uma função trigonométrica, chamada tangente (símbolo: tg):

$$\text{tg}\theta = \frac{b}{a}.$$

Esta definição serve para ângulos agudos, mas é fácil generalizá-la para ângulos fora do intervalo $]0, \pi/2[$. Definimos

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta},$$

e observamos que, no triângulo retângulo,

$$\text{tg}\theta = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}.$$

O domínio da função tangente não é $\mathbb{R}$, pois precisamos excluir os ângulos que possuem cosseno nulo. Observando o círculo trigonométrico,

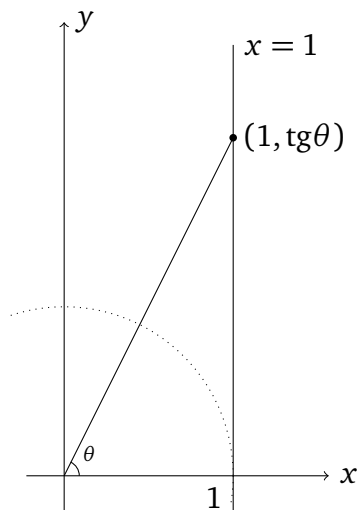
$$\cos\theta = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

logo

$$D(\text{tg}) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

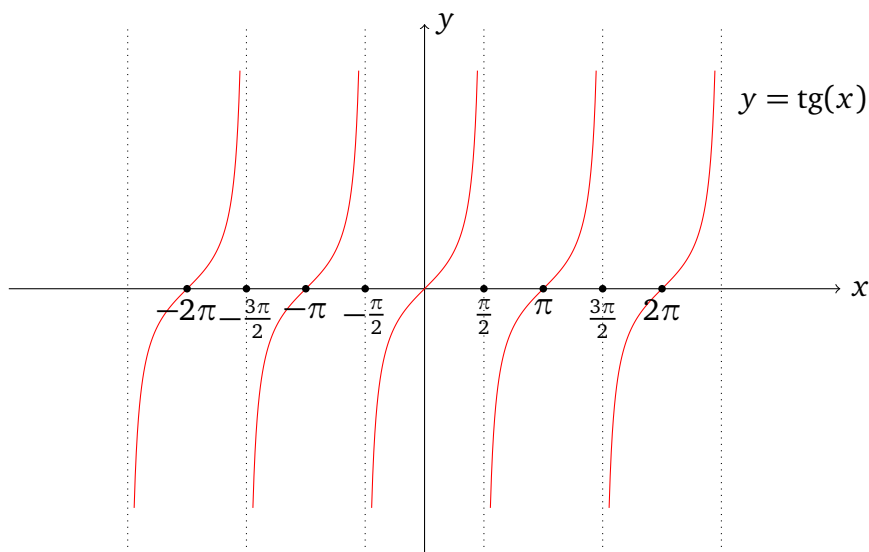
Assim como as funções seno e cosseno de um ângulo θ podem ser lidas a partir de um desenho no círculo trigonométrico, o mesmo se dá com a função tangente, com pequenas adaptações. Se um triângulo retângulo possui um ângulo igual a θ ($0 < \theta < \pi/2$), e se o cateto adjacente ao ângulo θ tem comprimento igual a 1, então o cateto oposto a este mesmo ângulo tem comprimento igual a $\text{tg}\theta$.

Deste modo, não é difícil ver que, dado qualquer $\theta \in D(\text{tg})$, a reta que une os pontos $(\cos\theta, \text{sen}\theta)$ e $(0, 0)$ intersecta a reta vertical de equação $x = 1$ no ponto $(1, \text{tg}\theta)$.



Desta interpretação geométrica da tg no círculo trigonométrico, é fácil perceber que a função tangente também é periódica e seu período é π . Também poderíamos ter chegado à mesma conclusão observando que, no círculo trigonométrico, os ângulos θ e $\theta + \pi$ correspondem a pontos diametralmente opostos. Assim, $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen} \theta$ e $\operatorname{cos}(\theta + \pi) = -\operatorname{cos} \theta$, de onde segue que $\operatorname{tg}(\theta + \pi) = \operatorname{tg} \theta$.

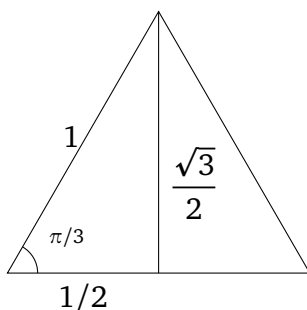
Segue também da interpretação geométrica da tangente no círculo trigonométrico que $\mathfrak{J}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$, e não é difícil fazer um esboço do gráfico da função tg :



5.4 Cálculo das funções trigonométricas para alguns ângulos “comuns”. Paridade das funções seno e cosseno

Termos uma definição clara das funções $\sin$, $\cos$ e $\tan$ não é sinônimo de conseguirmos calculá-las facilmente para qualquer ângulo θ . Porém, estes cálculos são possíveis para certos ângulos, desde que encontremos um triângulo adequado. Vejamos os exemplos mais comuns.

Dado um triângulo equilátero de lado 1 (cujos ângulos internos são iguais a $\pi/3$), a altura correspondente a um dos vértices encontra o lado oposto no seu ponto médio. Assim, o teorema de Pitágoras implica que esta altura tem comprimento $\sqrt{3}/2$.



Portanto, observando que o outro ângulo deste triângulo retângulo é igual a $\pi/6$, temos

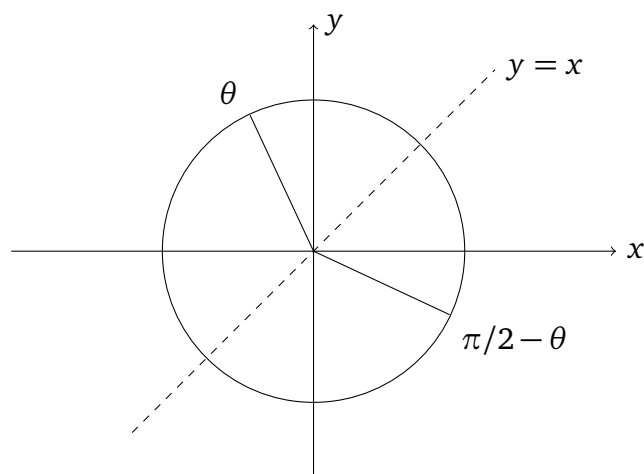
$$\begin{aligned}\sin(\pi/3) &= \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(\pi/3) &= \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}, \\ \tan(\pi/3) &= \sqrt{3}, \\ \tan(\pi/6) &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

Note que o que fizemos para os ângulos $\pi/3$ e $\pi/6$ acima valem para quaisquer ângulos complementares, isto é, cuja soma é igual a $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad \cos(\pi/2 - x) = \sin(x).$$

Na igualdade acima, x pode ser qualquer número real. De fato, basta notar que, no círculo trigonométrico, ângulos complementares correspondem a pontos simétricos em relação à

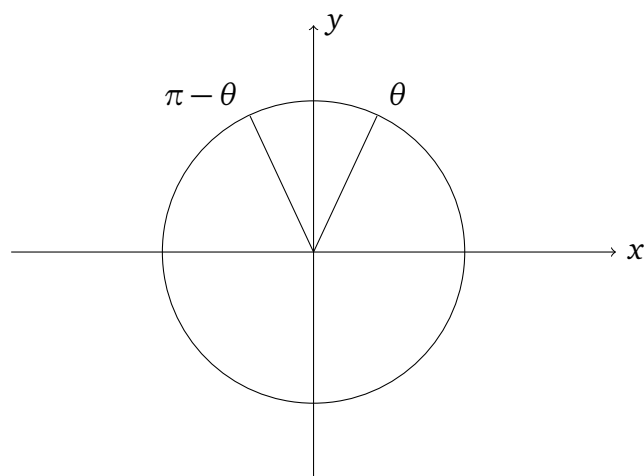
reta $y = x$, isto é, à reta que passa pela origem e cujo ângulo com o eixo x é igual a $\pi/4$.



Um raciocínio análogo mostra que ângulos suplementares (isto é, cuja soma é igual a π), possuem o mesmo seno e cossenos opostos:

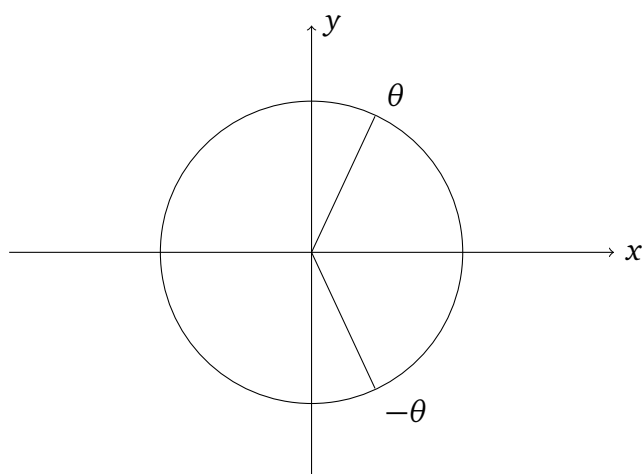
$$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}(x) \quad \text{e} \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

Isto vale porque ângulos suplementares correspondem a pontos no círculo trigonométrico que são simétricos em relação à reta vertical $x = 0$ (o famoso “eixo y ”).



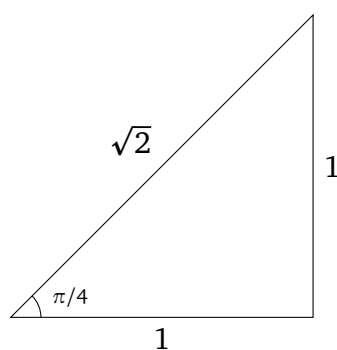
Finalmente, outro fato que segue de uma simetria no círculo trigonométrico diz respeito à paridade das funções seno e cosseno: os ângulo θ e $-\theta$ correspondem a pontos no círculo que são simétricos em relação à reta horizontal $y = 0$ (o “eixo x ”). Assim, $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ e $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, o que costuma ser resumido dizendo que $\cos$ é uma

função par e $\sin$ é uma função ímpar. O fato de $\cos$ ser par implica que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y , e o fato de $\sin$ ser ímpar implica que seu gráfico é simétrico em relação à origem $(0, 0)$.



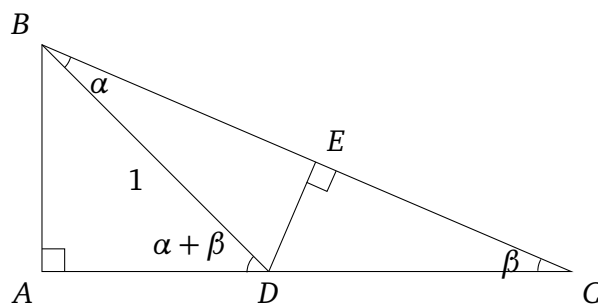
Agora voltemos aos cálculos mais comuns, depois desta saída pela “tangente”. Se considerarmos um triângulo retângulo isósceles cujos catetos tem comprimento igual a 1, sua hipotenusa tem comprimento igual a $\sqrt{2}$. Segue que

$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{tg}(\pi/4) = 1.$$



5.5 Fórmulas de adição de arcos, e ainda outras fórmulas

Considere a figura abaixo:



Supondo que $BD = 1$, temos $AB = \text{sen}(\alpha + \beta)$, $BE = \cos \alpha$, $DE = \text{sen} \alpha$, e $DE/CE = \text{tg} \beta \iff CE = \text{sen} \alpha / \text{tg} \beta$. No triângulo retângulo ABC , temos ainda

$$\begin{aligned} \text{sen} \beta &= \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BE + CE} = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos \alpha + \frac{\text{sen} \alpha}{\text{tg} \beta}} \iff \\ \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen} \beta \cos \alpha + \frac{\text{sen} \alpha \text{sen} \beta}{\text{tg} \beta} \iff \\ \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen} \beta \cos \alpha + \frac{\text{sen} \alpha \text{sen} \beta \cos \beta}{\text{sen} \beta} \iff \\ \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen} \alpha \cos \beta + \text{sen} \beta \cos \alpha. \end{aligned}$$

O nosso desenho faz sentido quando α , β e $\alpha + \beta$ são ângulos agudos, mas com um pouco mais de esforço pode-se mostrar que a fórmula acima é válida para quaisquer α e β reais. Lembrando que o seno é uma função ímpar e cosseno é uma função par, segue que

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha - \beta) &= \text{sen}(\alpha + (-\beta)) \\ &= \text{sen} \alpha \cos(-\beta) + \text{sen}(-\beta) \cos \alpha \\ &= \text{sen} \alpha \cos \beta - \text{sen} \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

Agora, observando que $\cos(x) = \text{sen}(\pi/2 - x)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \text{sen}(\pi/2 - \alpha - \beta) \\ &= \text{sen}((\pi/2 - \alpha) - \beta) \\ &= \text{sen}(\pi/2 - \alpha) \cos \beta - \text{sen} \beta \cos(\pi/2 - \alpha) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \end{aligned}$$

E novamente usando a paridade das funções seno e cosseno, obtemos

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Estas fórmulas são importantes o suficiente para serem resumidas em um teorema:

Teorema 5.1 (Fórmulas de adição de arcos). *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então*

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha,$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Estabelecidas as fórmulas acima para as funções seno e cosseno, podemos fazer o mesmo para função tangente. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \right)} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\operatorname{sen} \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

Evidentemente, a fórmula acima vale desde que α , β e $\alpha + \beta$ pertençam ao domínio da função tangente. Tomando cuidados similares, temos também (usando o fato que tg é ímpar):

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Alguns casos particulares das fórmulas de adição aparecem com frequência suficiente

para uma menção especial. Por exemplo, é muito comum termos que lidar com as fórmulas de arco duplo

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x + x) = 2\operatorname{sen}x \cos x$$

e

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x,$$

sendo que nesta última utilizamos a identidade fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

A partir das fórmula de adição de arcos para as funções seno e cosseno, podemos obter outras fórmulas úteis, que transformam somas em produtos ou vice-versa. Por exemplo, segue de

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}a \cos b + \operatorname{sen}b \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}a \cos b - \operatorname{sen}b \cos a$$

que

$$\operatorname{sen}a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)),$$

isto é, podemos transformar um produto de um seno e um cosseno em uma soma de senos. Analogamente, temos

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

e

$$\operatorname{sen}a \operatorname{sen}b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)).$$

Com uma pequena mudança de variáveis, podemos usar as três igualdades acima para obter fórmulas que transformam somas em produtos. Por exemplo, a partir de

$$\operatorname{sen}a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)),$$

se fizermos $x = a + b$ e $y = a - b$, obtemos $a = (x + y)/2$, $b = (x - y)/2$ e

$$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right).$$

Analogamente, podemos obter também

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x-y}{2} \right) \cos \left(\frac{x+y}{2} \right),$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right),$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x-y}{2} \right).$$

5.6 Secante, cossecante e cotangente

As funções seno e cosseno são as protagonistas da trigonometria, com a função tangente completando o pódio. Mas ainda existem outras funções trigonométricas coadjuvantes que vale a pena conhecer. São elas: a secante, a cossecante e a cotangente. Por definição,

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad \operatorname{cossec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \quad \cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)},$$

e seus domínios são

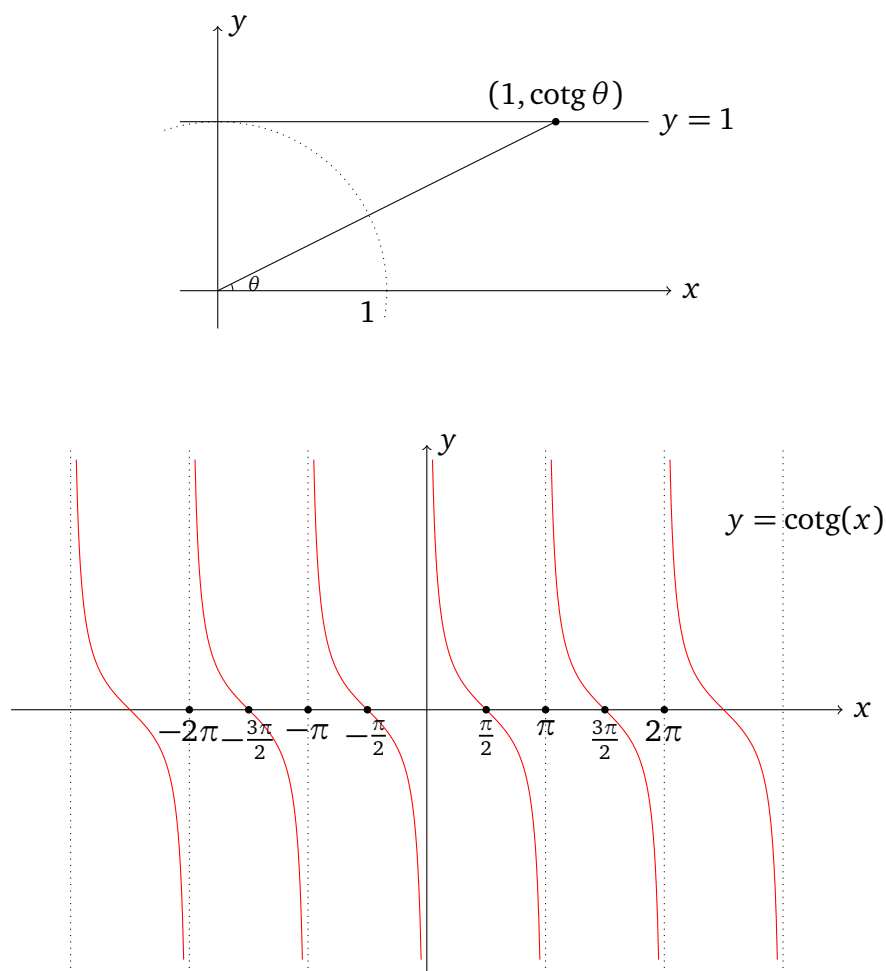
$$D(\sec) = \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

$$D(\operatorname{cossec}) = D(\cotg) = \mathbb{R} - \{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

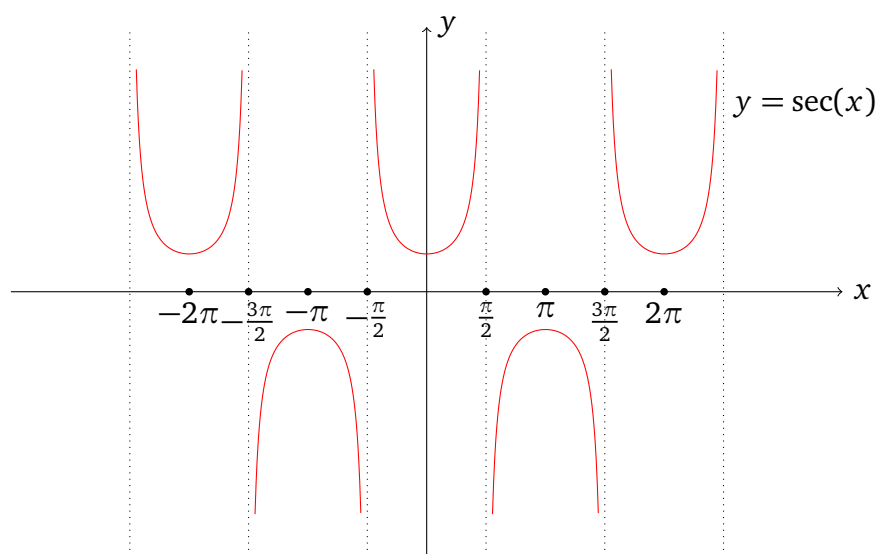
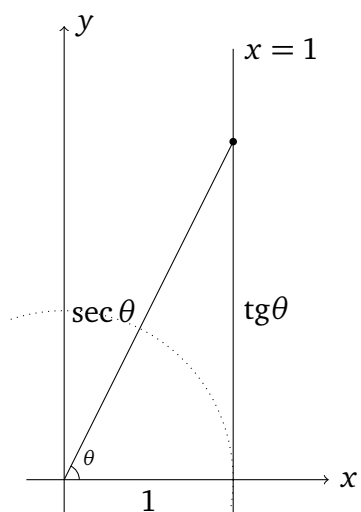
As seguintes identidades são imediatas a partir da relação fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad \cotg^2 x + 1 = \operatorname{cossec}^2 x.$$

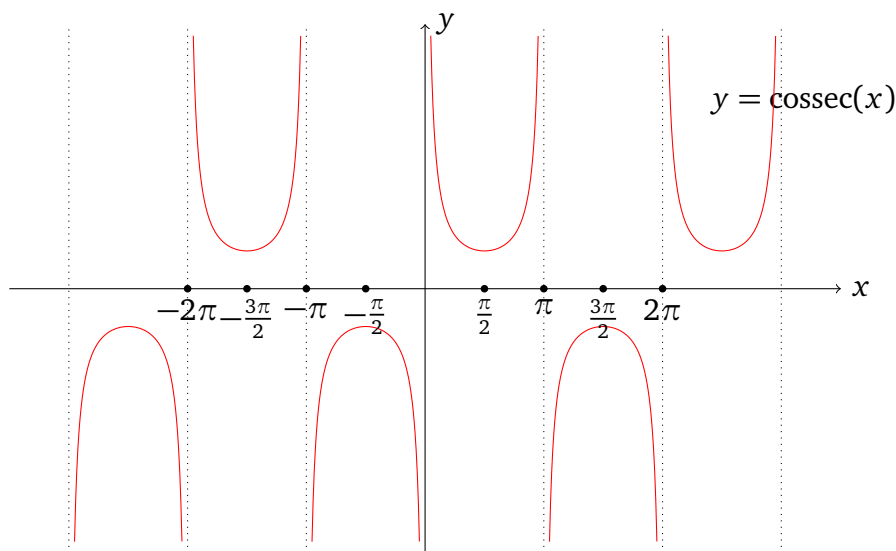
Pode-se argumentar, com certa razão, que as funções secante, cossecante e cotangente são redundantes e não precisariam ser definidas. Apesar disso, existem situações em que é conveniente ter tais funções definidas (como no Cálculo, por exemplo...). A seguir, apresentamos os seus gráficos, observando que os períodos das funções secante, cossecante e cotangente são iguais a 2π , 2π e π , respectivamente. Começamos com o gráfico da cotangente, que pode ser obtido de modo similar ao gráfico da tangente a partir da seguinte observação geométrica, que fica como exercício:



Para fazer o gráfico da função secante, é útil pensar na seguinte interpretação geométrica, que é imediata da relação $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$: a hipotenusa do triângulo retângulo abaixo tem comprimento igual a $\sec \theta$.



Analogamente, podemos esboçar o gráfico da função cotangente:



5.7 Equações trigonométricas

As três equações trigonométricas básicas são as seguintes:

- (1) $\cos(x) = \cos \theta$, para algum θ fixo;
- (2) $\sin(x) = \sin \theta$, para algum θ fixo;
- (2) $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg} \theta$, para algum θ fixo;

Lembrando a definição geométrica destas funções usando o círculo trigonométrico e levando em conta a periodicidade de tais funções, não é difícil resolvê-las. Por exemplo, as soluções de

$$\cos(x) = \cos \theta$$

são dadas por

$$x = \begin{cases} \theta + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}, \text{ ou} \\ -\theta + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Por sua vez, as soluções de

$$\sin(x) = \sin \theta$$

são dadas por

$$x = \begin{cases} \theta + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}, \text{ ou} \\ (\pi - \theta) + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

e, finalmente, as soluções de

$$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}\theta$$

são dadas por

$$x = \theta + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vejamos um exemplo simples: considere a equação

$$\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) = 2.$$

Seja $y = \operatorname{sen}(x)$. A equação é equivalente a $y^2 - y - 2 = 0$, cujas soluções são $y = 2$ e $y = -1$. Portanto as soluções da nossa equação são os números reais x tais que $\operatorname{sen}(x) = 2$ ou $\operatorname{sen}(x) = -1$. A equação $\operatorname{sen}(x) = 2$ não possui solução, pois a imagem da função seno é $[-1, 1]$. Por outro lado,

$$\operatorname{sen}(x) = -1 = \operatorname{sen}(3\pi/2) \iff x = \begin{cases} 3\pi/2 + 2k\pi, & \text{para } k \in \mathbb{Z}, \text{ ou} \\ \pi - 3\pi/2 + 2k\pi, & \text{para } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Finalmente, observe que os conjuntos

$$\{3\pi/2 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{e} \quad \{\pi - 3\pi/2 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

são iguais, logo o conjunto solução da equação é

$$\{3\pi/2 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Vejamos outro exemplo:

$$\operatorname{sen}(2x) - \cos(x) = 0.$$

Aqui, obviamente nos lembramos da identidade $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, o que nos per-

mite escrever:

$$\begin{aligned}\sin(2x) - \cos(x) &= 0 \iff \\ 2\sin(x)\cos(x) - \cos(x) &= 0 \iff \\ \cos(x)(2\sin(x) - 1) &= 0 \iff \\ \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) &= 1/2.\end{aligned}$$

As soluções da equação $\cos(x) = 0$ são da forma $x = \pi/2 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o que pode ser abreviado para $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, as soluções de $\sin(x) = 1/2$ são dadas por $x = \pi/6 + 2k\pi$ ou $x = 5\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Resumindo, o conjunto solução da nossa equação é

$$\{\pi/2 + k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/6 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/6 + 2k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

5.8 Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas não são inversíveis (pois são periódicas, e portanto não injetoras), mas há situações em que gostaríamos que elas possuíssem uma inversa. Por exemplo, dada a equação

$$5 \cos(x) = 1,$$

sabemos que ela tem uma solução, pois existe um ângulo (entre 0 e $\pi/2$, por exemplo), cujo cosseno é $1/5$. Porém, não sabemos exatamente o valor deste ângulo. A “solução” é inventar uma função que faça o papel da inversa do cosseno, e assim poderíamos escrever “ $\theta = \cos^{-1}(1/5)$ ” para nos referir a um ângulo θ cujo cosseno fosse igual a $1/5$. É uma situação análoga à equação exponencial $2^x = 7$: já que não conseguimos resolvê-la explicitamente, usamos a função logaritmo (que é a inversa da exponencial) para escrever a solução como $x = \log_2 7$. Evidentemente, temos que lidar com a dificuldade das funções trigonométricas não possuírem inversas, o que faremos restringindo o domínio das funções que quisermos inverter.

Começemos com a função cosseno. Note que, restrita ao domínio $[0, \pi]$, a função $\cos$ é uma bijeção cuja imagem é $[-1, 1]$. A inversa desta função é a função arco cosseno:

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Em primeiro lugar observamos que costumamos escrever arccos no lugar de $\cos^{-1}$ (exercício: encontre uma calculadora que usa a notação $\cos^{-1}$). Em segundo lugar, o contradomínio $[0, \pi]$ não é o único possível para definirmos uma “inversa” da função cosseno. Poderíamos ter escolhido, por exemplo, o intervalo $[-\pi, 0]$, pois este também contém exatamente um ângulo para cada valor possível da função cosseno. A escolha do intervalo $[0, \pi]$ é uma convenção usada universalmente, embora você, leitor, não tenha tido nenhuma voz nesta escolha. Um consolo: também o autor destas linhas não teve escolha alguma.

Analogamente podemos definir também a função “inversa” do seno, chamada “arco seno”:

$$\arcsen: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2].$$

E, finalmente, podemos definir também a função “inversa” da tangente, cujo nome obviamente só pode ser “arco tangente”:

$$\arctg: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2).$$

Mais uma vez lembramos que as escolhas dos contradomínios acima não são as únicas possíveis, mas são as convenções adotadas por todos.

Como as funções arccos, arcsen e arctg não são exatamente as inversas das funções cos, sen e tg, alguns cuidados são necessários. Por exemplo, embora seja verdade que $\sen(\arcsen(x)) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$ e que $\arcsen(\sen(\theta)) = \theta$ para todo $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, não é verdade que $\arcsen(\sen(\theta)) = \theta$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\arcsen(\sen(2\pi/3)) = \pi/3.$$

Esta é uma inconveniência causada pelo fato da função seno não ser bijetora. Porém, a conveniência de podermos fazer referência à função arcsen é maior que este pequeno incômodo.

Na prática, trabalhar com as funções trigonométricas inversas não é complicado. Para dar um exemplo, vamos calcular

$$\sen(\arccos(x)), \quad x \in [-1, 1].$$

Falando de modo simples, queremos calcular o seno do ângulo cujo cosseno é x . Seja $\theta = \arccos(x)$. Temos $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \iff x^2 + \sin^2 \theta = 1 \iff \sin^2 \theta = 1 - x^2 \iff \sin \theta = \pm \sqrt{1 - x^2}$. Agora temos que decidir o sinal correto nesta última igualdade. Lembrando que o contradomínio da função $\arccos$ é $[0, \pi]$, temos $\sin \theta \geq 0$. Portanto $\sin \theta = \sqrt{1 - x^2}$, isto é,

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Voltando à motivação inicial, também podemos usar as funções trigonométricas inversas para resolver equações trigonométricas. Ao nos depararmos, por exemplo, com a equação

$$\operatorname{tg}(x) = 2,$$

podemos falar imediatamente que suas soluções são os números da forma

$$x = \operatorname{arctg}(2) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

pois não sabemos o valor exato do ângulo cuja tangente é 2. Ou melhor, sabemos sim: é $\operatorname{arctg}(2)$!