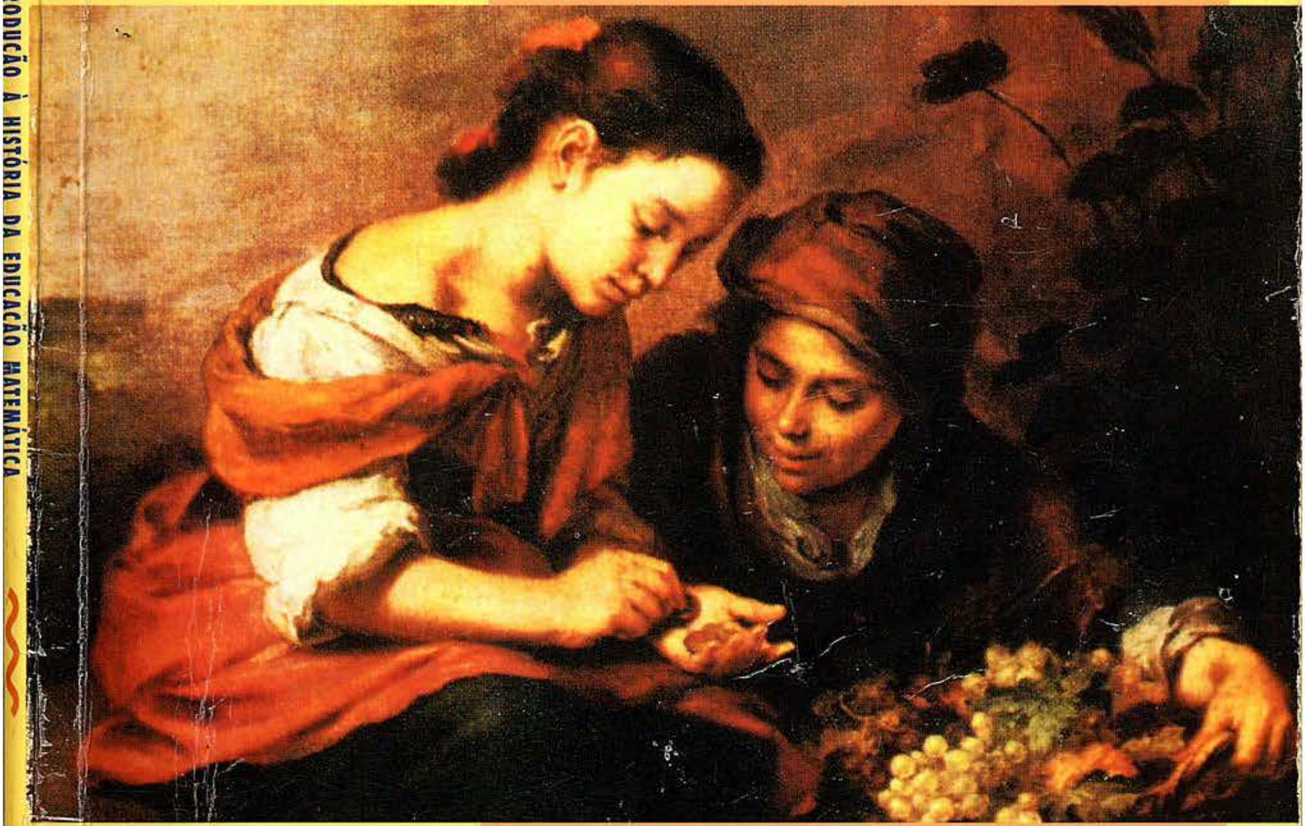
MARIA ÂNGELA MIORIM



INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ATUAL EDITORA

INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MARIA ÂNGELA MIORIM

MARIA ÂNGELA MIORIM

Mestra em Matemática — UNICAMP
Doutora em Educação — UNICAMP
Professora-assistente Doutora da
Faculdade de Educação — UNICAMP

INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

3ª reimpressão

ATUAL EDITORA

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2004.
Av. Marquês de São Vicente, 1697 — Barra Funda
01139-904 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3613-3000
Fax: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Miorim, Maria Ângela
Introdução à história da educação matemática / Maria Ângela Miorim. — São Paulo : Atual, 1998.

Bibliografia.
ISBN 85-7056-870-3

1. Matemática – Ensino – História I. Título.

97-5326 CDD-510.9

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Educação: História 510.9

Introdução à História da Educação Matemática

Desenvolvimento de produto

Gerente: Wilson Roberto Gambeta
Editora: Rubette Ribeiro dos Santos
Assessora editorial: Oscarina Camillo
Editor de texto: Roberto B. Albuquerque
Imagem de capa: *Meninas vendendo frutas*, 1670, Bartolomé Esteban Murillo

Produção editorial

Gerente: Cláudio Espósito Godoy
Assistente: Sandra A. Celestino de Oliveira
Revisão: Maria Luiza Xavier Souto (coord.) Maria Cecília F. Vannucchi
Editor de arte: Celson Scotton
Diagramação: Rosi Meire Martins Mariano
Editoração eletrônica: Silvia Regina E. Almeida (coord.)/Grace Alves Adriana M. Nery de Souza

Produção gráfica

Gerente: Antonio Cabello Q. Filho
Coordenador: José Rogerio L. de Simone
Assistente: Alex Sandro de Souza

Colaboradores

Preparação de texto: Marcelo P. Parreira
Projeto gráfico: Irineu Sanches
Projeto de capa: Glair Alonso Arruda
Filmes (D.T.P.): Binhos Fotolito

Visite nosso *site*: www.atualeditora.com.br
Central de atendimento ao professor: (0xx11) 3613-3030

Apresentação

Esta obra apresenta o resultado de um trabalho de pesquisa, cuja intenção inicial era estudar as influências do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Mas, ao iniciar o estudo, descobri a existência de um outro movimento de modernização do ensino da Matemática, até então por mim desconhecido, ocorrido no início de nosso século. A tentativa de compreender melhor as idéias propostas por esse movimento acabou levando-me à necessidade de entender, ao menos em linhas gerais, o caminho percorrido pelo ensino da Matemática. Nesse momento, comecei a perceber a dificuldade de tal empreitada, especialmente pela inexistência de obras que discutissem tal assunto. Os poucos textos localizados apresentavam uma história muito resumida ou então estudos de momentos específicos. Foi assim que, para atender a uma necessidade pessoal, acabei tentando escrever a minha — primeira — versão da história da Educação Matemática.

Ao escrever essa história da Educação Matemática, orientei-me pelo eixo da modernização. Estava interessada em explicitar as idéias, os momentos e as pessoas que, a meu ver, desempenharam um papel significativo no caminho do rompimento com o estilo euclidiano de se ensinar Matemática. Nesse sentido entendi o moderno. O moderno representando o rompimento com o antigo, com o que estava estabelecido. No caso, com o conteúdo e a forma de apresentação da Matemática presentes nos *Elementos* de Euclides.

O resultado dessa minha primeira leitura da história da Educação Matemática é apresentado nesta obra. Essa leitura é, entretanto, inacabada, incompleta... como toda história. Ela representa apenas um olhar. Outros olhares levariam a outras histórias.

Espero que esse olhar possa oferecer aos futuros professores uma visão geral do caminho histórico percorrido pelo ensino da Matemática, auxiliando-os na compreensão de suas atuais características.

Além disso, gostaria de poder despertar o interesse pelo aprofundamento dessa interessante história... da Educação Matemática.

Maria Ângela Miorim

Sumário

Introdução

A Matemática, cujas primeiras manifestações surgiram ainda no período Paleolítico, ligadas diretamente às necessidades práticas impostas pelo contexto social, passou por muitos momentos qualitativamente diferentes durante o seu longo desenvolvimento. Em algumas etapas desse percurso, o ensino dos conhecimentos matemáticos esteve associado à sua produção. Mas, à medida que tais conhecimentos eram ampliados e as condições sócio-político-econômicas se transformavam, esse ensino começava a ter um desenvolvimento independente.

O ensino dos conhecimentos matemáticos começou a acontecer de maneira intencional no período das antigas civilizações orientais. Nessa época, apesar de ainda estar dando os seus primeiros passos e possuir um caráter essencialmente prático, a Matemática, já considerada uma ciência nobre, era desenvolvida separadamente das "artes técnicas". Seu ensino era reservado apenas aos membros de uma classe privilegiada: a dos escribas, dos altos funcionários e dos dirigentes.

Podemos então afirmar que, desde o momento em que a Matemática começou a tomar forma como uma área de conhecimento, já estava associada a uma classe privilegiada, já era considerada uma ciência nobre, desligada dos ofícios, das atividades manuais.

A tensão entre as "artes manuais" e as "artes cultas" intensificou-se na Grécia, especialmente por meio das propostas filosóficas dos pitagóricos e dos platônicos.

A mudança de perspectiva dos estudos matemáticos, surgida com o nascimento da Matemática racional — cuja preocupação fundamental era a busca dos princípios que regiam os resultados matemáticos —, trouxe como conseqüências a priorização dos estudos teóricos e a desvalorização das aplicações práticas.

Nesse sentido, a Matemática grega representou uma primeira mudança de perspectiva, um primeiro rompimento com os estudos antigos.

Na Grécia, entre os séculos VI a.C. e IV a.C., as mudanças profundas que aconteceram, não apenas nos estudos matemáticos, mas, também, na educação, influenciariam todo o desenvolvimento futuro da Matemática e de seu ensino.

Foi nesse período que, pela primeira vez, a Matemática passou a ser considerada um elemento fundamental para a formação dos indivíduos, sendo incluída num ciclo normal de estudos. O valor formativo atribuído à Matemática, reconhecido, inicialmente, pelos pitagóricos, apenas para o círculo fechado dos filósofos, seria, depois, ampliado pelos sofistas.

Os sofistas, entretanto, associavam esse valor às necessidades da retórica. Para melhor dominar a arte da palavra, era necessário saber discorrer sobre todos os assuntos, inclusive aqueles relativos à Matemática, um dos campos mais desenvolvidos. Todos que quisessem ser bons oradores — o ideal de formação naquele período — deveriam conhecer ao menos alguns elementos básicos da Matemática.

A proposta platônica reforçou ainda mais o valor formativo da Matemática, não por sua importância para a retórica ou para as aplicações práticas, mas por seu "poder" de desenvolver o pensamento humano, o seu raciocínio.

Apesar das divergências existentes entre sofistas e platônicos sobre a melhor formação — se a filosófica ou a retórica —, a Matemática acabou sendo reconhecida por todos como um elemento formativo fundamental, especialmente por sua capacidade de desenvolver o raciocínio. Só não se chegou a um acordo sobre o nível de profundidade no qual esses estudos deveriam ser desenvolvidos.

A proposta de Platão também reforçava o caráter nobre da Matemática, que existia desde as civilizações antigas. Realmente, embora sua proposta considerasse a Matemática importante para o desenvolvimento de todos os indivíduos, em seus níveis mais elevados destinava-se apenas a alguns poucos privilegiados, os "melhores espíritos", os "mais talentosos".

Essas características da Matemática e de seu ensino permaneceram durante os períodos helenístico e romano, apesar de a crescente valorização dos estudos literários acarretar uma redução do espaço destinado aos estudos matemáticos.

Com a Idade Média e o início de um ensino essencialmente religioso, os estudos matemáticos praticamente desapareceriam do Ocidente.

A Matemática, que se desenvolveu na Grécia em grande parte desligada dos aspectos práticos e manuais, ressurgiria associada às aplicações práticas, às artes produtivas, às artes mecânicas...

Não foram mais as questões teóricas, que procuravam justificar os resultados matemáticos, os norteadores dessa "moderna Matemática", mas as novas necessidades impostas pelo contexto sócio-político-econômico, que exigia respostas práticas, aplicadas.

A antiga separação existente entre as "artes práticas" e as "artes cultas" se intensificou, e o ensino de Matemática, que passou a ser fundamental para as duas, começou a assumir feições diferentes.

Por um lado, um ensino ligado à "arte culta", voltado para o desenvolvimento do raciocínio, baseado na proposta platônica, interessado na formação das classes dirigentes e privilegiando os estudos clássicos.

Por outro lado, um ensino voltado para o desenvolvimento das "artes práticas", destinado aos membros de uma nova classe emergente — a burguesia — e privilegiando o ensino das ciências práticas, da "nova Matemática".

Esses dois tipos de ensino, desenvolvidos em diferentes tipos de escolas, com características e objetivos próprios, prosseguiram, apesar de vários alertas, até o final do século XIX, quando as condições sócio-político-econômicas tornaram impossível essa convivência.

Dentro da tensão estabelecida entre a "nova Matemática" e a ciência dos antigos, representadas pelos dois diferentes tipos de ensino — um desenvolvido nas escolas técnicas de nível médio e nos cursos superiores técnicos, outro nas escolas de tipo secundário e nas universidades —, é que estariam as raízes do Primeiro Movimento para a Modernização do Ensino de Matemática, como veremos adiante.

Acreditamos que uma melhor compreensão das origens e das principais características desse Primeiro Movimento, bem como das influências que ele teria exercido no ensino de Matemática em diferentes países, em particular no Brasil, pode fornecer elementos fundamentais para a análise da situação atual da Educação Matemática e orientar futuras propostas pedagógicas. Por isso, apresentamos neste trabalho um estudo histórico do ensino de Matemática, orientado pelo eixo da modernização.

Capítulo I

O ensino de Matemática: das origens ao ensino clássico

Quando é que, portanto, retomou Sócrates, a alma atinge a verdade? Não há dúvida que quando ela procura encarar qualquer questão com a ajuda do corpo, ele a engana radicalmente.

— Dizes a verdade.

— Não é, por conseqüência, verdade que é no ato de raciocinar que a alma, se alguma vez o consegue, vê manifestar-se plenamente a realidade dum ser?

(Platão)

Esse fragmento de Platão, retirado do diálogo *Fédon*, nos dá uma idéia de como o seu sistema filosófico considerava inadequado qualquer apelo aos sentidos. Esse apelo poderia perturbar a alma e impedi-la de pensar. Seria apenas através do raciocínio puro, sem o auxílio de outros sentidos, ou seja, sem o auxílio do corpo, que a alma conseguiria chegar à "verdade das coisas".

A Matemática, portanto, em sua forma pura, independentemente dos problemas práticos e aplicados, tornou-se um elemento fundamental para esse sistema. Reservou-se a ela o passo fundamental, embora intermediário, uma vez que à dialética cabia a síntese entre o mundo sensível e o mundo inteligível.

Estamos, então, no século IV a.C., em uma Atenas que, ao sentir o declínio de seu poder político e de sua estrutura interna, busca "no reino dos céus" um novo ideal de Estado e de sociedade, "depois de ver como se desmoronava o reino da Terra" (Jaeger, s/d, p. 452).

Contudo, essa época já estava distante muitos séculos do surgimento das primeiras noções rudimentares do que viria a ser chamado Matemática. Essa origem perde-se nos tempos remotos do período Paleolítico.

As origens

Nos primeiros tempos do Paleolítico, o homem vivia da caça, da pesca e da coleta de sementes, frutos e raízes, e não tinha nenhum domínio sobre a produção desses alimentos. Essa total dependência da natureza refletia, é claro, o pequeno domínio do homem sobre as técnicas básicas, necessárias à produção de alimentos. Surgiria, então, a magia como forma de preencher essa "lacuna criada pelas limitações da técnica" (Bernal, 1969, v. 1, p. 74). Mas a magia, ao mesmo tempo que confirmava essas limitações, dava o impulso inicial no caminho das representações e das relações entre as formas, consistindo no primeiro passo do longo caminho que levaria ao simbolismo gráfico e à escrita.

As primeiras pinturas rupestres do Paleolítico, ou seja, as primeiras representações conhecidas, foram provavelmente realizadas por motivos mágicos. É possível que o homem daquele período acreditasse que as representações — formas planas de animais, de seus ossos e órgãos internos —, associadas a rituais sagrados, garantiriam maior quantidade e melhor qualidade da caça.

No período seguinte — o Neolítico — desenvolveram-se a agricultura, a domesticação e criação de animais e a fabricação de novos instrumentos e armas. Isso fez com que já não existisse mais uma dependência total da natureza. As pinturas desse período não tentam reproduzir, com a maior perfeição possível, animais, objetos e pessoas, mas mostram representações esquemáticas, em que eram bastante utilizadas simetrias e congruências. Mas, por que teriam surgido essas pinturas geométricas? E por que o uso de simetrias e congruências? Seria outra forma de magia? Ou teria sido a observação da natureza, tão cheia de exemplos geométricos, que inspirou essas novas pinturas?

Existem várias conjeturas que tentam justificar a origem desse tipo de representação geométrica, encontrada tanto na pintura — em especial nas cerâmicas — como nos trançados das cestas e, posteriormente, na tecelagem. Alguns autores, como Eves (1969,1992), acreditam que a observação das simetrias existentes na natureza, e a conseqüente percepção de seu valor artístico e estético, teria levado o homem a utilizar tais representações e a perceber suas regularidades. Outros, como Gerdes (1991), entretanto, defendem que as necessidades objetivas e as formas encontradas para resolvê-las — seja na fabricação de ferramentas, seja no entrelaçamento de cestas ou na tecelagem — teriam levado o homem à identificação de certas formas geométricas, em especial a simetria, como as mais adequadas, ou seja, as mais racionais. Para esses autores, o trabalho com as simetrias despertaria no homem a atenção para o seu valor estético ou artístico. É possível, ainda, considerar que tanto a observação da natureza como as necessidades objetivas teriam contribuído, em maior ou menor grau, para o surgimento dessas representações. Entretanto, qualquer que seja a posição assumida sobre a origem dessas pinturas, é claro que elas indicam um avanço com relação à percepção de conceitos e propriedades geométricas.

Não apenas os conhecimentos geométricos, mas também os numéricos, foram desenvolvidos desde os tempos primitivos como resposta a determinadas necessidades sociais.

O conceito de número surgiu, possivelmente, da necessidade de estimar quantidades, sejam elas de alimentos, de animais ou de pessoas. O seu desenvolvimento, no entanto, aconteceu de forma muito lenta, desde a percepção de diferenças e semelhanças entre coleções de objetos com características diferentes e o estabelecimento de correspondências biunívocas entre esses objetos, até a representação de quantidades, por meio de coleções de pedras, de riscos em pedaços de pau ou em ossos, ou de técnicas digitais e corporais. Apesar de esse caminho ter sido longo, as primeiras representações aconteceram ainda no Paleolítico. Pelo menos é o que nos indicam os vários exemplos dessas representações, em ossos ou pedaços de pau, datadas de 30 mil a 8 mil anos atrás. Alguns deles confirmam o conhecimento, em períodos bastante remotos, por volta de 10000 a.C., de tábuas de multiplicação e da existência de números primos.

Essa afirmação pode surpreender muitas pessoas. Afinal, não estamos falando de povos primitivos, cuja capacidade matemática era extremamente limitada? Realmente é essa a informação que nos é freqüentemente passada. Mas, caso concordemos com a posição apresentada por Bernal, somos obrigados a rever nosso ponto de vista. Para esse autor, "muitas das descrições que certos autores nos têm dado acerca das limitadíssimas capacidades matemáticas do homem primitivo mostram não tanto a ignorância do homem primitivo como a nossa ignorância acerca dos seus processos mentais" (Bernal, 1969, v. 1, p. 80).

De fato, o nosso conhecimento acerca dos povos primitivos é ainda muito limitado. As poucas informações de que dispomos estão baseadas em uma reduzida quantidade de evidências arqueológicas e em estudos antropológicos de tribos ainda existentes, que vivem em um estado de cultura primitiva. Além disso, a maior parte desses estudos antropológicos diz respeito à cultura geral desses povos, e não a questões específicas da Matemática ou de seu ensino. Entretanto, nos últimos anos, esse quadro parece estar se alterando. Pesquisas específicas têm sido realizadas com o objetivo de estudar mais profundamente os conhecimentos matemáticos dessas tribos. Esse tipo de pesquisa, realizada por pesquisadores de vários países, tem sido muitas vezes identificado pelo nome de Etnomatemática.

O grau de controle que as sociedades primitivas alcançaram sobre a natureza oferecia-lhes uma razoável qualidade de vida. Apesar disso, ainda gastavam a maior parte do tempo para repor o que haviam consumido. As tarefas eram divididas e cada membro do grupo, inclusive as mulheres e crianças, tinha sua parcela de responsabilidade nas atividades necessárias à sobrevivência da comunidade.

Nesse tipo de sociedade todos tinham, também, os mesmos "direitos", inclusive a um mesmo tipo de educação. Mas seria possível falar da existência de algum tipo de educação entre os povos primitivos? A resposta a essa questão vai depender da maneira como encaramos o processo educativo. Caso aceitemos que a transmissão dos conhecimentos, crenças e práticas adquiridas pelo grupo social às futuras gerações, como forma de garantir a sobrevivência da espécie, pode ser entendida como uma forma de educação, diremos que sim. As crianças aprendiam todos os conhecimentos, crenças e práticas, naturalmente, na convivência cotidiana com os adultos, nas atividades e festividades da tribo. Sem dúvida, não era uma educação intencional, planejada. Todos os adultos responsabilizavam-se igualmente pela educação de todas as crianças, e a tribo era o local reservado a essa educação. As crianças aprendiam tudo vendo, ouvindo e praticando, ou seja, participando da vida da comunidade. Ou, como nos diz Anibal Ponce, "usando uma terminologia a gosto dos educadores atuais [escolanovistas], diríamos que, *nas comunidades primitivas, o ensino era para a vida e por meio da vida*" (Ponce, 1983, pp. 18-9, grifo do autor).

Não existia, ainda, a separação entre os que deveriam trabalhar e os que deveriam aprender, ou melhor, entre o trabalho manual e o intelectual. Todos aprendiam tudo e da mesma maneira, espontaneamente e sem repreensão. A criança deveria crescer com suas qualidades e defeitos, ser bem tratada, o que não a impedia de, quando adulta, se integrar perfeitamente ao grupo. As crianças não podiam ser castigadas e, caso isso viesse a ocorrer, a pessoa responsável poderia ser, também, castigada. A rejeição de castigos corporais talvez possa ser justificada pela existência de uma crença entre os povos primitivos de que "todo castigo corporal degrada e que a alma do menino com quem muito se ralha ou que muito se espanca, se sente mal no seu corpo e procura separar-se dele" (Riboulet, 1951, pp. 25-6), ou, talvez, como apenas mais um direito de todos, o direito de errar e poder, sem repreensão, corrigir-se. Estudos sobre tribos indígenas atuais confirmam esse aspecto da educação primitiva. O fato de uma criança, por exemplo, quebrar vasos de barro que um adulto está fazendo não é motivo para que ela seja repreendida, uma vez que existe a crença de que uma hora a própria criança deve perceber que está fazendo algo que não deve ser feito.

Entretanto, a crescente complexidade da vida da aldeia, especialmente, devido ao significativo aumento da população, para o qual os avanços das técnicas, em particular as da agricultura, muito contribuíram, faz surgir a necessidade de liberar alguns indivíduos do trabalho material, para poder cuidar de interesses de toda a comunidade. Surge assim uma nova categoria de indivíduos — os funcionários — responsáveis pela organização de determinadas tarefas fundamentais para a aldeia. Cabia a eles a distribuição de alimentos, o sistema de irrigação, o registro do tempo, a cura de doenças e a proteção da aldeia contra a ira dos espíritos.

Temos assim, pela primeira vez, não apenas a separação entre o trabalho de execução e o de organização, mas, também, a possibilidade de ócio para algumas pessoas pensarem sobre novas técnicas e novos instrumentos. Como conseqüência, houve a produção de novos conhecimentos e o início do processo de apropriação desse saber por um grupo privilegiado.

A educação começa então a ser diferenciada e os filhos dos organizadores — os futuros dirigentes — passam a ter um tratamento especial. É o início da educação intencional, sistemática, organizada, violenta e sapiencial. Em princípio, apenas como complementação aos conhecimentos práticos das técnicas, mas, em seguida, como a única forma de educação das classes dirigentes.

Os tempos antigos

O agrupamento de várias aldeias, que chegaram a atingir, cada uma delas, ao final do Neolítico, aproximadamente mil habitantes, daria origem a uma nova forma de organização social: a cidade. As primeiras cidades se desenvolveram nos vales de grandes rios, tais como o Eufrates, o Tigre, o Nilo e o Indo, pois as inundações anuais lhes garantiam a tão necessária fertilidade do solo[1].

Ao florescer das antigas civilizações já encontramos uma sociedade dividida em classes, com a concentração do poder em mãos de uma minoria que governa a cidade. Além dos governantes-sacerdotes, a população era formada por funcionários administrativos, artífices, mercadores, trabalhadores e agricultores.

Os governantes dessas primeiras cidades, responsáveis pela administração das questões básicas da comunidade — em princípio em benefício de todos os habitantes e, posteriormente, em benefício próprio —, sentiram, rapidamente, a necessidade de registrar as transações realizadas. Nesses registros era necessário constar não apenas a quantidade como também a classe de objetos a que a transação se referia. Inicialmente, os registros não passavam de uma coleção de traços para representar a quantidade e de um desenho ou símbolo para representar o objeto. Aos poucos, entretanto, foi sendo criada uma escrita. "Desta maneira, a *escrita,* a maior e mais importante de todas as invenções manuais-intelectuais do homem, foi emergindo gradualmente da contabilidade" (Bernal, 1969, v. 1, p. 124, grifo do autor).

Apesar de já existirem os primeiros rudimentos para registro de números, o cálculo das operações tinha de ser realizado com o auxílio de outros elementos. As técnicas digitais e corporais, existentes desde o período primitivo, foram as primeiras a ser utilizadas. Julgava-se a tarefa difícil. Pelo menos é o que nos sugere um antigo texto encontrado em uma pirâmide, no qual um espírito maligno desafiava a alma de um faraó a provar que era capaz de contar nos dedos. É claro que o faraó conseguiu passar no teste, considerado, ao que tudo indica, uma tarefa

[1] Nesta parte do texto estaremos fazendo referência apenas às civilizações egípcia e mesopotâmica.

divina, ou, pelo menos, impossível de ser realizada por pessoas que não tivessem uma ligação direta com os deuses (Bernal, 1969, p. 124).

Contudo, a partir de certo momento, as técnicas digitais e corporais se tornaram insuficientes para a realização de alguns cálculos, cada vez mais complexos. Foi, provavelmente, a limitação dessas técnicas que levou à utilização de pedras como auxiliares para a realização dos cálculos, o que culminou com o surgimento de algum tipo de ábaco.

Ao lado do aperfeiçoamento dos cálculos, os registros para as quantidades também evoluíram, até que se implantou um sistema de numeração. Entretanto, a complexidade do sistema, associada à dificuldade de se operar com o ábaco, faz surgir a necessidade de um especialista em cálculo.

Alguns povos, no entanto, como os babilônios, encontravam menor dificuldade na realização de seus cálculos. Isso, pelo fato de possuírem um sistema de numeração posicional. Essa pode ser uma das razões que levaram a Matemática dos babilônios a um desenvolvimento maior que a dos egípcios.

A dificuldade na realização de operações, especialmente a multiplicação e a divisão, perdurou, todavia, durante muitos séculos, até que um sistema de numeração apropriado conseguiu se impor. Durante um longo período, pelo menos até meados do século XVI, as técnicas digitais e o ábaco eram elementos indispensáveis para a realização da contagem e dos cálculos. As operações escritas consistiam apenas em "jogos de príncipes do pensamento". Jean Vial conta-nos, como exemplo, que "um douto bispo" da Idade Média "recordara o seu 'desespero' de aluno quando lhe foi necessário aprender a fazer 'adições': só conseguiu, diz ele, compreender a aritmética 'com a graça de Deus e infindáveis estudos'" (Mialaret e Vial, s/d, v. 1, p. 316, destaques do autor). Ainda em pleno século XV, quem estivesse interessado em aprender multiplicações e divisões, teria de escolher uma universidade adequada, uma vez que apenas algumas delas, provavelmente da Itália, tinham condições de oferecer "instruções tão avançadas" e ainda com o auxílio do ábaco. Além disso, ao menos até o início do século XVI, não se considerava completo o manual de aritmética que não fornecesse instruções sobre o método digital de contagem.

Portanto, não nos deve causar admiração quando, por exemplo, Montaigne (1533-1592) — um dos mais importantes representantes do Renascimento — declarasse que "não sabia calcular 'nem por fichas nem por escrito'" (Ifrah, 1989, p. 317). Na realidade, "para lá da numeração e das duas primeiras regras, o cálculo mantém-se, nos começos do século XIX, um assunto de peritos" (Mialaret e Vial, s/d, v. 2, p. 327).

Naqueles tempos antigos, os progressos científicos, ao contrário dos técnicos, foram obtidos pelos sacerdotes-governantes, já que apenas a eles era reservado o acesso aos meios necessários: registrar e contar. O significado da palavra *hieróglifo* — escrita de sacerdote — é bastante revelador desse aspecto elitista da cultura, que advém daquele período. "Esta associação do saber e da ciência com uma única classe adentro da recém-formada sociedade de classes permaneceria uma das feições características desse tipo de sociedade até aos nossos dias, com apenas algumas exceções significativas" (Bernal, 1969, v. 1, p. 134).

É nessa época que a Matemática começou a desenvolver-se e, junto com a astronomia e a medicina, foi considerada uma das ciências nobres. Realmente, o nome é bastante apropriado, pois apenas alguns poucos privilegiados conheciam as recém-nascidas ciências. Entretanto, se, por um lado, o aspecto nobre e elitista da Matemática pode ser considerado um fator negativo, pois limitava o acesso a esse conhecimento e desligava-o cada vez mais das práticas dos ofícios, por outro lado, como nos afirma Bernal, teria sido ele que propiciou as condições necessárias para o desenvolvimento da Matemática:

> Os sacerdotes-administradores, dispensados de lidar com as coisas materiais, tendiam a complicar os métodos simbólicos e a imputar-lhes uma realidade independente. Em certo sentido isto foi valioso, pois veio dar, pelo menos a um número reduzido de gente selecionada, o lazer necessário para pensar, permitindo-lhes assim criar, a partir desses símbolos, as construções abstratas da matemática [...] [que viriam a fornecer] o alicerce sobre o qual cresceria, mais tarde, a matemática mais abstrata dos Gregos.
>
> (Bernal, 1969, v. 1, p. 136.)

A partir dessas primeiras sociedades, onde apenas uma minoria era responsável pela organização e direção das cidades, enquanto a grande maioria deveria apenas produzir, começa a coexistência de dois tipos bastante diferenciados de educação: uma técnica — a dos ofícios dos artesãos —, transmitida oralmente por meio da prática, e outra baseada na escrita, destinada à formação dos futuros dirigentes.

A educação da classe dominante, tanto no Egito quanto na Mesopotâmia, baseava-se, principalmente, na transmissão de comportamentos e preceitos morais, que deveriam ser observados pelos futuros dirigentes. Era uma educação autoritária, que considerava os castigos corporais necessários à correção dos alunos preguiçosos, indisciplinados ou desobedientes, e fundamentada na memória, através da repetição de textos escritos, pelos pais e depois pelos escribas, sobre os ensinamentos.

A importância cada vez maior atribuída à escrita — a única forma de acesso à cultura e, conseqüentemente, de garantia de uma vida de riquezas e abundâncias — levou a profissão de escriba a ser cada vez mais valorizada. Os demais ofícios — por representarem atividades materiais — foram sendo cada vez mais menosprezados. É o início da valorização do trabalho intelectual ligado à escrita, que atingiu o seu auge na Grécia, quando até mesmo os cálculos matemáticos, por apresentarem um aspecto manual, já que eram realizados com o auxílio do ábaco, seriam considerados de menor valor.

Apesar de a formação do escriba ter por base uma cultura sapiencial, ela destinava também uma parte de seus estudos à cultura técnica, na qual os conhecimentos matemáticos — a aritmética e a geometria prática — eram priorizados.

As fontes egípcias e mesopotâmicas relativas ao ensino de Matemática mostram-nos basicamente uma coleção de situações-problema, resolvidas detalhadamente, mas sem apresentar nenhuma justificativa. Essas situações-problema, consideradas concretas por muitos autores, apresentam muitas vezes elementos improváveis para uma situação real. Isso pode indicar que o mais importante era o treino do algoritmo, ou melhor, o treino dos passos a serem seguidos para a obtenção da solução de um determinado tipo de problema, e não a sua concretude. É o caso, por exemplo, do problema 40 do Papiro de Rhind, que solicita que se dividam cem pães entre cinco homens, de maneira que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e 1/7 da soma das três maiores partes seja igual à soma das duas menores. Em outros casos, encontramos situações não apenas irreais, mas aparentemente estranhas. É o caso do problema 79 do Papiro de Rhind, onde aparecem sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2 401 espigas de trigo, 16 807 hecates.

Muitas podem ter sido as razões que levaram os escribas egípcios a incluir esses problemas nas tarefas de seus alunos. Alguns autores acreditam que teria sido por razões lúdicas: seriam enigmas ou recreações matemáticas, com a intenção apenas de treinar cálculos. Outros, entretanto, vêem nesses problemas um interesse teórico: a busca de abstração. Qualquer que seja a hipótese aceita, é bem provável que a prática tenha dado início ao hábito, persistente até hoje, de colocar problemas totalmente absurdos para os alunos, apenas com a intenção de treinar os algoritmos, ou até mesmo de "desenvolver o raciocínio".

No entanto, uma pergunta parece surgir naturalmente quando analisamos a Matemática, e o seu ensino, entre egípcios e babilônios: se as fontes encontradas, tanto as técnicas como as escolares, não apresentam nenhuma justificativa ou prova de seus resultados, isso significa que não existiam raciocínios mais teóricos, mas apenas práticos?

É difícil acreditar que pessoas que conseguiam resolver uma série de exercícios semelhantes, utilizando sempre a mesma forma de resolução, não conhecessem seus princípios gerais. Mas é exatamente isso que os documentos conhecidos nos mostram.

Apesar disso, considerando-se que os sacerdotes egípcios detinham o monopólio da ciência, dedicavam-se ao estudo, especialmente da geometria e aritmética, e que muitos desses conhecimentos eram mantidos em segredo, como forma de garantir a superioridade da classe dirigente, podemos levantar a hipótese de que eles conheciam pelo menos alguns elementos teóricos, e que estes podem ter sido perdidos. Mas não há como confirmar essa hipótese com os documentos existentes, ao menos até o momento.

O ensino de Matemática no Egito, como dissemos, era baseado na resolução de problemas, de maneira mecânica, por meio da repetição dos mesmos procedimentos, ou seja, por meio do treino de algoritmos. Além disso, esse ensino, bastante autoritário, era destinado apenas a alguns poucos privilegiados. Apesar disso, encontramos em alguns livros sobre a história da educação a afirmação de que os egípcios teriam um método concreto para o ensino de Matemática.

Essa afirmação, provavelmente, teve a sua origem no testemunho posterior de Platão, que nos apresenta, em suas *Leis*, pelo menos dois elementos que conflitam com as fontes primárias conhecidas.

O primeiro refere-se à abrangência do ensino de Matemática no Egito, uma vez que afirma que a grande massa de crianças aprendia aritmética, junto com os rudimentos da escrita.

O segundo diz respeito à metodologia do ensino de Matemática, quando comenta que:

> Foram inventadas para as crianças pequeninas, no que se refere ao cálculo, noções aritméticas a serem aprendidas através do jogo e da diversão; subdivisão de maçãs e de coroas entre um número mais ou menos grande de alunos, dando a cada um sempre o mesmo número; ou distribuição alternada e sucessivamente, segundo a sua ordem habitual, do papel de lutador ou pugilista e respectiva reserva, acoplados em pares para o combate. Outros, após terem misturado em certo número de taças de ouro, de prata, de bronze e de outros metais, distribuem todas essas taças para o jogo de várias formas, adaptando ao jogo as aplicações úteis dos números necessários. Isto traz grande proveito para as crianças que aprendem, preparando-se, assim, para ordenar um acampamento, para guiar em marcha as tropas, para conduzir uma expedição e administrar uma casa, tornando-se homens mais ativos e mais úteis a si mesmos em qualquer campo. E sucessivamente com as mensurações relacionadas ao comprimento, à largura e à profundidade. Dessa forma as crianças crescem livres de certa ignorância, tão difundida entre os homens, sobre coisas elementares, e que torna o homem ridículo e vergonhoso.
>
> (Platão, apud Manacorda, 1989, p. 37.)

Para Manacorda, entretanto, os dados fornecidos por Platão são "imponderáveis e um tanto duvidosos", uma vez que as fontes primárias existentes nos fornecem vários "testemunhos sobre o caráter opressivo da didática e da relação pedagógica em geral" e sobre a educação ser "destinada exclusivamente às castas dominantes, aos nobres ou aos funcionários" (Manacorda, 1989, pp. 37-8). Apesar disso, devido à existência de materiais arqueológicos, como brinquedos e jogos, o autor acredita que um estudo cuidadoso desse material, associado ao das fontes literárias e dos testemunhos iconográficos, pode vir a fornecer preciosas informações sobre os aspectos concretos da educação egípcia, até hoje não confirmados.

Os povos das antigas civilizações conseguiram, sem dúvida, desenvolver os rudimentos de várias áreas que viriam a compor o que seria, futuramente, chamado as matemáticas. Entretanto, a preocupação com as regras gerais, com a exatidão dos resultados e com os princípios lógicos, ou seja, com uma Matemática teórica, seria levantada e, em parte, resolvida pelos matemáticos de uma nova civilização, que viria a ser o novo centro de cultura: a civilização grega. Esta começou a dominar o litoral do Mediterrâneo, à medida que as civilizações das margens dos rios entravam em declínio.

Será na Grécia que veremos surgir, também, uma nova atitude com relação à educação: a de formar um tipo ideal de cidadão. Nesse momento, assistiremos a importantes discussões a respeito da importância e do papel que a Matemática deveria desempenhar na formação do indivíduo. Seria apenas um mero elemento técnico, como acreditavam os povos antigos? Ou seria um elemento fundamental para o desenvolvimento de alguma habilidade intelectual?

A Antiguidade clássica

A mudança de perspectiva com relação à Matemática e a seu ensino, ao contrário do que poderíamos supor, não esteve presente na Grécia desde os tempos primitivos. Na realidade, essa mudança seria iniciada apenas por volta do século VI a.C., ou seja, foram necessários muitos séculos, desde o início da formação do povo grego — em meados do segundo milênio a.C. —, para que isso viesse a acontecer. Podemos mesmo afirmar que a educação grega, nesse longo período inicial, representou um retrocesso em relação à antiga educação dos escribas egípcios e babilônios, uma vez que ela, ao contrário daquela, não valorizaria a cultura letrada.

No mundo aristocrático da Grécia primitiva pouco ou nenhum valor era atribuído ao conhecimento da escrita ou da Matemática. É nas epopéias de Homero — *Odisséia* e *Ilíada* —, que se referem a uma época situada entre os séculos X e VIII a.C., que encontramos o primeiro ideal de formação do homem grego, baseada em atitudes e ações heróicas. Essa educação, que era um privilégio da aristocracia, encontraria na formação do guerreiro o seu maior ideal. Preocupada, inicialmente, com o cuidado do corpo, com a destreza e com a força do guerreiro, acrescentou, mais tarde, alguns elementos que ressaltavam as qualidades morais e espirituais, cuja síntese levaria à formação do homem considerado perfeito: aquele que sabia "proferir palavras e realizar ações" (Jaeger, s/d, p. 27).

Apesar de a formação do guerreiro ter sido a base da educação de toda a Grécia — tendo Homero como o principal educador — e o cultivo do corpo tornar-se, em conseqüência, um fator fundamental na civilização helênica até o cristianismo, essa tendência não se manteve uniforme em todas as regiões. Isso deve-se, fundamentalmente, ao fato de a Grécia ser composta por cidades-Estados, localizadas em regiões com características geográficas e étnicas bastante diferenciadas, tendo cada uma delas total autonomia administrativa e, portanto, suas próprias leis, ideais e formas de governo. No século VI a.C., por exemplo, num momento em que as demais cidades gregas, de uma forma ou de outra, orientavam-se para a democracia, Esparta mantinha-se aristocrática e sua educação visava exclusivamente à formação do soldado. Nesse mesmo período, a organização social de Atenas começa a ser modificada e "a uma data infelizmente difícil de precisar [...] perdeu a educação seu caráter essencialmente militar" (Marrou, 1975, p. 66).

É nesse momento que a educação grega, especialmente em Atenas, começou a valorizar o ensino da leitura e da escrita para a formação dos filhos dos nobres. Mas teremos de aguardar pelo menos mais um século para vermos o ensino de Matemática começar a ser considerado importante para essa formação.

Entretanto, é nesse mesmo século VI a.C., em colônias gregas no litoral da Ásia Menor — Mileto e Samos —, que assistiremos ao nascimento de uma mudança de perspectiva em relação aos estudos matemáticos, que levaria ao surgimento da Matemática abstrata.

Na tentativa de encontrar respostas racionais para as questões sobre a origem e a essência do mundo, os pensadores jônicos descobriram na Matemática uma fonte muito rica de conhecimento. Não seria, porém, aquela Matemática essencialmente prática que eles conheceram em suas viagens ao Egito e à Babilônia, mas, sim, uma nova Matemática, que ajudaria a "encontrar a ordem no caos, a ordenar as idéias em seqüências lógicas, a encontrar princípios fundamentais", ou seja, uma Matemática racional (Struik, 1989, p. 73).

É difícil precisar quando e qual teria sido o processo que levaria ao surgimento da Matemática abstrata na Grécia, pois não dispomos de nenhum documento daquele período. Fontes posteriores nos indicam apenas que Tales de Mileto (c. 626-545 a.C.) deu passos importantes nessa direção. Por essa razão, atribuem-lhe o título de primeiro dentre todos os matemáticos gregos. Entretanto, foi Pitágoras de Samos (c. 580-500 a.C.), um filósofo da mesma época de Tales, que exerceu influência maior, e definitiva, não apenas na Matemática, mas também no seu ensino, especialmente por intermédio de Platão.

Formada por aristocratas, a escola pitagórica, seita de caráter político-filosófico-religioso, fundada por Pitágoras, encontrou nos números os elementos essenciais para a justificativa da existência de uma ordem universal, imutável, tanto na sociedade quanto na natureza. Revestida de grande misticismo, acreditando que a purificação só poderia ser alcançada através do conhecimento puro, essa escola seria responsável não apenas pelo estudo de novos resultados a respeito dos números e da geometria, mas, especialmente, pelo "estabelecimento da matemática como uma disciplina racional" (Boyer, 1974, p. 45). Essa seria a base de praticamente toda a Matemática desenvolvida até o século XVII d.C. Mas a escola pitagórica também foi responsável pela introdução da concepção, existente até hoje, de que os homens que trabalham com os conceitos matemáticos são superiores aos demais.

Dessa maneira, a Matemática grega, desde o seu nascimento, foi teórica, desligada das questões práticas, voltada para a contemplação e com uma forte ligação com as questões divinas. Veremos, mais tarde, que essas características serão mantidas e aperfeiçoadas pela filosofia de Platão (c. 427-347 a.C.).

Com relação ao aspecto educacional, podemos dizer que foi na escola filosófica de Pitágoras que a Matemática, pela primeira vez, foi introduzida na educação grega e reconhecida como um elemento de grande valor formativo. Entretanto, isso estaria restrito à escola filosófica e à formação dos filósofos.

Contudo, não seria essa escola nem esses filósofos que dariam o impulso para as futuras inovações pedagógicas. Isso seria alcançado, na segunda metade do século V a.C., "por um grupo de homens críticos, os '*sofistas*', menos preocupados com a tradição do que qualquer outro grupo ilustrado surgido anteriormente" (Struik, 1989, p. 75, destaque do autor).

A intensa vida política de Atenas, especialmente após a vitória sobre os persas, exigia a formação de um novo tipo de homem: o homem político. E é esse tipo de homem que os sofistas se propõem a formar, oferecendo uma educação alternativa à educação existente, falha no aspecto então considerado fundamental, ou seja, na arte da oratória.

Originários de diversas cidades, sem um local fixo para ensinar, os sofistas visitavam as cidades oferecendo seus préstimos. Não eram pensadores, nem investigadores, não formavam uma escola filosófica e tampouco tinham a mesma proposta de ensino. Em comum havia apenas o fato de serem profissionais do ensino, ou seja, professores. "E no entanto os sofistas não são meros epígonos. Levantam uma infinidade de problemas novos. Estão tão profundamente influenciados, nos problemas morais e políticos, pelo pensamento racional do seu tempo e pelas doutrinas dos fisiólogos, que criam uma atmosfera de multifacetada educação" (Jaeger, s/d, p. 321).

Quando chegavam a uma cidade, promoviam uma exibição pública para mostrar a sua proposta de ensino, ou seja, proferiam uma conferência, que poderia tratar desde questões gerais até problemas técnicos mais específicos, caso existisse um público interessado. Nesse caso, os participantes deveriam pagar uma taxa que variaria de acordo com o tema tratado.

Caso existisse um grupo de estudantes interessados, que concordasse em pagar dez mil dracmas pelo curso completo, o que era equivalente a aproximadamente 33 salários mensais de um operário qualificado, o professor permaneceria naquela cidade pelo período necessário para desenvolver o seu plano de estudos, que poderia demorar de três a quatro anos.

A proposta de Protágoras (c. 480-410 a.C.) — o mais antigo dos sofistas — era ensinar a arte da política por meio da arte da persuasão e da arte do discurso, a retórica. Sua arte da persuasão baseava-se na hipótese de que em qualquer discussão, sobre qualquer tema, é possível tanto defender quanto acusar, uma vez que sempre existem os prós e os contras e que, portanto, é sempre possível vencer. Para isso, utilizava-se de um método de discussão cuja base provinha dos paradoxos de Zenão de Eléia.

Apesar de enfatizarem a arte da oratória, considerada fundamental para a formação de um político, os sofistas também atribuíam um grande valor à cultura geral. Segundo eles, para ser um bom orador, além do conhecimento da arte da persuasão e das regras da retórica, seria também fundamental saber falar sobre qualquer assunto e, portanto, conhecer todos os assuntos. Mas isso não levaria a um conhecimento, embora abrangente, muito superficial? Realmente, essa foi uma das críticas feitas aos sofistas. Além disso, os conhecimentos considerados mais importantes e a profundidade necessária a esses estudos variavam de acordo com a proposta de cada sofista. Para Hípias de Élis (c. 460-399 a.C.), por exemplo, os jovens deveriam estudar a fundo as quatro disciplinas propostas pelo pitagorismo: aritmética, geometria, música e astronomia.

Independentemente da profundidade com que os estudos matemáticos eram desenvolvidos pelas propostas dos sofistas, é a eles que devemos a popularização da Matemática, o reconhecimento de seu valor formativo e a sua inclusão num ciclo normal de estudos, como nos mostra o seguinte texto de Jaeger:

> E foi realmente obra dos sofistas a inclusão, por parte dos Gregos, das chamadas *Mathemata*, a que desde os pitagóricos pertenciam a harmonia e a astronomia, na mais alta cultura [...] Um acontecimento fundamental para todo o sempre foi a introdução do ensino matemático. Tinha sido objeto de investigação científica nos círculos dos chamados pitagóricos. Foi o sofista Hípias quem primeiro reconheceu o seu valor pedagógico incalculável. Outros sofistas, como Antifonte e mais tarde Brison, ocuparam-se de problemas matemáticos na investigação e no ensino. Desde então não deixaram de fazer parte da educação superior.
>
> (Jaeger, s/d, pp. 341-2.)

É claro, entretanto, que estamos nos referindo apenas à introdução do ensino de Matemática num ciclo de estudos equivalente ao nosso ensino superior, destinado apenas aos filhos dos ricos e, talvez, a alguns novos-ricos em busca de uma oportunidade de ascensão, para os quais os sofistas teriam sido os primeiros professores.

Os sofistas, ao proporem um novo elemento na educação grega — a educação intelectual —, deixando a educação corporal em segundo plano, abririam caminho para uma série de questões novas com relação à formação e, em especial, com relação à introdução dos estudos científicos, que permanecem abertas até os nossos dias. Essas questões podem ser assim resumidas:

— Os estudos científicos seriam realmente importantes para a formação geral do estudante?

— A importância desses estudos advém do fato de atribuirmos a eles, através da valorização de seu aspecto puramente teórico, a capacidade de desenvolver alguma habilidade do pensamento, ou pelo fato de considerarmos apenas o seu valor estritamente prático?

— Com que profundidade esses estudos devem ser desenvolvidos, para que possamos dar uma formação geral mais adequada ao estudante?

Para os sofistas do século V a.C., esses estudos eram particularmente importantes por sua aplicação prática, e deveriam ser desenvolvidos até "o grau em que isso servia à formação do espírito", e não por seu valor estritamente teórico, nem com a profundidade que Platão iria propor (Marrou, 1975, p. 98). Esse seria um dos pontos de discordância entre Platão e os sofistas, especialmente Isócrates (c. 436-338 a.C.), no amplo debate que seria desenvolvido no século seguinte.

A oposição aos sofistas, entretanto, surgiu ainda no século V a.C., com Sócrates. Mais preocupado com o aperfeiçoamento da alma do estudante do que em fornecer-lhe apenas os conhecimentos técnicos para atingir o sucesso e o poder, Sócrates pretendia formar seu aluno na perfeição espiritual, na virtude, tendo como princípio básico a noção de verdade.

Com os sofistas e com Sócrates (c. 469-399 a.C.), a educação grega passou por uma verdadeira revolução, distanciando-se, definitivamente, de suas origens guerreiras e cavalheirescas. Mas essa mudança não ocorreu sem a resistência dos defensores das antigas tradições. As questões sobre as vantagens e desvantagens dessa nova educação em relação à educação antiga estiveram no foco das discussões pedagógicas durante muito tempo.

Entretanto, essas questões não foram as únicas a ocupar o centro das atenções daquele momento em diante. Uma outra, mais fecunda, surgiria com a nova educação. Esse ponto, que ainda não está totalmente resolvido em nossos dias, diz respeito à forma de educação intelectual mais adequada: seria ela uma educação voltada para a arte do discurso ou para a filosofia?

Apesar de ter sido o século V a.C., com os sofistas e com Sócrates, aquele que lançou as bases da nova educação grega, seria o século seguinte, com Platão e Isócrates — o primeiro, defensor de uma formação filosófica, e o segundo, de uma formação retórica —, que delinearia, de maneira nítida e definitiva, os quadros dessa nova pedagogia.

Platão, que acreditava na existência de várias fases do conhecimento, desde o conhecimento do mundo sensível — onde os objetos são apenas reflexos ou sombras — até o conhecimento do mundo inteligível — o reino da verdade, onde estariam os verdadeiros objetos —, vê nos estudos filosóficos, em especial na dialética, a única possibilidade de se atingir esse princípio universal, absoluto, que possibilitaria a compreensão de todo o resto. À Matemática caberia um papel fundamental nesse percurso. Seria a Matemática, em especial a ciência dos números, ou seja, a aritmética, "o principal instrumento da 'conversão' da alma, desta correção interior pela qual ela desperta à plena luz e se torna capaz de *contemplar não mais 'as sombras dos objetos reais', mas 'a própria realidade'*" (Marrou, 1975, p. 123, destaques do autor).

Com Platão, temos a Matemática concebida como um conhecimento importante não pelo seu valor prático, mas pela sua capacidade de "despertar o *pensamento* do Homem" (Jaeger, s/d, p. 841, grifo do autor). E esse seria o ponto de vista totalmente original, com relação ao valor cultural da aritmética e de todas as matemáticas que, segundo o próprio Platão, nunca antes tinham sido utilizadas com semelhante finalidade. Entretanto, acredita-se que Platão tenha tirado o essencial para o desenvolvimento de suas idéias sobre as matemáticas dos estudos desenvolvidos pelos pitagóricos, em especial por meio de seus contatos com Teodoro de Cirene (c. 390 a.C.).

A proposta educacional de Platão preconizava que os estudos matemáticos fossem desenvolvidos desde o nível elementar, e não apenas no ensino superior, como acontecia até então.

No nível elementar, todas as crianças deveriam estudar rudimentos matemáticos, como "contar um, dois, três..., aprender a série dos inteiros e, provavelmente, as frações duodecimais empregadas na metrologia grega", e também elementos que Platão considerava importantes, não apenas por sua aplicação prática, mas, principalmente, por fornecerem a base necessária aos estudos posteriores. Esses elementos eram compostos essencialmente de problemas concretos, extraídos da vida e dos negócios, com o objetivo de exercitar os cálculos — idéia que seria uma imitação das escolas dos escribas egípcios —, além de aplicações numéricas de geometria e de uma introdução à astronomia, que pudesse fornecer o "mínimo de conhecimentos supostos pelo uso do calendário" (Marrou, 1975, pp. 120-1).

Entretanto, o ensino de Matemática nesse nível elementar deveria, segundo Platão, evitar os exercícios puramente mecânicos, propor problemas adequados à idade das crianças e ser desenvolvido de maneira lúdica, por meio de jogos. Além disso, os castigos corporais não deveriam ser utilizados, pois a coação não seria a forma mais adequada para resolver o problema da falta de interesse da criança pelos estudos. Para ele, "a coação pode empregar-se nos exercícios físicos, pois não lhes entorpece a eficácia, mas o saber imposto à alma não adere a ela" (Jaeger, s/d, p. 857). E, por essa razão, propõe "para esta fase o emprego de métodos que inculquem na criança os conhecimentos, como quem brinca" (Jaeger, s/d, p. 857). Apesar disso, os jogos e problemas de cálculo sugeridos por Platão não deveriam ficar restritos apenas às aplicações práticas, mas, novamente a exemplo do que entendia que acontecia com os egípcios, deveriam também abrir caminho para um grau maior de abstração, com a introdução, por exemplo, das noções de par e ímpar e de proporcionalidade.

Na verdade, desde essa formação inicial, Platão via nas matemáticas "uma virtude formadora mais profunda". Mais importante do que o simples fornecimento de elementos técnicos, necessários às várias profissões, elas serviriam para despertar o espírito, fazendo-o "adquirir desembaraço, memória e vivacidade" (Marrou, 1975, p. 122).

Contudo, seria apenas nesse nível elementar que todas as crianças livres estudariam as matemáticas. Para os outros níveis seriam feitas seleções dos mais *bem-dotados*, que culminariam com alguns poucos — os futuros filósofos e governantes; estes estudariam as matemáticas profundamente, o que significava estudá-las agora de modo totalmente racional, eliminando-lhes qualquer vestígio da experiência sensível. E seriam precisamente as matemáticas que melhor poderiam definir esses *espíritos mais talentosos*, essas *melhores naturezas*, dentre aqueles que revelassem, durante o estudo elementar, maior facilidade em aprender, melhor memória e incansável dedicação.

No entanto, Platão via no estudo da Matemática um elemento importante para todos os espíritos, não apenas para os mais bem-dotados, uma vez que entendia que seu estudo desenvolveria nos espíritos bem-dotados "a natural disposição para entrarem em qualquer espécie de estudo", enquanto os "espíritos de início inertes, mais lentos, por meio deles despertam, com o tempo, de sua sonolência, aguçam-se e tornam-se mais aptos a aprenderem do que o eram por natureza" (Marrou, 1975, p. 122). Mas seria exatamente a "máxima dificuldade que as matemáticas oferecem a quem as estuda" o motivo pelo qual Platão as considerava como as mais indicadas para a "seleção espiritual" (Jaeger, s/d, p. 842).

Temos assim, pela primeira vez, as matemáticas colocadas como um elemento fundamental para a *seleção dos melhores*, base dos futuros exames e concursos, juntamente com o estudo das letras, até os nossos dias. Mesmo assim, veremos que o fato não se deu imediatamente. No Brasil, por exemplo, mesmo após a Reforma Francisco Campos, em 1931, as matemáticas eram exigidas apenas em vestibulares de alguns poucos cursos superiores, especialmente os de Engenharia, Arquitetura e Química Industrial.

Ao analisarmos a proposta pedagógica de Platão, ao mesmo tempo que encontramos alguns aspectos extremamente positivos com relação ao ensino de Matemática, como a introdução definitiva dessa disciplina em um plano educacional regular para todos os indivíduos e a importância atribuída a um estudo inicial mais adequado às crianças, encontraremos, também, as raízes de alguns dos principais problemas até hoje enfrentados pelo ensino dessa matéria.

A base desses problemas estaria, principalmente, no misticismo que a concepção platônica apresentava com relação aos conhecimentos matemáticos mais abstratos — os mais afastados do nosso mundo sensível —, aqueles que seriam superiores a outras formas de conhecimento por terem o poder de elevar a alma até um mundo perfeito, o mundo de Deus. Esse misticismo que revestia a Matemática, originado com os pitagóricos, é, a nosso ver, o principal responsável pela atribuição de algumas afirmações que trariam conseqüências desastrosas para o ensino dessa disciplina, e que ainda hoje representam um fator limitante ao acesso de um grande número de pessoas ao seu estudo. Essas afirmações são bastante comuns e muito conhecidas:

— a Matemática é uma ciência perfeita, que apresenta resultados imutáveis, válidos eternamente;

— a Matemática só pode ser compreendida por alguns poucos escolhidos;

— as pessoas que sabem Matemática são pessoas superiores;

— a Matemática desenvolve o raciocínio das pessoas;

— a Matemática é um elemento fundamental para selecionar as pessoas mais aptas para o trabalho em qualquer profissão.

A severa crítica feita por Hogben, da qual reproduzimos, a seguir, um fragmento, apresenta-nos de forma bastante clara o grande limite que se estabelece entre o nosso mundo real, o das pessoas comuns, e o mundo especial da Matemática e de seu ensino, quando baseados na proposta platônica:

> Naturalmente esta perversão afugenta os indivíduos equilibrados, para quem os símbolos não passam de instrumentos da experiência social organizada, ao passo que atrai aqueles que se valem dos símbolos para escapar deste mundo tenebroso em que os homens lutam pelas pequeninas verdades que logram conquistar, e fugir para o "verdadeiro" mundo em que as verdades parecerão axiomáticas.
>
> O fato de serem assim tantos matemáticos explica, talvez, a inclinação que a tantos vitima, de guardarem para si mesmos os sublimes mistérios de sua irmandade pitagórica. Para o homem normal, porém, a perfeição deste "verdadeiro" mundo cheira a sonho. O mundo em que vive o homem comum é um mundo de lutas e fracassos, privações e desenganos. No mundo matemático tudo é evidente para quem a ele se acostuma. Raramente nos dizem que foram necessários mil anos para que a raça humana percebesse que todos os passos da argumentação matemática são "evidentes". Para os sacerdotes egípcios, o funcionamento do nilômetro era evidente. Mas só se tornará evidente para nós, os que vivemos fora do templo, quando descobrirmos o canal subterrâneo que liga o templo ao rio da experiência social da humani-

dade. Métodos educacionais inçados de sacerdotices e magias lograram impedir as pesquisas em torno dos fenômenos de enchente e vazante, no perpétuo movimento do rio.

(Hogben, 1970, p. 31, destaques do autor.)

Mas, naquele século IV a.C., uma outra proposta de educação baseada na retórica, radicalmente oposta à platônica, também estava no centro das discussões pedagógicas. Essas duas propostas seriam as responsáveis por um dos mais fecundos debates sobre a melhor forma de educação, o qual, em alguns aspectos, permanece até hoje.

O maior representante da educação retórica foi Isócrates, considerado por alguns como o pai da cultura humanística. Para ele, a filosofia não passa de um jogo inútil, que apenas diverte, mas não tem nenhuma utilidade para a vida prática. A retórica, por sua vez, seria a forma mais adequada para tornar o homem tanto moral como espiritualmente realizado.

Na verdade, enquanto Isócrates se propunha a formar a elite de seu tempo, para a qual a arte de bem falar seria fundamental, Platão desistiu de cuidar das coisas terrenas e trabalhava pela formação de um homem ideal para um Estado ideal.

A proposta pedagógica de Isócrates, embora baseada fundamentalmente em estudos literários, acreditava também no valor formativo das matemáticas, uma vez que via nelas a possibilidade de "habituar o espírito ao trabalho disciplinado", o que seria conseguido exatamente pelo fato de serem "abstratas e difíceis". Entretanto, não concordava que esses estudos fossem desenvolvidos da maneira profunda proposta por Platão. Com sua preocupação mais voltada para as coisas práticas, Isócrates preferia ensinar seus discípulos "a formarem uma opinião razoável sobre as coisas úteis, a fazê-los queimarem as pestanas em busca de certeza sobre questões perfeitamente inúteis, como a duplicação do cubo" (Marrou, 1975, p. 146).

É com Platão e Isócrates que assistimos ao nascimento de uma discussão pedagógica que sempre será retomada, desse momento em diante, quando se apresenta uma nova proposta em educação. Ela diz respeito ao tipo de ensino mais adequado à formação do estudante e que tem como base a oposição entre os estudos científicos e literários. Algumas das questões que orientam essa discussão são:

— O ensino mais adequado seria o mais teórico ou o mais voltado para as questões práticas?

— Que tipo de educação desenvolveria mais o pensamento do estudante: a educação literária ou a filosófica, em que as matemáticas desempenham um papel fundamental?

— Escrever sobre determinado tema, tentando manter um todo coerente e articulado, não desenvolveria mais o pensamento que o trabalho com raciocínios lógicos sobre um tema abstrato, sem ligação com o contexto social?

Apesar de tanto Platão quanto Isócrates terem feito ao final das discussões algumas concessões à proposta de seu opositor — Isócrates reconheceu cada vez mais o valor propedêutico das matemáticas e da filosofia, e Platão abriu espaço em sua Academia aos estudos retóricos —, as suas propostas de formação conservaram em sua base elementos bastante opostos, que se constituíram nos dois pilares da educação clássica: a educação literária e a educação filosófica.

Foi durante a época helenística, que se iniciou com a morte de Alexandre, que a educação adquiriu a sua forma *clássica*. Nesse momento, o ensino tornou-se mais livresco, e a escola começou a firmar-se como instituição. Ampliou-se também a idéia, já iniciada desde a época de Pitágoras, de que a cultura pessoal adquirida por meio da educação clássica seria o bem mais precioso que o homem poderia ter. A importância atribuída a essa cultura advinha, especialmente, do fato de os gregos terem encontrado nela o elemento fundamental para a unificação do mundo helênico, ampliado pelas conquistas de Alexandre, onde já não contavam mais os laços de sangue. Para que a transmissão dessa cultura pudesse ocorrer, era essencial o papel desempenhado pela escola. E ela começou a se multiplicar, atingindo praticamente todas as cidades do mundo helenístico.

A educação helenística integral previa um tempo de estudos muito prolongado — dos sete até mais de vinte anos —, embora poucos conseguissem chegar até o final. A maior parte dos homens livres, e até mesmo alguns escravos, completava apenas o grau elementar dessa educação, que ia dos sete aos catorze anos.

Após a educação elementar, introduziu-se, durante esse período, um grau intermediário de estudos, que pretendia assegurar aos jovens uma sólida cultura geral, além dos elementos necessários para um bom acompanhamento dos cursos superiores. Apesar de esses estudos já terem sido propostos anteriormente por Platão e Isócrates, foi apenas na época helenística que eles começaram efetivamente a fazer parte do ciclo escolar normal.

Para completar seus estudos, o jovem que tivesse condições econômicas e interesse, poderia escolher entre os três tipos de formação superior — a retórica, a filosófica e a médica —, oferecidos pelos centros de estudos existentes, dentre eles, os de Alexandria[2], Atenas, Pérgamo e Antioquia.

Na escola de letras — uma sala onde existia apenas uma cadeira para o mestre-escola e tamboretes de madeira sem encosto para os alunos —, a criança aprendia a ler, escrever e contar. Os *materiais didáticos* utilizados por essa escola eram: o rolo de papiro, equivalente ao nosso livro atual, no qual o mestre havia copiado os textos que seriam

[2] Na escola de Alexandria, conhecida como Museu, criada durante o governo de Ptolomeu I (c. 306-283 a.C.), foram escritos por Euclides os textos que maior influência exerceriam no desenvolvimento futuro da Matemática e em seu ensino. Esses textos são os treze livros que compõem os *Elementos*.

estudados pelo aluno; as tabuletas de madeira enceradas, em que se "escrevia por meio de um punção cuja extremidade oposta, arredondada, podia servir para apagar"; as "tabuinhas para escrever a tinta com uma pena feita de caniço, apontado e fendido; a tinta, fornecida em forma sólida, como entre nós a tinta nanquim, era triturada e diluída previamente pelo mestre; uma pequena esponja servia, neste caso, de apagador"; os papiros, raros e caros, e, por esse motivo, utilizados na frente e no verso, e apenas após o aluno ter adquirido alguma prática na escrita; e os cacos de cerâmica, os *ostraka*, bastante utilizados para rascunhos e correspondência particular (Marrou, 1975, pp. 243-4).

O ensino de Matemática nesse nível elementar era bastante modesto. Ele resumia-se praticamente a ensinar a contar, o que significava apenas aprender "a lista dos números inteiros, cardinais e ordinais, tanto pelos nomes como pelos símbolos" e aprender a contar pelos dedos, ou seja, a "simbolizar, por meio das duas mãos, todos os números inteiros de 1 a 1 000 000. Com os três últimos dedos da mão esquerda, segundo estivessem mais ou menos abaixados e dobrados sobre a palma, representavam-se as unidades, de 1 a 9; as dezenas, pela posição relativa do polegar e do indicador dessa mesma mão; as centenas e os milhares, de igual maneira, com o polegar e o índex, e com os três últimos dedos, na mão direita; as dezenas e as centenas de milhares, pela posição relativa da mão, seja esquerda, seja direita, com relação ao peito, ao umbigo, ao fêmur; o milhão, enfim, pelas duas mãos entrelaçadas" (Marrou, 1975, p. 247).

Além disso, pelo menos a partir dos séculos II e III d.C., começaram também a ser estudadas as frações das unidades de medidas então utilizadas: arure, dracma e pé. Apenas a partir dos séculos IV e V d.C., surgiram tabuadas muito simples de adição, como, por exemplo, 8 e 1, 9 ($8 + 1 = 9$); 8 e 2, 10 ($8 + 2 = 10$)... Na realidade, o conhecimento das operações elementares com números naturais, como já comentamos anteriormente, seria ainda durante muito tempo domínio de poucos especialistas.

A proposta que havia sido feita por Platão, no sentido de ampliar os estudos elementares de Matemática, com a inclusão de problemas concretos que exercitassem o cálculo, e de tornar esse ensino mais atrativo, parece não ter sido seguida. Além de o estudo das matemáticas no curso elementar ser muito modesto, como vimos, seu ensino não parecia ser nada atraente. Totalmente baseado na memória e na repetição, com um mestre que não hesitava em dar chicotadas quando achava o aluno preguiçoso, esse ensino estava muito longe ainda de preocupar-se em proporcionar algum prazer à criança. O que os testemunhos nos mostram é que ela tinha verdadeiro terror pelo seu mestre e pela escola. Podemos, portanto, concluir que, ao menos com relação à escola elementar, as idéias defendidas por Platão, com relação ao ensino das matemáticas, não chegaram a ser colocadas em prática. Teria a sua proposta conseguido impor-se em outros níveis do ensino? Veremos que, teoricamente, sim, mas, na prática, o processo parece ter demorado a acontecer.

As matemáticas — geometria, aritmética, música e astronomia — figuravam no programa dos cursos intermediários e, juntamente com as disciplinas literárias — gramática, retórica e dialética —, seriam estabelecidas definitivamente a partir do século I a.C. como as disciplinas básicas à formação geral do estudante.

O ensino da geometria, desde essa época até a modernidade, teve como base os *Elementos* de Euclides. Preocupado com o rigor das demonstrações, o estudo não tinha nenhuma ligação com as experiências sensíveis. Era uma geometria especulativa, com sua capacidade intrínseca de desenvolver o espírito, considerada um elemento fundamental para a formação geral do estudante, enquanto a geometria prática, por ser considerada apenas uma aplicação, destinava-se apenas aos futuros técnicos. Na realidade, as partes mais aplicadas da geometria, como o cálculo de áreas e volumes, pertenciam a outras disciplinas, como a geodésia e a metrologia, assunto reservado apenas aos futuros agrimensores, arquitetos, engenheiros...

As mesmas características podem ser também observadas na proposta do ensino de aritmética — a ciência teórica dos números. Sem nenhuma preocupação com as aplicações práticas, ou seja, desvinculada da logística, a aritmética foi inicialmente estudada segundo a forma geométrica apresentada por Euclides nos seus *Elementos*.

Entretanto, a partir do segundo século de nossa era, o ensino de aritmética mudou de orientação e passou a ser desenvolvido segundo o livro *Introdução à Aritmética*, de Nicômaco de Gerasa (c.100 d.C.), que apresenta "a exposição mais completa existente da aritmética pitagórica". Apesar de apresentar "em grande parte os mesmos assuntos tratados nos livros de aritmética dos *Elementos*", enquanto "Euclides representa números por linhas retas, Nicômaco utiliza uma notação aritmética através de uma linguagem vulgar" (Struik, 1989, p. 103). Segundo Marrou, esse livro teria "sido o manual que maior papel histórico desempenhou", uma vez que foi imediatamente adotado no ensino, "abundantemente comentado, traduzido para o latim (e, mais tarde, para o árabe)", e sua influência teria sido "tão profunda que desde então a aritmética suplantou a geometria e se tornou, em substituição a esta, a base e o campo mais importante do ensino das matemáticas" (Marrou, 1975, p. 281).

Realmente somos obrigados a admitir que nos estudos intermediários a proposta platônica conseguiu impor-se. Temos, por um lado, uma geometria totalmente especulativa, voltada apenas ao desenvolvimento do espírito e, por outro, uma aritmética totalmente teórica, recheada de mistérios. Essa seria a nossa Educação Matemática clássica, que tantos anos duraria e tantas conseqüências traria...

Contudo, se, por um lado, parece indiscutível que essa forma clássica para o ensino de Matemática estava totalmente aceita, por outro lado, não fica claro até que ponto ela realmente era adotada na prática. Seriam os estudos matemáticos realizados por todos, ou apenas por especialistas? Estariam eles sendo realizados nos cursos intermediários como era proposto teoricamente, ou apenas nos superiores?

Para Marrou, os poucos testemunhos diretos existentes com relação ao ensino de Matemática, em comparação ao grande número desses testemunhos existentes em relação ao estudo das disciplinas literárias, mostram-nos "que a cultura helenística se havia tornado eminentemente literária e que as matemáticas nela ocupavam um lugar modesto" e que "os estudos literários praticamente acabaram por eliminar as matemáticas do programa do ensino secundário" (Marrou, 1975, p. 287). Outros indícios também confirmam a ausência dos estudos matemáticos nos cursos intermediários. Um deles é a existência do livro *Conhecimentos matemáticos úteis ao conhecimento de Platão,* escrito por Teon de Esmirna, no século II d.C., em que o próprio autor justificava a necessidade de escrevê-lo pelo fato de que "muitas pessoas que gostariam de estudar Platão não haviam tido oportunidade de exercitar-se o necessário, nas ciências matemáticas, desde a infância" (Marrou, 1975, p. 288). Outro indício estaria na necessidade de as escolas filosóficas neoplatônicas proporcionarem a seus alunos uma iniciação matemática, uma vez que estes chegavam com uma formação estritamente literária.

Na verdade, apesar de Platão teoricamente ter conseguido impor seu ponto de vista com relação aos estudos matemáticos, na prática, entretanto, seriam os estudos literários que dariam a orientação ao ensino intermediário. Podemos, portanto, concluir que "no plano histórico, Platão foi vencido: ele não conseguiu impor, à posteridade, seu ideal pedagógico; considerando as coisas no seu conjunto, foi Isócrates quem triunfou, quem se tornou o educador da Grécia e, depois, de todo o mundo antigo" (Marrou, 1975, p. 306).

A educação clássica, preocupada com a formação integral do homem, e não com uma formação técnica específica, uma vez que entendia que essa formação integral possibilitaria ao homem exercer com sucesso qualquer trabalho especializado, elegeria a palavra como o seu elemento mais importante.

Durante a época romana, com a inclusão do latim, a educação clássica encontraria a sua forma definitiva. As escolas de todos os níveis multiplicam-se, as elementares com maior rapidez, os métodos brutais de ensino começam a ser abrandados, as classes a ser organizadas de acordo com o aproveitamento dos alunos e... *os estudos matemáticos continuam a ser privilégio apenas de uma restrita minoria: os matemáticos profissionais e os futuros imperadores.*

Capítulo II

O ensino de Matemática: da estiagem à renovação

Dizem ser mecânico aquele conhecimento que sai da Experiência, e científico o que nasce e acaba na Razão, e semimecânico o que nasce na Ciência e acaba nas operações manuais. Mas a mim me parece que são vãs e cheias de erro aquelas ciências que não nascem na Experiência, isto é, tais que a sua origem, meio ou fim não passa por nenhum dos cinco sentidos. E se nós duvidamos da certeza de cada coisa que passa pelos sentidos, quão mormente devemos duvidar daquelas coisas que são rebeldes aos sentidos, como a essência de Deus e da alma e semelhantes, acerca das quais sempre se disputa e contende.

(Leonardo da Vinci)

Nessas palavras, retiradas do *Tratado de Pintura*, de Leonardo da Vinci, podemos perceber o germe das novas idéias que começaram a surgir durante o Renascimento e que culminaram com o nascimento da ciência moderna. Seria a "reabilitação dos sentidos, e a conseqüente condenação da atitude platônica sobre a degradação do corpo em face da aquisição da verdade", que levaria ao surgimento da função, base da nova ciência e da moderna Matemática, e ao rompimento com a ciência dos antigos, que permaneceu durante quase vinte séculos (Caraça, 1978, pp. 201-3).

Foram pessoas como Leonardo da Vinci, que conseguiam perceber a importância da Matemática nessa nova concepção de ciência, que se levantaram em defesa de um ensino de Matemática mais voltado para a prática, para as aplicações, mais ligado às artes mecânicas.

Entretanto, o caminho que a sociedade, a ciência e o ensino seguiriam desde os tempos clássicos até o surgimento da ciência moderna — século XVII — e dos primeiros ensaios de um ensino mais "moderno", não aconteceria de forma contínua, mas por meio de avanços parciais e de retrocessos. Na realidade, antes disso, o Ocidente teria de enfrentar um longo período de estiagem...

A estiagem

A partir do século V, com o triunfo dos chamados povos bárbaros no Ocidente, o ensino clássico vai se deteriorando progressivamente até ceder lugar a um ensino de caráter estritamente religioso. Esse ensino, que tinha como maior objetivo a preparação para um mundo futuro, considerava a formação intelectual totalmente desnecessária, além de extremamente perigosa. O mundo terreno era então encarado como a fonte de todos os males. Tudo que estivesse relacionado a ele era visto com muita desconfiança e, portanto, passível de ser eliminado do estudo. Os textos e os conhecimentos herdados do período clássico passaram a ser considerados fontes possíveis de heresias e começam a "desaparecer". A única fonte necessária e segura de toda a sabedoria passou a ser a Bíblia. E, assim, por cerca de mil anos, o ensino ocidental não apresentou quase nenhum elemento intelectual.

Durante os primeiros tempos da Idade Média, os mosteiros foram os mais importantes, e muitas vezes os únicos, centros de cultura existentes na Europa Ocidental. Apenas neles, e mesmo assim não em todos, seria possível encontrar escolas, bibliotecas, copiadores e editores de textos. O ensino por eles ministrado era destinado quase exclusivamente à formação de clérigos seculares ou regulares. Estudava-se apenas o latim necessário à leitura de textos sagrados e de histórias de santos. Mas mesmo esse objetivo era poucas vezes alcançado. Muitos monges mal sabiam ler... Apesar dessas limitações, alguns novos elementos foram introduzidos por esse ensino.

Pela primeira vez começa a manifestar-se uma maior *preocupação para com o espírito infantil*. A criança pequena passa a ter uma atenção especial por parte dos adultos, especialmente por aqueles responsáveis pelo seu ensino. Apesar de esse cuidado ainda não eliminar totalmente as punições, estas se amenizaram. Mas isso dizia respeito apenas à criança. Ao jovem era recomendado um tratamento bastante rigoroso, uma vez que se acreditava ser essa a idade mais perigosa, em que as pessoas começam a ser atraídas pelos pecados deste mundo...

Outra inovação da cultura monástica foi a *introdução da leitura silenciosa*, desconhecida dos povos antigos.

Mas e o ensino das matemáticas, para o qual já tão pouco espaço era reservado pela Antiguidade clássica, teria desaparecido totalmente?

Isso, realmente, quase aconteceu...

Com o "desaparecimento" dos originais da época clássica, a totalidade do saber conhecido pela Europa, nesses primeiros tempos da Idade Média, limitou-se a resumos das sete artes liberais, elaborados por alguns homens cultos, principalmente do século V. A expressão "sete artes liberais" começou a ser utilizada durante esse período para designar a soma total do saber, então constituído pelo *trivium* — gramática, retórica e dialética — e pelo *quadrivium* — aritmética, geometria, música e astronomia.

No caso das matemáticas, os únicos textos sobreviventes, adotados durante quase mil anos como livros escolares, seriam os de Boécio (c. 480-524) — considerado o último filósofo da Antiguidade. Seus livros "eram abreviações insignificantes e extremamente elementares de clássicos mais antigos — uma *Arithmetica* que era apenas uma forma abreviada da *Introductio* de Nicômaco; uma *Geometria* baseada em Euclides e contendo apenas enunciados, sem prova, de algumas das partes mais simples dos quatro primeiros livros de *Os elementos*" (Boyer, 1974, p. 139).

Cassiodoro (c. 490-583), discípulo de Boécio, escreveu um livro sobre as sete artes liberais em um nível ainda inferior ao de seu mestre. Isídoro de Sevilha (c. 570-636), por outro lado, que se propôs a organizar um tratado de todo o saber de seu tempo, em sua enciclopédia *Origens* ou *Etimologias*, na parte relativa à aritmética fez um resumo da obra de Cassiodoro, que era um resumo da obra de Boécio, que era uma forma abreviada da *Introductio*, de Nicômaco, que era uma apresentação completa da aritmética pitagórica.

Naquela época, as matemáticas foram estudadas no Ocidente apenas com o objetivo de entender mais profundamente as escrituras sagradas, ou seja, de se efetuar o complexo cálculo do calendário litúrgico — *computus* — e determinar com precisão a data da Páscoa, uma questão considerada primordial, pois era causa de divisão entre as Igrejas de Roma e da Irlanda, que chegavam a datas diferentes.

Como nos diz Boyer, a respeito do monge beneditino Beda (673-735), considerado o homem mais culto de seu tempo e um dos principais criadores da cultura inglesa:

> [...] as sombras se mantiveram a tal ponto que se tem dito que nada de erudito podia ser ouvido na Europa, a não ser o arranhar da pena do venerável Beda [...] escrevendo na Inglaterra sobre a matemática necessária para o calendário eclesiástico, ou sobre a representação dos números por meio dos dedos.
>
> (Boyer, 1974, p. 182.)

Essa citação chama-nos a atenção para o fato de que a aritmética ainda dependia muito dos processos digitais. Tanto a representação digital — que, como já mencionamos, existia desde a Antiguidade — como as formas de computação digitais foram muito utilizadas durante toda a Idade Média, especialmente nas transações comerciais envolvendo povos de origens diferentes. Essas representações eram relativamente uniformes até uma centena. Para os números maiores que cem, essa uniformidade já não existia e, em "alguns casos, os símbolos para centenas e milhares eram trocados" (Davis, 1992, p. 37).

Beda, preocupado com os processos digitais, especialmente por sua importância como pré-requisitos para o cômputo, "deu uma descrição do uso dos dedos e das mãos, com várias posições sobre o corpo, para representar números até um milhão" (Davis, 1992, p. 37). As seguintes citações, retiradas de seus livros *De temporum ratione*, ou *O cálculo dos tempos*, e *De flexibus digitorum*, ou *Sobre a flexão dos dedos*, ao mesmo tempo que nos confirmam as suas preocupações com o cômputo, revelam-nos as dificuldades existentes para efetuar tal cálculo:

> Começando a falar, com a ajuda de Deus, do cálculo dos tempos, achei necessário mostrar primeiro, brevemente, a utilíssima e rapidíssima habilidade de contar com os dedos, pois prepara melhor a inteligência de quem lê a calcular a série dos tempos.
>
> Quando falas um, dobrando o mínimo da mão esquerda, apoiá-lo-ás na palma da mão. Quando falas dois, apoiarás nela, dobrando-o, o anular. Quando falas três, dobrarás da mesma forma o médio. Quando falas quatro, levantarás o mínimo. Quando falas cinco, levantarás o anular...
>
> (Apud Manacorda, p. 127.)

A necessidade de serem utilizados processos digitais provavelmente se devia ao desconhecimento do ábaco — que teria desaparecido da Europa possivelmente durante um grande período da Idade Média, até ressurgir, por volta do ano 1000, "da obscuridade dos mosteiros" (Karlson, 1961, p. 15) — e, também, dos numerais indo-arábicos, introduzidos no Ocidente a partir do século X, mas cuja aceitação efetiva aconteceria apenas no século XVI.

Dessa maneira, os poucos estudos matemáticos desenvolvidos no Ocidente durante aqueles primeiros séculos do período medieval — do século V ao século VIII — demonstravam apenas interesse pelo valor instrumental das matemáticas. O cálculo e até mesmo a astronomia tornaram-se exclusivamente instrumentos para a realização de algumas conjeturas específicas: a das horas de liturgia, a das estações do ano, a do calendário eclesiástico, a do dia da Páscoa... Não existia nenhum interesse pelas aplicações práticas ou pelo caráter especulativo das matemáticas.

Isso, entretanto, não significa que a Matemática estivesse estagnada durante esse período. O que aconteceu foi que, com a queda do Império Romano, o centro de seu desenvolvimento se deslocou para o Oriente. Matemáticos chineses, hindus, persas e árabes dariam importantes contribuições durante todo o período de "estiagem" do Ocidente. Dentre elas, podemos citar *Brahmasphuta Siddhānta*, de Brahmagupta (c. 628), *Lilavati*, de Bhāskara (1114-1185), *Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balah*, de al-Khowârizmî (780-850) e *Álgebra*, de Omar Khayyam (1050-1130).

Durante as últimas décadas do século VIII, até os finais do século IX, a situação, entretanto, começaria a modificar-se no Ocidente. Preocupado com o baixo nível de cultura dos monges, do clero e também do povo, e percebendo que a leitura dos textos sagrados seria de fundamental importância para o desenvolvimento do cristianismo, o imperador Carlos Magno acaba proporcionando um incentivo à cultura, que ficou conhecido como o Renascimento Carolíngio. Com esse objetivo, propõe em seus atos legislativos — os Capitulares — a criação de escolas e organiza o sistema de ensino em três graus: elementar, secundário e superior. Para garantir a implantação de tal sistema, determina que em cada paróquia seja criada uma escola elementar e em cada mosteiro, abadia ou bispado, uma escola de nível secundário. Cria ainda uma universidade itinerante e incentiva a cópia de manuscritos, não apenas dos eclesiásticos como também dos de escritores clássicos que pudessem ser localizados.

O ensino das matemáticas, no entanto, não seria afetado diretamente por essa primeira renovação. Apesar de ter sido proposto o estudo do cômputo nas escolas elementares e o das sete artes liberais na escola secundária, apenas o ensino de latim seria enfatizado. Mesmo assim, é nesse momento que encontramos o primeiro esforço para restaurar o valor especulativo das matemáticas. Essa foi a proposta de Alcuíno de York (735-804), responsável pela elaboração da organização escolar apresentada por Carlos Magno e considerado o mais influente educador da primeira metade da Idade Média. Ele esforçou-se "em demonstrar que o treino intelectual era tão essencial ao bem-estar da sociedade quanto os esforços para o seu melhoramento puramente religioso e moral" (Monroe, 1939, p. 144). Tendo em vista esse objetivo, apresentou em seu livro *Problemas para o desenvolvimento da mente dos jovens* uma série de questões que não pretendiam enfatizar o aspecto instrumental das matemáticas, mas, sim, o seu valor para o desenvolvimento do raciocínio. Apesar de muitos de seus problemas terem provavelmente origem no antigo Oriente, foi, entretanto, o seu trabalho que viria a influenciar, durante séculos, muitos autores de textos matemáticos. De fato, muitos de seus problemas são ainda hoje bastante utilizados. O seguinte é um bom exemplo:

> Um lobo, uma cabra e uma couve têm de atravessar um rio num barco que transporta um de cada vez, incluindo o remador. Como é que o remador os levará para o outro lado de forma que a cabra não coma a couve e o lobo não coma a cabra?
>
> (Struik, 1989, p. 136.)

Ainda que as propostas de Carlos Magno e de seus seguidores não tenham sido totalmente efetivadas, foram elas que abriram caminho para o tipo de vida intelectual mais característico da Idade Média — a escolástica.

A partir do século X, e até o século XV, assistiremos ao nascimento e ao declínio dessa nova forma de pensar e filosofar, que teria como principal objetivo justificar a fé cristã por meio da razão. Para alcançar esse objetivo, a escolástica encontrou na lógica aristotélica a sua maior aliada. A lógica aristotélica passou então a ser considerada a única forma cientificamente válida. Sem dúvida alguma, a escolha foi perfeita. A lógica aristotélica é o instrumento ideal, porque mais eficaz e seguro, quando se pretende organizar um sistema de idéias tendo como pressuposto inicial um conjunto de crenças, ou premissas, que não devem ser questionadas, uma vez que são consideradas, em princípio, verdadeiras.

É nesse momento que veremos surgir uma extrema valorização do formal, do abstrato, do imaterial. Sem nunca questionar a validade de suas hipóteses, sem levar em consideração nenhum conhecimento concreto ou físico, ou seja, sem nenhuma base real, a maior parte das discussões dos escolásticos "consistia em análises intermináveis e inúteis a respeito de inumeráveis e inaproveitáveis discussões acerca de palavras e termos" (Monroe, 1939, p. 154).

Essa nova forma de vida intelectual afetou diretamente o ensino, que assumiu uma feição diferente. A lógica adquiriu uma posição de destaque em relação às demais artes liberais. Foi ela que forneceu os fundamentos para a organização dos conhecimentos a serem transmitidos pela escola e para os objetivos a serem atingidos. A maior preocupação da educação era ministrar os elementos necessários para o perfeito desenvolvimento dos discursos formais. Era a forma que importava e não o conteúdo, nesse momento já claramente definido. Não se valorizou nenhum conhecimento novo ou aplicação prática. A análise lógica dos textos foi o método utilizado. Nessa proposta de ensino, a

> [...] lógica impôs-se irresistivelmente como a disciplina propedêutica por excelência, como o método universal de todas as ciências [...] Arte de raciocinar com justeza, de deduzir dos textos os problemas e de os resolver ultrapassando as contradições aparentes, a lógica aristotélica transformou-se na base de toda a educação de nível superior.
>
> (Mialaret, s/d, v. 1, p. 266.)

Essa organização das matérias baseada na lógica dos conteúdos, e não no desenvolvimento mental do estudante, que se estabeleceu nesse período da escolástica, perdurou durante séculos.

Entretanto, esse período de mudanças sociais, em que uma nova forma de organização social — a cidade — começava a impor-se, e no qual o desenvolvimento do comércio e da indústria propiciava o contato com outras culturas e o surgimento de um novo tipo de homem, traria outras alterações profundas para a educação e para os estudos matemáticos.

Isso, no entanto, não aconteceu dentro das recém-criadas universidades. Nelas, os escolásticos continuavam preocupados em discutir suas questões teológicas e filosóficas, dando pouca atenção para as disciplinas matemáticas, como nos sugerem as seguintes observações de Mialaret, Hogben e Karlson:

> Os rudimentos limitam-se, na realidade, à leitura penosamente conseguida, à escrita pesadamente elaborada, à prática das duas primeiras regras e ao conhecimento da tabuada da multiplicação: *os mestres em artes das universidades medievais de forma alguma ultrapassam estes níveis.*
>
> (Mialaret, s/d, v. 1, p. 319, grifo nosso.)

> No século XIV o curso de matemática da Universidade de Oxford levava o estudante à *Ponte dos Asnos*[3] e lá o deixava. Encerrava-se com a quinta proposição do primeiro dos doze livros de Euclides.
>
> (Hogben, 1970, p. 414, grifo nosso.)

> [...] na escala das ciências, a cuja testa se encontrava naturalmente a teologia, *a matemática ocupava uma posição pouco honrosa, ou seja, o último lugar*, e o salário [dos professores] era diretamente proporcional a esta classificação. Verdade é, porém, que um desprezo tão doloroso pela nossa ciência não era totalmente imerecido, tendo em vista a maneira como era lecionada nas universidades. Possuímos índices da matéria e relações dos exames dos séculos XIV e XV; delas depreendemos que *os novos mestres [...] tinham que jurar solenemente já haverem lido alguns livros de Euclides* — evidentemente não se queria correr o risco de prestar exames verdadeiros!
>
> (Karlson, 1961, pp. 345-6, grifo nosso.)

[3] Ponte dos asnos, ou *Pons asinorum*, é uma expressão que foi atribuída à Proposição 5 do Livro I dos *Elementos*, de Euclides, provavelmente durante a Idade Média, como referência à única demonstração existente no livro de Boécio, bastante utilizado nas escolas monásticas. O significado de tal expressão estaria ligado à dificuldade encontrada pelos estudantes em ultrapassar essa "ponte", o ponto culminante da Geometria da época. Os estudantes que não conseguissem compreender essa demonstração eram comparados aos asnos, que empacavam ao atravessar uma ponte. Mas Hogben, ironicamente, comenta que a existência de tal expressão estaria associada à forma como era ensinada: "porque os burros que a ensinavam davam-se a todos os cuidados para destruir a ponte que a liga ao mundo real" (Hogben, 1970, p. 155).

Apesar do pouco espaço reservado pelas universidades medievais ao ensino específico das matemáticas, foram as discussões filosóficas dos escolásticos que forneceram elementos para futuros desenvolvimentos da Matemática especulativa. O "estudo de Platão e Aristóteles, combinado com meditações sobre a natureza da divindade, conduziu a especulações sutis sobre a natureza do movimento, do contínuo e do infinito" que influenciaram [os] "inventores do cálculo infinitesimal, do século XVII, e [os] filósofos do transfinito, do século XIX; Cavalieri, Tacquet, Bolzano e Cantor conheciam os autores escolásticos e meditaram sobre o significado das suas idéias" (Struik, 1989, p. 141).

Entretanto, foi devido ao avanço das navegações e ao florescimento das atividades comerciais e industriais, com as suas inerentes necessidades de melhor compreender as propriedades e transformações que ocorrem no mundo concreto, que o estudo e o ensino das matemáticas começaram a se desenvolver e a se modificar no território europeu.

Isso, entretanto, só foi possível em virtude do contato com os árabes, que, durante grande parte da Idade Média — especialmente entre os séculos VIII e XII —, traduziram todas as contribuições disponíveis dos clássicos gregos, dos trabalhos produzidos por indianos, persas, além de apresentarem suas valiosas contribuições. Por intermédio deles, começaram a penetrar na Europa, já a partir do século XII, as primeiras traduções do árabe para o latim, dentre as quais, as *Tabelas astronômicas* e a *Álgebra*, de al-Khowarizmi, os *Elementos*, de Euclides, e o *Almajesto*, de Ptolomeu.

O desenvolvimento e divulgação dos novos ramos do conhecimento matemático, especialmente por meio das escolas práticas e dos "mestres de cálculo", necessários para atender às aspirações da nova classe emergente seria outro elemento fundamental para o desenvolvimento da Matemática e de seu ensino.

As escolas práticas — laicas, localizadas nos centros urbanos das cidades mais favorecidas pelo desenvolvimento do comércio — começaram a ministrar cursos de aritmética prática, álgebra, contabilidade, navegação e trigonometria. Isso acontecia, inicialmente, por meio de um ensino individualizado, ministrado por um mestre prático em determinada atividade produtiva. Esse mestre autodidata, inicialmente sem nenhum vínculo com as universidades e sem nenhum conhecimento dos autores clássicos, responsabilizava-se por ensinar a um aprendiz os conhecimentos práticos de sua profissão. As aulas ocorriam no próprio local de trabalho do mestre, que firmava para esse fim um contrato com o pai ou responsável pelo aprendiz, no qual se explicitavam todas as responsabilidades que deveriam ser assumidas, tanto pelo mestre quanto pelo aprendiz.

Apesar de essas escolas práticas, e do conhecimento por elas veiculado, não influenciarem durante longo período o ensino ministrado nas universidades ou nas escolas subordinadas à Igreja, elas fornecem-nos uma indicação do caminho que as matemáticas, as ciências, a educação e a sociedade tomariam nos séculos seguintes.

É o prenúncio de uma nova era...

A renovação

Paralelamente ao desenvolvimento das novas ciências e do novo tipo de ensino, segundo o qual ciência e trabalho relacionam-se intimamente, mas sem nenhuma vinculação inicial com eles, nasce e desenvolve-se um outro movimento intelectual inovador — o humanismo.

Movimento aristocrático, que tinha como maior objetivo a recuperação de todos os elementos da cultura clássica eliminados durante o período anterior, o humanismo colocar-se-ia radicalmente contra toda a cultura então dominante. Contra a escolástica, contra a universidade e contra a proposta de educação vigente. Pela liberdade individual, pela alegria de viver, pela apreciação do belo e por uma educação menos repressiva, mais humana, mais culta, que levasse em consideração a natureza do estudante, que colocasse novamente a gramática, a retórica e a poética como centro do ensino, ou seja, que essas disciplinas assumissem o lugar que a lógica havia ocupado dentre as artes liberais desde o século XII, e que, principalmente, estivessem baseadas na leitura direta dos clássicos gregos e latinos.

Desde esse momento, veremos dois tipos de propostas para a formação do homem, distintas e opostas, conviver lado a lado. Uma preocupada com a preparação prática das novas profissões emergentes, pela qual os mestres livres ensinavam apenas conhecimentos práticos, e outra, desinteressada, preocupada com a formação dos homens nascidos "livres e nobres". A primeira privilegiando o ensino das novas ciências, a segunda, o ensino das ciências clássicas. Essa convivência, entretanto, não aconteceria de maneira tranqüila, uma vez que as concepções de homem e de sociedade que estavam na base de tais propostas eram claramente divergentes.

A posição dos humanistas com relação às divergências existentes entre as duas propostas, que competiam na luta contra a escolástica, pode ser percebida pelas seguintes palavras de Paolo Vergerio (1349-1420), professor da Universidade de Pádua, em um tratado de educação de 1374:

> Nós denominamos liberais aqueles estudos que formam o homem livre; aqueles estudos pelos quais alcançamos e praticamos a virtude e a sabedoria; *aquela educação que promove, treina e desenvolve aqueles dotes mais elevados do corpo e do espírito* que enobrecem os homens e que são justamente considerados como os mais dignos logo abaixo da virtude.
>
> *Para um temperamento vulgar, o ganho e o prazer são os alvos da vida*; para uma natureza elevada, a dignidade moral e a glória são tudo.
>
> (Apud Monroe, 1939, pp. 189-90, grifo nosso.)

Os sistemas educacionais tradicionais, que em princípio se opunham radicalmente às propostas dos humanistas, chegando mesmo a considerá-las heréticas, foram aos poucos assimilando as novas idéias e introduzindo novos elementos em seu ensino. Dessa maneira, a educação vai gradualmente se transformando, até que as chamadas humanidades — estudo das línguas e da literatura dos povos clássicos — estejam totalmente implantadas.

Da mesma forma que o antigo ensino proposto pelos escolásticos, esse tipo de educação humanística não reservava espaço aos estudos da natureza, aos da sociedade e nem mesmo aos das matemáticas. Quando se fazia alguma concessão e incluíam-se as matemáticas, era apenas devido ao valor formal desses estudos, de acordo com a concepção platônico-aristotélica. Nenhuma preocupação com as aplicações práticas, mas apenas com o desenvolvimento do raciocínio, do pensamento, das faculdades mentais. Para esse tipo de ensino, os *Elementos* de Euclides seriam os mais indicados e foram, realmente, bastante utilizados.

A educação humanística, "com alguma redução gradual do elemento clássico, em favor, primeiro, das matemáticas, depois, da história e das línguas modernas, e, finalmente, até certo ponto, das ciências naturais", durante séculos foi vista como o modelo ideal de educação secundária (Monroe, 1939, p. 207). Apenas a partir do século XIX manifestações contrárias a esse tipo de formação se intensificariam, dando origem a outros tipos de propostas para a educação secundária.

Entretanto, o novo tipo de homem, que surgia nesse período — o comerciante, o industrial, o banqueiro —, já começava a vislumbrar a necessidade de um terceiro tipo de formação: a que faria uma composição da cultura desinteressada com a formação profissional, que enfatizaria as artes produtivas, sem no entanto menosprezar a cultura clássica. Porém, essa nova proposta de educação passaria por um longo período de gestação, antes de conseguir penetrar nas instituições escolares.

Embora os estudos matemáticos não tivessem sido enfatizados nem pelos escolásticos nem tampouco pelos defensores das escolas humanistas, desde a segunda metade da Idade Média algumas vozes, inicialmente isoladas, começam a alertar para os problemas que tal omissão poderia causar.

O franciscano Roger Bacon (c. 1210-1294) — que segundo Dampier foi "o único homem da Europa de toda a Idade Média que, tanto quanto sabemos, se aproxima, em espírito, dos grandes árabes que o precederam ou dos homens de ciência da Renascença que se lhe seguiram" —, apesar de concordar em muitos pontos com a escolástica de seu tempo, criticava os estudiosos que utilizavam uma argumentação verbal, baseada apenas em argumentos falíveis e no peso da tradição (Dampier, 1986, p. 118. Trad. da autora). Embora vivendo em um tempo em que a ciência moderna ainda não tinha começado a desabrochar, mas certamente percebendo o início de um novo tempo, foi um dos primeiros a alertar, já na segunda metade do século XIII, sobre a importância da experimentação e das matemáticas na busca de novos conhecimentos. Para ele, apenas a observação e a experiência poderiam confirmar as afirmações, e as matemáticas seriam elementos fundamentais para as outras ciências, como podemos perceber por suas próprias palavras:

> Há uma ciência, diz ele, mais perfeita do que as outras, e que é precisa para a verificação delas — a ciência da experimentação, que se avantaja às ciências que dependem da argumentação, pois que estas não nos dão a certeza dos fatos, por mais forte que seja o raciocínio, a não ser que a experiência venha em seu auxílio para verificar as suas conclusões. Só a ciência experimental pode verificar aquilo de que a natureza é capaz e aquilo que é produto da arte ou fraude. Só ela ensina a julgar as tontices dos mágicos, exatamente como a lógica se pode empregar para verificar os argumentos.
>
> (Apud Dampier, 1986, p. 121. Trad. da autora.)
>
> O abandono da matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas deste mundo.
>
> (Apud Boyer, 1974, p. 180.)

Em uma época posterior, já em pleno Renascimento, o descobrimento de novas terras e o surgimento da bússola, da pólvora e da imprensa impulsionaram o desenvolvimento das ciências nascentes.

A invenção da imprensa (1440), em especial, ao possibilitar a publicação de obras em língua vernácula das ciências emergentes — entre elas a aritmética comercial, a álgebra, a trigonometria —, contribui não apenas para a divulgação desses conhecimentos e para o início do rompimento da barreira existente entre a tradição culta e a artesanal, como também para o aumento da cultura da humanidade, que passa a partir desse momento a ter registro das chamadas artes práticas, até então transmitidas quase exclusivamente pelas escolas práticas.

A primeira dessas obras foi impressa em 1478, em Treviso, escrita por um desconhecido professor de aritmética. Trata-se de uma aritmética comercial que utiliza os numerais indo-arábicos e discute as operações fundamentais, as regras de dois, de três e de sociedade, sempre acompanhadas de muitas aplicações práticas. Muitas outras aritméticas comerciais apareceriam logo em seguida, mas a de maior influência foi a de Luca Pacioli, impressa em 1494, em Veneza, com o título *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*. Nessa obra, escrita em italiano, o autor apresentava uma compilação de tudo o que era conhecido naquele período sobre aritmética, álgebra, geometria euclidiana elementar, trigonometria e contabilidade. Nela apareceu impressa, pela primeira vez, uma ilustração de representação digital para os números. A publicação dessas obras, no entanto, não ficaria restrita à Itália. Na Alemanha, por exemplo, em 1489, o professor Johann Widman publicou uma aritmética comercial intitulada *Behēde vnd hubsche Rechnung auff allen Kauffmanschafft*, na qual aparecem pela primeira vez impressos os sinais de mais e de menos.

Essas publicações, destinadas aos comerciantes, aos engenheiros, aos artistas, ou seja, aos representantes das artes práticas, bem como os novos conhecimentos por elas divulgados, não chegaram a influenciar o mundo das instituições escolares tradicionais.

Percebendo o grande descompasso existente entre o desenvolvimento da sociedade e o das novas ciências e o ensino arcaico ministrado nas escolas e nas universidades, Leonardo da Vinci (1452-1519) — artista e engenheiro do Renascimento — levantou-se em defesa de uma educação voltada para a realidade, mais ligada à experiência e à observação, preconizando que as matemáticas deveriam desempenhar papel fundamental.

Homem envolvido em todos os acontecimentos de seu tempo, conhecedor dos avanços alcançados pela ciência e estudioso de diversos problemas ligados a várias áreas do conhecimento, Leonardo da Vinci desenvolvia seus estudos de maneira experimental, defendendo que "os únicos métodos verdadeiros em ciência eram a observação da natureza e a experimentação" (Dampier, 1986, p. 132). Apesar de não desprezar o saber dos antigos, acreditava que este era apenas "útil como ponto de partida", mas nunca deveria ser considerado "concludente".

A valorização do lado experimental da ciência e a percepção do papel que as matemáticas deveriam desempenhar nesse processo — o que faz com que seja considerado um homem de atitude intelectual moderna — levaram Leonardo da Vinci a se opor ao tipo de escola então dominante, aos humanistas de sua época, pois achava que o ensino das humanidades era desnecessário e defendia a ampliação dos estudos matemáticos.

Os seguintes fragmentos de seus textos confirmam-nos suas posições:

> Nenhuma investigação merece o nome de ciência se não passa pela demonstração matemática; nenhuma certeza existe onde não se pode aplicar um ramo das ciências matemáticas ou se não pode ligar com essas ciências.
>
> (Apud Caraça, 1978, p. 201.)

> Temos de consultar a experiência em uma diversidade de casos e circunstâncias até que possamos extrair deles uma regra geral que os contenha. Para que são úteis essas regras? Elas nos conduzem a ulteriores investigações sobre a natureza e às criações artísticas. Impedem-nos de enganarmos a nós mesmos ou aos demais prometendo-nos resultados que não se podem conseguir.
>
> (Apud Mason, 1984, v. 1, p. 144. Trad. da autora.)

Leonardo da Vinci não era, porém, uma voz isolada em defesa do ensino das ciências e das matemáticas, contrária ao ensino das humanidades. Nesse período começava a delinear-se a polêmica, que se estenderia durante séculos, entre os defensores do humanismo e os "de uma outra cultura, moderna, produtiva e voltada para a prática" (Manacorda, 1989, p. 187). A relação entre educação e trabalho — tema fundamental da educação moderna — começava a esboçar-se. De um lado, estavam os representantes da nobreza; de outro, os representantes das classes burguesas emergentes e das classes populares reprimidas.

As seguintes palavras de Giambattista Gelli, um sapateiro florentino, do século XVI, defensor das línguas vernáculas, das novas ciências e contrário ao estudo do latim, são bastante ilustrativas do caminho que essa polêmica tomaria nos séculos seguintes:

> A gramática, ou melhor, o latim, é uma língua, e não são as línguas que fazem os homens doutos, mas os conceitos e as ciências [...] Pode-se ser sábio e douto sem saber a língua grega e latina... Não são as línguas que fazem os homens doutos, mas as ciências.
>
> (Apud Manacorda, 1989, p. 190.)

Tanto Roger Bacon quanto Leonardo da Vinci defendiam a importância dos estudos matemáticos. Da Vinci, em especial, vinculava essa importância à experiência e à observação, e não ao desenvolvimento do raciocínio ou do pensamento, distanciando-se dessa forma da orientação platônica e, portanto, dos *Elementos*, de Euclides. Nenhum deles, porém, chegou a explicitar suas idéias através de uma proposta efetiva para o ensino das matemáticas. Apesar disso, podemos considerá-los como os mais remotos precursores de um movimento de renovação do ensino da Matemática.

A invenção da imprensa já havia dado início a publicações de obras matemáticas que apresentavam um caráter totalmente diferente dos estudos clássicos. A maior parte delas destinava-se ao ensino da aritmética e da álgebra práticas, necessárias às atividades comerciais. Havia, entretanto, também obras que tratavam de problemas relativos a outras atividades práticas, tais como a cartografia, a topografia, as artes, etc. Essas obras, despreocupadas com uma apresentação rigorosa, procuravam divulgar descobertas ocorridas nas chamadas artes práticas. Um exemplo é a *Investigação sobre a medida com círculos e retas de figuras planas e sólidas*, escrita pelo pintor alemão Albrecht Dürer (1471-1528), com o objetivo de auxiliar os pintores alemães, que, segundo ele, "não sabiam muita geometria". Dürer disse em seu livro que "havia escrito uma obra sobre o tema, a fim de que o pintor que a lesse 'não apenas tivesse uma boa iniciação, mas que fosse melhorando com a prática cotidiana. Seguirá buscando mais coisas e haverá de encontrar muito mais do que indico aqui'" (Apud Mason, 1984, v. 1, p. 142. Trad. da autora).

Apesar das significativas contribuições que muitas dessas obras deram ao avanço dos estudos matemáticos, especialmente dos estudos geométricos, os novos conhecimentos por elas divulgados seriam, durante muito tempo, excluídos do currículo clássico-humanista das escolas do tipo secundário.

A influência da obra de Euclides no ensino das matemáticas era tamanha, que chegou a ser considerado "quase um sacrilégio qualquer desvio de seu texto sagrado". Isso dificultou qualquer tentativa "de alteração no modo de ministrar o ensino de geometria e de incorporação" ao ensino da Matemática "dos conhecimentos aritméticos e algébricos, que se desenvolviam durante o Renascimento" (Roxo, 1937, pp. 39-40).

Entretanto, foi nesse período que começaram a aparecer as primeiras obras didáticas de geometria que pretendiam romper com a apresentação euclidiana.

A obra de Charles Bouelles (1470-1553) — a primeira geometria impressa na França — seria uma delas. Nela, o autor não apresenta uma exposição totalmente rigorosa, uma vez que alguns teoremas são "meras constatações de fatos". Além disso, introduz novos conteúdos; assim, em dois de seus capítulos são estudadas "as relações da geometria com a simetria, tal como se observa no mundo animado e no inanimado" (Roxo, 1937, p. 41).

Contudo, a obra renovadora mais importante do século XVI, especialmente por sua influência no ensino francês, foi a de Pierre de la Ramée (1515-1572), ou Petrus Ramus, a forma latinizada de seu nome, como era costume no Renascimento.

Ramée, defensor das novas idéias, colocou-se contra as posições dominantes de seu tempo. Em sua tese para obtenção do grau de mestre no Collège de Navarre, tentou provar que "Aristóteles não havia definido bem a Lógica". Essa teoria causou uma forte reação da Igreja, que conseguiu que Francisco I publicasse um decreto acusando Ramée de ser "temerário, arrogante, impudico, murmurador e mentiroso". A represália, entretanto, não intimidou o filósofo, que continuou a defender com fervor suas idéias. Constantemente atacava os métodos antiquados da universidade — para a qual chegou a sugerir modificações no currículo, de forma que os estudos matemáticos fossem privilegiados — e os escolásticos que nela ensinavam. Além disso, mantinha uma posição, claramente oposta aos humanistas, em defesa dos estudos matemáticos, em particular daqueles referentes à Matemática elementar prática, pois via as especulações geométricas e algébricas com "certa desconfiança". Suas idéias provavelmente determinaram seu assassinato, ocorrido em 1571. Jacques Charpentier, professor de Matemática do Colégio de França e cego seguidor das ordens dos jesuítas, teria sido, segundo Anibal Ponce, o responsável por essa morte, muitas vezes considerada acidental (Ponce, 1983, pp. 116-7).

A preocupação com as aplicações práticas foi o fio condutor da obra de Ramée, publicada em 1580, sobre as matemáticas. Nela, ele "abandona por completo, tanto na forma como na profundidade, o caminho seguido por Euclides" (Klein, 1931, v. 2, p. 294. Trad. da autora). A geometria, que ele encarava como a arte de bem medir, deveria se ater às aplicações práticas. Por essa razão, seu trabalho parte do estudo de medições topográficas, descreve todos "os aparelhos que para isso serão necessários" e esclarece todas as fases do "processo com numerosas e interessantes figuras" (Klein, 1931, v. 2, p. 294. Trad. da autora). Porém, apesar de enfatizar em sua obra o aspecto prático da geometria, Ramée não despreza totalmente as deduções lógicas. Para o autor, elas deveriam ser realizadas tendo por objetivo não o seu próprio estudo, mas para auxiliar na obtenção de resultados observados na prática ou quando, mesmo não sendo imediatas, são necessárias às aplicações práticas.

Assim, como nos diz Klein: "A modernização do ensino de geometria, isto é, sua liberação do rígido método de Euclides, começou na França muito cedo, cerca de 1550" (Klein, 1931, v. 2, p. 293. Trad. da autora).

Na Inglaterra, por outro lado, apesar de a geometria euclidiana ter sido a base para o ensino durante séculos, o próspero desenvolvimento do comércio, da indústria e da navegação, no século XVI, deu início a uma forte tradição científica, especialmente ligada às matemáticas aplicadas. Essa preocupação pela aplicação das matemáticas pode ser percebida no prefácio da primeira tradução inglesa, de 1570, dos *Elementos*, de Euclides. John Dee (1527-1606), o autor do prefácio, após classificar as matemáticas como intermediárias entre as coisas naturais e sobrenaturais — uma vez que "embora sejam coisas imateriais, contudo são suscetíveis de algum modo de serem significadas por coisas materiais" —, afirma que delas "surgem as proezas da geodésia, ou medição da terra, astutíssima para medir e demarcar terras, bosques e águas distantes" (Apud Mason, 1985, v. 2, p. 164. Trad. da autora). Além disso, elas poderiam ser aplicadas aos cálculos do comércio, aos problemas de arquitetura, astrologia, música, geografia, astronomia, assim como às artes da navegação, da medicina e da guerra. Mesmo assim, Dee declara que tais aplicações não eram praticadas com competência nem na Inglaterra nem na Irlanda.

Os comerciantes ingleses, preocupados com o baixo conhecimento matemático dos seus empregados, resolveram promover as matemáticas, especialmente através da contratação de professores para proferir conferências aos navegantes e capitães. Essa prática foi garantida pela fundação do *Gresham College*, local onde mais tarde, no século XVII, seria criada a Real Sociedade de Londres.

Enquanto os séculos XIV, XV e XVI propiciaram o renascimento da cultura clássica, o impulso às grandes navegações, o desenvolvimento de novas ciências e técnicas, os movimentos da Reforma e da Contra-Reforma e a gênese de novas questões científicas, filosóficas e pedagógicas, foi o século XVII que apresentou as primeiras obras que, ao refletirem essas profundas modificações, superavam definitivamente a ciência dos antigos.

Com o início da ciência moderna, que combinou pela primeira vez os métodos experimental e indutivo com a dedução matemática, ou seja, que rompeu a barreira existente entre a tradição artesanal e a culta, entre a razão e a experiência, que teria em Galileu Galilei (1564-1642) e em Isaac Newton (1642-1727) seus principais representantes, as matemáticas passaram a desempenhar um novo e importante papel: o de ferramenta necessária à explicação dos fenômenos. Não apenas como auxiliar nos desenvolvimentos lógicos, sobre bases preestabelecidas, mas como elemento fundamental para a formação, comprovação e generalização de resultados que podem, ou não, ser confirmados na prática.

Surgiu o conceito de lei quantitativa, que levaria à introdução do conceito de função e ao surgimento do cálculo infinitesimal, as bases da moderna Matemática. Inverteram-se, dessa maneira, as características que estiveram presentes na Matemática durante séculos. De uma Matemática preocupada com o estudo qualitativo dos fenômenos, que privilegiava a figura sobre o número, que desprezava tudo que lembrasse o movimento, o mecânico, o manual, para uma Matemática preocupada fundamentalmente com as artes práticas e mecânicas, com as relações quantitativas que poderiam ser estabelecidas para a explicação dos fenômenos, que utilizava o número para melhor compreender as figuras, que tinha no movimento a sua base de sustentação (Caraça, 1978, pp. 197 e 203-4).

A obra que sintetizou essa tendência moderna em educação foi a *Didáctica magna*, de Jan Amos Comenius (1592-1671). A importância dessa obra pode ser facilmente avaliada se lembrarmos que, apesar dos mais de cem tratados e livros didáticos escritos pelo autor e de sua vasta experiência educacional, foi sobretudo ela a responsável por ser Comenius sempre lembrado como o "Bacon da pedagogia", o "Galileu da educação", o "pai da didática", o "pai da pedagogia moderna"...

Realmente, nessa obra o autor apresentou, em seus trinta e três capítulos, muitos dos elementos que forneceriam a base para o desenvolvimento educacional dos séculos futuros. Dentre esses elementos encontraremos: a defesa da escola universal, para todos, independentemente de sexo, origem social e, até mesmo, da capacidade intelectual; a preocupação com um ensino "sólido", mas também agradável e sem desperdício de tempo; a proposição de vários níveis de estudo, de acordo com a natureza, ou com o desenvolvimento do homem; a proposta que esse ensino aconteça por ciclos, ou seja, os mesmos conteúdos deveriam sempre ser retomados e reelaborados; a valorização dos sentidos e da aplicação prática.

Enquanto a *Didáctica magna* é vista como a obra teórica mais importante de Comenius, e considerada um dos clássicos da pedagogia, outro de seus tratados, o *Orbis sensualium pictus*, um livro didático, é lembrado por seu caráter inovador e por sua influência nas escolas. Nessa obra, Comenius tenta propor, na prática, os elementos discutidos, teoricamente, em sua *Didáctica*. Nela, "o método de apresentar objetos, e não os seus símbolos ou palavras, foi levado à sua conclusão lógica pela introdução dos próprios objetos por meio de gravuras". O fato de esse ter sido o primeiro livro didático ilustrado já lhe asseguraria uma grande importância. Entretanto, foi o "seu método de tratar as coisas e de chegar, pelo processo indutivo, ao conhecimento generalizado" o aspecto considerado mais inovador (Monroe, 1939, p. 272).

A *Orbis pictus* e outras obras didáticas de Comenius, que tratavam do ensino das línguas, sobretudo do latim, chegaram a ser adotadas em quase todos os países e "foram [usadas] nas escolas durante mais de cento e cinqüenta anos, não tendo ainda desaparecido inteiramente no fim do séc. XIX" (Coménio, 1985, p. 29).

As idéias de Comenius parecem não ter influenciado, ao menos imediatamente, o ensino da Matemática. A única tentativa nesse sentido parece ter sido realizada pelo francês Le Clerc, em 1739, em uma obra sobre geometria. Nela, o autor fez uma "verdadeira fantasia geométrica, em que procurava substituir as demonstrações por quadros ou pinturas", na tentativa de tornar mais reais as proposições geométricas (Roxo, 1937, p. 42).

Ao final do século XVII, uma crise cultural já se encontrava instalada. Por um lado, a decadência das universidades e a criação de centros de pesquisa científica — as modernas academias científicas de Londres e de Paris; por outro lado, o início da "famosa *querèlle* sobre os antigos e modernos, que levava ao menosprezo das redescobertas humanísticas do mundo antigo e à exaltação das capacidades produtivas e culturais dos modernos [...] *Res non verba*, realidade e não palavras [...]" (Manacorda, pp. 225-6, grifos do autor).

O século XVIII, com relação ao desenvolvimento da Matemática, pode ser encarado como apenas um "interlúdio", pois sucedeu o século em que a Matemática grega havia sido superada, particularmente pelo descobrimento da geometria analítica e do cálculo infinitesimal, e precedeu o século do desenvolvimento da geometria e do rigor matemático (Boyer, 1974, p. 344). Esse foi, entretanto, o século das revoluções: da Francesa, da Americana, da Industrial e, também, da educação. Foi o início da intervenção estatal na educação, das escolas científico-técnicas, dos enciclopedistas franceses, de Rousseau e de Pestalozzi.

Jean-Jacques Rousseau (1712-1778) provocou uma verdadeira revolução na pedagogia ao exigir do processo educativo uma preocupação com o estudo da criança, a qual deveria situar-se no centro e fim da educação. Entretanto, como nos diz Manacorda, seria "uma simplificação banal reduzir todo o pensamento de Rousseau à visão puerocêntrica... quando nele há tantos outros e complexos aspectos". Dentre eles, podemos citar:

> [...] o direito à ignorância das coisas inadequadas à infância [...], a exclusão dos estudos especulativos, a necessidade de ensinar não muitas coisas, mas coisas úteis, não as ciências, mas o gosto de cultivá-las; a condenação dos livros, "triste bagagem" da idade infantil, cujo abuso mata a ciência [...]; a redescoberta da educação dos sentidos, a valorização do jogo, do trabalho manual, do exercício físico e da higiene, a sugestão de usar não a memória, mas a experiência direta das coisas, e de não utilizar subsídios didáticos já prontos mas construí-los pessoalmente [...] o plano progressivo da passagem da educação dos sentidos (dos dois aos doze anos) à educação da inteligência (até aos quinze anos) e da consciência (até aos vinte e cinco anos).
>
> (Manacorda, 1989, p. 243, destaque do autor.)

Estavam, portanto, delineados os princípios básicos da nova pedagogia, que, complementados pelas experiências práticas e pelas novas idéias de Pestalozzi, Herbart e Froebel, orientariam a educação dos séculos seguintes.

Ao valorizar a educação como um processo — que, partindo dos objetos sensíveis, deveria chegar, gradualmente, aos objetos intelectuais — e propor que o ensino das matemáticas ocorresse apenas à medida que fosse necessário ao desenvolvimento de outras atividades, Rousseau contribuiu enormemente para uma mudança pedagógica, especialmente no que diz respeito às finalidades e aos métodos educativos.

Estava definitivamente abalado o conceito disciplinar de educação, para o qual a Matemática, em sua abordagem dedutiva, euclidiana, era elemento fundamental. De fato, essa concepção via a mente como um feixe de faculdades a serem desenvolvidas por meio de atividades de caráter estritamente intelectual, desvinculadas de suas aplicações práticas — uma vez que se acreditava que essas faculdades poderiam ser aplicadas a qualquer outra disciplina ou situação prática. Para ela, o desenvolvimento dedutivo da Matemática não poderia deixar de ser encarado como primordial. As seguintes palavras de Monroe confirmam essa afirmação:

> Os partidários da educação disciplinar acreditavam que as matérias, *pela generalidade dos seus princípios, como a matemática e a lógica*, ou, pela natureza formal do seu conteúdo e organização como as línguas clássicas, *fornecendo um treino formal para as diversas "faculdades" da mente, eram educacionalmente de suprema importância. Este valor era peculiar a essas matérias independente de sua relação com a vida ou de sua aprendizagem final ou uso pelo aluno.* Admitiu-se mais no período do

> domínio completo desta teoria que *tais matérias eram peculiarmente aptas para o desenvolvimento da memória e da razão, e que estas "faculdades do espírito" eram as principais para o êxito na vida.*
>
> (Monroe, 1939, pp. 284-5, grifo nosso.)

Essa crença no poder das matemáticas para o desenvolvimento das faculdades mentais não era, entretanto, exclusividade dos partidários da antiga educação. Mesmo Locke, que em muitos aspectos contribuiria para o fortalecimento das idéias modernas em educação — especialmente por sua influência sobre Rousseau — e que foi em filosofia um dos representantes do empirismo, neste aspecto discordava das idéias dos modernizadores, em particular das idéias de Comenius e de Rousseau. Isso pode ser confirmado pelo seguinte fragmento de sua obra *Conduct of understanding*:

> [...] se quiserdes que um homem raciocine bem, deveis acostumá-lo a isto de antemão, a exercitar seu espírito em observar a conexão das idéias e a segui-las em sua seqüência. *Nada consegue isto melhor que as matemáticas,* as quais portanto, julgo, deveriam ser ensinadas a todos aqueles que têm tempo e oportunidade, *não tanto para torná-los matemáticos, quanto para torná-los criaturas racionais*; porque embora assim nos chamemos, ou para tal tenhamos nascido, se quiserem, todavia, verdadeiramente, a natureza não nos dá senão os germes da racionalidade. Nascemos para ser, se nos aprouver, criaturas racionais, mas só o uso e o exercício nos podem tornar racionais; em verdade, só o somos na medida em que o esforço e a arte a isto nos ajudem... Mencionei *as matemáticas como meio de fixar no espírito o hábito de raciocinar com profundeza e com seqüência;* não que eu julgue necessário a todos os homens serem profundos matemáticos, *mas que, tendo conquistado o hábito de raciocinar a que leva necessariamente esse estudo, sejam capazes de transferi-lo a outras partes do saber, quando haja oportunidade.*
>
> (Apud Monroe, 1939, p. 295, grifo nosso.)

Apesar de sua fundamental contribuição à educação, Rousseau não deu a devida importância a um aspecto de grande relevância para o ensino da Matemática: a relação teoria-prática. Esse aspecto, entretanto, foi bastante considerado por representantes de outro movimento, o Iluminismo, que surgira no início do século XVIII (antes, portanto, do naturalismo de Rousseau) e cuja maior expressão fora a *Enciclopédia das ciências, das artes e dos ofícios.*

O próprio título da obra já nos dá uma primeira indicação da preocupação dos enciclopedistas com relação aos aspectos práticos do conhecimento. Essa preocupação, porém, não se limitava ao título. Ela é explicitada em vários momentos da obra e mostra claramente a mudança de postura com relação às chamadas "artes mecânicas". Na realidade, a inclusão na *Enciclopédia* das "artes mecânicas", ao lado das "artes liberais", foi provavelmente sua característica mais revolucionária.

A relação que os enciclopedistas estabeleciam entre teoria e prática pode ser facilmente percebida pelas seguintes palavras de Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) no "Discurso preliminar" da *Enciclopédia:*

> A especulação e a prática constituem a principal diferença que distingue as ciências das artes. Em geral, pode-se dar o nome de arte a qualquer sistema de conhecimentos que é possível traduzir em regras... Mas assim como existem regras para as operações da inteligência ou da alma, assim também existem regras para as operações do corpo... Daí a distinção das artes liberais e mecânicas e a superioridade que se dá às primeiras sobre as segundas... superioridade que, sem dúvida, é injusta por muitos motivos...
>
> (Apud Manacorda, 1989, p. 240.)

Especificamente com relação à geometria, Denis Diderot (1713-1784), no verbete *art,* esclareceu as ligações que os enciclopedistas estabeleciam entre a "geometria das academias" e a "geometria das oficinas":

> Aquele que sabe somente a geometria intelectual é normalmente um homem sem destreza, e um artesão que tem somente a geometria experimental é um operário muito limitado... Sobre certos problemas tenho certeza que *é impossível conseguir algo satisfatório das duas geometrias em separado...* Façamos, afinal, aos artesãos a justiça que lhes é devida. As artes liberais se autoelogiaram bastante; usem agora toda a voz que têm para celebrar as artes mecânicas.
>
> (Apud Manacorda, 1989, p. 241, grifo nosso.)

Essa mudança de postura com relação às atividades práticas, em especial com relação à geometria experimental, e que refletia o ponto de vista utilitário do século XVIII, não poderia deixar de produzir reações no ensino de geometria em vigor nas escolas francesas, ainda totalmente baseado no sistema dedutivo euclidiano.

A obra de Clairaut

A mais importante dessas reações, especialmente pela influência que exerceria sobre as futuras propostas de renovação do ensino de Matemática, manifestou-se através da obra *Eléments de géométrie* (1741), de um seguidor da "moderna ciência" e da "moderna Matemática": Alexis Claude Clairaut (1713-1765), importante matemático ligado aos filósofos do Iluminismo e um dos primeiros a continuar a obra de Isaac Newton na França.

No primeiro parágrafo do prefácio de sua obra, Clairaut já manifesta claramente a sua posição contrária à introdução dos estudos geométricos através dos *Elementos*, de Euclides, os quais, ele acredita, são os principais responsáveis pelas dificuldades encontradas pelos estudantes:

> Ainda que a geometria seja uma ciência abstrata, é mister todavia confessar que as dificuldades experimentadas pelos que começam a aprendê-la, procedem as mais das vezes da maneira por que é ensinada nos elementos ordinários. Logo no princípio se apresenta ao leitor um grande número de definições, de postulados, de axiomas e princípios preliminares, que só lhe parecem anunciar um estudo árido. As proposições que em seguida vêm, não fixando o espírito sobre objetos mais interessantes, e sendo além disso difíceis de conceber, acontece comumente que os principiantes se fatigam e se aborrecem antes de terem uma idéia clara do que se lhes queira ensinar.
>
> (Clairaut, 1892, p. IX. Trad. de José Feliciano.)

Antes de apresentar as bases de sua proposta, Clairaut comenta a existência de propostas que tentavam amenizar o estudo árido da geometria, com a introdução de aplicações práticas, após a demonstração de cada uma das principais propriedades. Para ele, entretanto, essa maneira de apresentação só conseguiria mostrar a utilidade da geometria, mas não facilitaria sua aprendizagem, uma vez que "o espírito só cairia em idéias sensíveis depois de se haver fatigado para aprender idéias abstratas".

Preocupado em romper com a tradicional apresentação dos conhecimentos geométricos por meio de um método que pudesse ao mesmo tempo motivar e auxiliar na compreensão, Clairaut encontrou na história o fio condutor para a sua obra. Não o fez, entretanto, através da reconstituição detalhada das descobertas geométricas, mas por meio de um caminho — que poderia ter sido aquele percorrido pelos descobridores — que apresentasse essas descobertas como soluções encontradas pelos homens na tentativa de resolver os problemas que a eles se apresentaram. Por entender que os mais antigos problemas — como a própria origem da palavra *geometria* parece indicar — estavam relacionados à questão de medida de terras, escolheu esse tema como o elemento gerador das descobertas geométricas.

Partindo de determinadas situações-problema envolvendo a noção de medida, e dos limites e dificuldades encontradas para resolvê-las, Clairaut vai aos poucos, em uma linguagem agradável, desenvolvendo as principais definições e propriedades geométricas. À medida que o estudo vai se aprofundando, a ligação com as questões práticas vai desaparecendo. O fato, porém, é imediatamente justificado pelo autor, que atribui à curiosidade e ao gosto pela "precisão rigorosa" os elementos que, juntamente com a utilidade, seriam os responsáveis pelo desenvolvimento da geometria:

> Quem prestou atenção ao que dissemos para mostrar como se chegou a medir os terrenos, viu naturalmente que as posições das linhas em relação umas às outras *davam lugar a observações dignas de nota por si mesmas, independentemente da utilidade que na prática pudessem ter.* É de supor que tais observações levassem os geômetras a alargar mais suas descobertas, porquanto *não são somente as necessidades que movem os homens*: a curiosidade é também grande motivo para muitas vezes os estimular em suas investigações.
>
> O que ainda devia contribuir para o progresso da geometria *é o gosto que naturalmente se tem por esta precisão rigorosa, sem a qual o espírito nunca se satisfaz.*
>
> (Clairaut, 1892, p. 67, grifo nosso. Trad. de José Feliciano.)

Mas como entender a concepção de rigor de Clairaut, que, ao mesmo tempo que se posicionava contra a apresentação dedutiva da geometria, ao menos como introdução aos estudos geométricos, e propunha um método mais "natural" para o seu desenvolvimento, considerava importante a "precisão rigorosa"?

A primeira impressão que temos ao folhear o livro de Clairaut é que ele teria eliminado totalmente o rigor e, conseqüentemente, as provas ou demonstrações. Afinal, lá não encontramos a conhecida forma de apresentação "rigorosa" da geometria, com os seus axiomas, teoremas e seus longos raciocínios dedutivos. Mas isso é apenas uma impressão inicial.

É verdade que ele não apresenta a geometria como um sistema dedutivo, nem tem a mesma preocupação com o rigor que Euclides. Também é verdade que, especialmente na primeira parte de seus *Eléménts,* muitas definições e proposições são tiradas a partir de observações "evidentes" sobre determinadas situações-problema, e que muitas das proposições tradicionais são omitidas.

Entretanto, o caminho escolhido por Clairaut é "lógico", no sentido da existência de um encadeamento lógico das proposições, uma vez que não apresenta nenhuma conclusão sem que as condições necessárias tenham sido anteriormente provadas, mesmo que isso tenha acontecido por meio de evidência. Além disso, as provas das proposições consideradas não evidentes, apesar de serem realizadas por meio da linguagem comum, apresentam, em detalhes, todos os passos e justificativas. Mas, alguns podem afirmar, não são esses elementos que garantem o "rigor lógico". Realmente, mesmo para a noção de rigor existente no século XVIII, seria muito difícil a obra de Clairaut ser considerada rigorosa. Isso, entretanto, era previsto pelo próprio autor, que apresenta uma defesa prévia para tal crítica, ao mesmo tempo que esclarece sua noção de rigor:

> Em alguns passos destes elementos, talvez me censurem por me reportar demasiado ao testemunho dos olhos, e por me não cingir bastante à exatidão rigorosa das demonstrações. Aos que tal censura me fizerem, peço observem que *só trato pela rama* as proposições cuja verdade se patenteia por pouco que nelas se atente. *Assim faço sobretudo no começo,* em que as mais das vezes se encontram proposições desse gênero, e isto por haver notado que desse modo aqueles que tinham propensão para a geometria, se compraziam em exercer seu espírito, ao passo que se desalentavam quando eram atochados de demonstrações, por assim dizer, inúteis.
>
> Não nos surpreende que Euclides se desse ao trabalho de demonstrar que dois círculos secantes não têm o mesmo centro, que um triângulo encerrado em outro tem a soma de seus lados menor que a soma dos lados do triângulo que o envolve. Este geômetra tinha de convencer sofistas obstinados, que se gloriavam de refusar as verdades mais evidentes, e então era preciso que a geometria tivesse, como a lógica, o auxílio de raciocínios em forma para tapar a boca à chicana. As coisas, porém, mudaram de face. Todo raciocínio que recai sobre o que o só bom senso de antemão decide, é hoje em pura perda: só serve para obscurecer a verdade e enfadar os leitores.
>
> (Clairaut, 1892, pp. XII-XIII, grifo nosso. Trad. de José Feliciano.)

Talvez Clairaut, como nos diz Blanché (1987, pp. 28-9), não dissociasse claramente as duas diferentes funções que podem ser atribuídas à demonstração: a "eficiência psicológica" e o "rigor lógico", e estivesse sempre se referindo à primeira delas, apesar de tentar encontrar "explicações e desculpas" para justificar Euclides. Entretanto, para o ensino de Matemática foi exatamente essa preocupação com a "eficiência psicológica", mais do que com o "rigor lógico", que levaria a sua obra a ser encarada como a primeira tentativa efetiva de constituição de uma pedagogia psicológica da Matemática, tornando-a uma referência obrigatória para todas as futuras propostas de reformulação. Mas essa influência não se deu ainda durante o século XVIII [4].

Apesar disso, as mudanças sociais ocorridas no final do século XVIII, especialmente na Inglaterra, França e Estados Unidos, provocaram mudanças significativas nos objetivos, métodos e conteúdos do ensino.

Com a Revolução Francesa foram criadas, por exemplo, a *École Polytéchnique* e a *École Normale Superiéure,* importantes instituições de investigação e educação científica durante todo o século XIX.

Na *École Polytécnique,* responsável pela formação de engenheiros, encontramos o administrador e professor Gaspard Monge (1746-1818) ensinando assuntos totalmente novos para o currículo universitário — a geometria descritiva e a geometria espacial —, uma mudança no ensino de Matemática promovida pela Revolução Francesa. Além de ensinar conteúdos novos, Monge apresentava a geometria ligada às aplicações e utilizava um método também inovador que consistia "principalmente no estabelecimento de exercícios práticos executados pelos alunos, que, desse modo, tinham uma participação ativa e individual no desenvolvimento do curso" (Klein, 1931, pp. 295-6. Trad. da autora).

Na *École Normale,* destinada à formação de professores para o ensino médio, lecionava Adrien-Marie Legendre (1752-1833), interessado em desenvolver uma geometria "que satisfaça o espírito", como ele mesmo afirma na introdução de sua obra *Éléments de géometrie* (1794).

A geometria euclidiana continuou ainda por muito tempo a ser a base do ensino, especialmente no nível médio. Essa situação não se alteraria significativamente, tanto nos países reformados quanto nos católicos, até o início do nosso século.

Apesar disso, desde o século XVIII, com o aumento dos defensores da introdução de matérias mais práticas nesse tipo de ensino, alguns ensaios de uma educação média mais utilitária começaram a surgir, não modificando, entretanto, de modo geral a fisionomia do curso secundário.

[4] Apesar de alguns autores afirmarem que a obra de Clairaut, que teria chegado a meia dúzia de edições, tivesse exercido grande influência no ensino de geometria na França, o mais provável é que essa influência tenha sido bastante limitada. Na Itália, ao contrário, uma tradução dessa obra teria sido bastante utilizada em escolas técnico-agrícolas, especialmente durante a primeira metade do século XIX. Cf. Castelnuovo, 1988a.

Capítulo III

O ensino de Matemática: o caminho da modernização

Digamos antes de tudo que não apenas é desculpável, senão perfeitamente justificável, que o ensino secundário mantenha-se atrasado em certo lapso de tempo, seguramente alguns decênios, com respeito aos progressos mais recentes de nossa ciência, produzindo-se o que poderíamos chamar uma certa histerese, tanto mais significativa, por desgraça, quando alcança mais de um século [...] O que nós pedimos para a reforma é realmente bem modesto quando se compara com o estado atual da ciência. Desejamos somente que o conceito geral de função [...] penetre como um fermento em todo o ensino médio; mas nunca por definições abstratas, mas por meio de exemplos elementares [...] que cheguem ao aluno como algo vivo [...]

(Felix Klein)

A introdução de elementos da moderna Matemática nos cursos de nível médio, do tipo secundário, foi um dos pontos defendidos pelas propostas de modernização do ensino de Matemática que começaram a surgir nos finais do século passado e inícios deste século.

O descompasso existente entre a Matemática ensinada nessas escolas e os estudos desenvolvidos nas universidades, estes baseados nos novos avanços da Matemática, enquanto aquela ainda limitada aos antigos, foi um dos argumentos utilizados pelos reformadores para introduzir novos conteúdos.

As propostas, que surgiram inicialmente de forma isolada em diferentes países, foram ampliadas após a criação da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática, em 1908.

Os trabalhos realizados pela Comissão acabaram influenciando de maneira decisiva o ensino de Matemática de muitos países, daquele momento em diante.

A transição

Foi no século XIX que se iniciou a difícil tarefa de transferir para a prática os ideais e as exigências advindas das revoluções.

O novo contexto sócio-político-econômico, especialmente devido ao rápido avanço tecnológico e ao desenvolvimento industrial, deslocou para os centros urbanos grandes massas da população.

O trabalho realizado por esse contingente em fábricas ou indústrias — os locais de desenvolvimento de uma nova forma de produção de bens materiais, onde a máquina assumia o papel que o homem havia desempenhado anteriormente — levou ao desaparecimento da velha forma de produção artesanal e do aprendizado prático herdado dos antigos egípcios. Com isso, os membros das classes menos favorecidas perderam a única forma de educação a que eles tinham acesso.

Entretanto, à medida que a ciência moderna avançava e a tecnologia gerava novas máquinas, tornava-se inevitável discutir a educação dessa nova classe de trabalhadores.

Por um lado, era necessário preparar o operário para o uso adequado das novas máquinas, e isso só seria possível através da introdução do ensino de alguns elementos básicos de escrita e matemática. Por outro lado, seria também preciso formar técnicos especializados, que, através do conhecimento dos últimos avanços da ciência, pudessem melhorar ainda mais as técnicas de produção.

A ampliação do ensino às classes trabalhadoras, ou seja, a universalização da educação, e a relação educação-trabalho passaram a ser, a partir desse momento, os grandes temas das discussões educacionais.

Para muitos, no entanto, isso representava apenas uma "mania" da época, ou uma "idéia louca", totalmente sem base real. Podemos observar essa posição pelas seguintes palavras dirigidas ao "barão Francesco Pertusato, gentil-homem de Sua Majestade Imperial Régia austríaca":

> Uma das manias que podemos considerar dominante em nossos dias na Europa é aquela de querer difundir as luzes sobre todas as classes da sociedade... Mas quem pode conter as risadas perante a louca idéia de fazer participar do benefício dessas luzes o simples e morigerado morador dos campos? E a classe dos artesãos, a este respeito, não é absolutamente diferente daquela dos camponeses... *Faz-se necessário, portanto, que se prescrevam limites à comunicação das luzes na sociedade...*, porque a ignorância parece reivindicar com autoridade o seu império... É conveniente, portanto, não ocupar-se da instrução científica da-

quelas classes da população, condenadas pela indigência a um trabalho mecânico e diuturno. Para elas basta que sejam imbuídas de uma moral pura e santa. *O que seria realmente vergonhoso é descuidar da educação da classe nobre, confortada e rica.*

(Apud Manacorda, 1989, p. 276, grifo nosso.)

Vemos que a antiga separação existente entre a escola e o trabalho, entre a tradição culta e a artesanal, entre "os que pensavam" e "os que faziam", encontrava forte resistência em ser rompida.

Afinal, não seriam apenas alguns poucos privilegiados que teriam condições de dominar a "arte culta", em especial a Matemática? Não seriam os operários, pela sua própria origem social e natureza, incapazes de compreendê-la? E, além disso, caso fosse considerado possível aos operários compreender a "arte culta", isso não seria perigoso?

As seguintes palavras, proferidas em França no ano de 1825, pelo barão Charles Dupin, baseadas na experiência inglesa e em defesa da ampliação de escolas técnicas — que a Comissão Parlamentar havia considerado já existirem em número excessivo —, ao mesmo tempo que confirmam as resistências existentes, apresentam alguns argumentos que eram utilizados nas discussões sobre o tema:

Quiseram ver nas escolas de artes e ofícios os inconvenientes da revolução... *Pareceu supérfluo e até perigoso ensinar* a ler, escrever e, *especialmente, fazer contas aos operários*... Mas — pergunto-me — em que os elementos da aritmética, da geometria ou da mecânica, do desenho, da física ou da química podem ser perigosos? O estudo e a difusão das ciências, longe de ser anti-social e perigoso, especialmente para os governos monárquicos, é, antes, para estes governos um meio de potência [...] *Iniciou-se com a crença de que as verdades matemáticas fossem ininteligíveis pelos simples operários*... Mas não existe nenhum princípio matemático aplicado aos trabalhos das artes que não possa ser ensinado e aprendido facilmente por qualquer indivíduo de inteligência normal. Alguns maus patrões de oficina..., industriais sem indústria, têm impedido os jovens operários de seguir os cursos, temerosos de que adquirissem conhecimentos que os mestres-artesãos não tinham... Vergonhoso espírito de ciúme! Carece uma aliança entre saber e indústria!

(Apud Manacorda, 1989, p. 287, grifo nosso.)

As discussões educacionais do século XIX, entretanto, não se limitavam às questões ligadas à universalização e à relação educação-trabalho. Outros temas, tais como a laicização e a estatização da educação, também estavam no centro das atenções. Esses temas seriam contemplados, de formas variadas e em diferentes ritmos, pelos sistemas nacionais de educação, que, organizados durante aquele século, criariam novos tipos de escolas para todas as camadas da população.

Um desses tipos foram as escolas elementares — *école primaire élémentaire*, na França; *elementary school*, na Inglaterra, e *Volkschule*, na Alemanha — destinadas às classes populares. Seu objetivo básico era "equipar os imaturos dessas camadas com as indispensáveis habilidades instrumentais constituídas pela leitura, a escrita e o cálculo, e com algumas informações gerais e hábitos e atitudes que os tornassem trabalhadores eficientes e membros úteis da comunidade nacional" (Silva, 1959, p. 77).

Em continuidade a esses estudos, os alunos podiam cursar as escolas de ensino médio profissional, as quais, entretanto, não davam acesso aos cursos de nível universitário.

Dessa forma, as classes populares começaram a adquirir o direito ao ensino, mas apenas àquele que dizia respeito às partes técnicas e necessárias à formação profissional. Para os membros das classes sociais mais elevadas, porém, reservou-se outro tipo de formação, que visava à cultura geral.

Essa diferenciação seria estabelecida já no nível elementar. Os alunos freqüentavam classes ou escolas preparatórias que funcionavam anexas às escolas secundárias ou a elas estavam vinculadas. Correspondiam às *classes préparatoires* na França, às *preparatory schools* na Inglaterra e às *Vorschulen* na Alemanha. Após a preparação inicial, os alunos desenvolviam seus estudos em escolas do tipo secundário, que tinham como base as humanidades clássicas — os *lycées* na França, o *Gymnasium* na Alemanha e as *grammar schools* na Inglaterra —, e, por fim, na Universidade.

A importância cada vez mais acentuada das ciências para o desenvolvimento sócio-político-econômico acabou, entretanto, gerando pressões para modernizar o currículo das escolas secundárias, especialmente através da introdução de novas matérias. Voltou ao centro das atenções a antiga discussão sobre a melhor formação geral, que em certo sentido havia se iniciado ainda no tempo dos sofistas e de Sócrates, com a oposição entre os defensores do estudo da retórica e os da filosofia. A oposição agora, no entanto, assumiu uma feição moderna: ela se deu entre os defensores da antiga formação clássica — os *anciens* — e os defensores da introdução de novas disciplinas — os *modernes*.

Quais as matérias que deveriam fazer parte da formação geral dos indivíduos? As humanidades clássicas ou as ciências? A escolha de uma determinada matéria deveria ser justificada por sua utilidade futura ou por seu poder de desenvolver o espírito do homem?

Essas questões, que se encontravam na base das discussões, mostram-nos que o tema dominante da educação moderna — a relação entre escola e trabalho — estava começando a influenciar as propostas de ensino dos tipos mais conservadores de escolas: as secundárias e as universidades.

Os defensores de um ensino secundário do tipo disciplinar clássico — baseado no estudo das humanidades clássicas — acreditavam que ele seria o único capaz de formar o "verdadeiro homem", o "homem completo", o homem das classes dirigentes, aquele que teria a capacidade de atuar em qualquer área, de descobrir, de imaginar... para outros executarem.

As seguintes palavras de Fouilée, um escritor do século XIX, mostram claramente a posição desses defensores:

> Quão decisiva é a poesia como exemplo! Faz-se um Virgílio ou um Racine pelo ensino das regras de verificação? *Não se faz um homem científico ensinando-lhe ciência, porque a verdadeira ciência, como a poesia, é invenção.* Podemos aprender a construir uma estrada de ferro por meio de regras, mas aqueles que inventaram estradas de ferro fizeram-no somente pela força do poder intelectual que adquiriram e não pela força de meros conhecimentos que tivessem recebido [...] E então volta a questão: O melhor meio de reforçar e desenvolver o intelecto da nossa juventude será sobrecarregar-lhe a memória com os resultados da ciência moderna, ou é *ensiná-la a raciocinar, a imaginar, a combinar, a adivinhar,* a saber de antemão aquilo que deve ser verdade por um sentido inato de ordem e harmonia, de simplicidade, fecundidade — um senso quase idêntico ao da beleza? E, além disto, são os jovens educados para serem engenheiros ou poetas? A educação não é uma aprendizagem para um ofício, é a cultura das forças intelectuais e morais no indivíduo e na raça.
>
> (Apud Monroe, 1939, p. 287, grifo nosso.)

Outros, como Thomaz H. Huxley (1825-1895), defendiam uma educação mais moderna, mais prática, que melhor responderia às novas exigências sócio-político-econômicas.

Pelo seguinte fragmento de um dos discursos de Huxley, podemos perceber alguns dos argumentos utilizados por esses defensores em sua crítica à educação literária e clássica, dominante naquele período. Após um longo comentário inicial a respeito da importância da Inglaterra no contexto político-econômico-cultural daquele momento histórico, faz uma severa crítica ao tipo de escola existente, especialmente pelo fato de não atender às exigências de uma nação com um elevado grau de desenvolvimento:

> Ali vós lutareis, pelo menos em hipótese; *mas não aprendereis sequer uma única coisa de todas aquelas que mais necessitais diretamente conhecer ao deixar a escola e entrar na vida*

prática; segundo todas as probabilidades, seguireis a vida de comércio, mas não sabereis onde nem como é produzido qualquer artigo do comércio, ou a diferença entre exportação e importação, ou o significado da palavra "capital" [...] É possível que entreis na Câmara dos Comuns, que tenhais de partilhar da tarefa de fazer as leis que poderão ser uma bênção ou um anátema para milhões de homens. Mas não ouvireis uma palavra sequer a respeito da organização política de vosso país; o significado da controvérsia entre livres-cambistas e protecionistas nunca vos será mencionado; não sabereis que há tais coisas como leis econômicas. O poder mental que será de mais importância em vossa vida diária será o poder de ver as coisas como elas são, sem respeito à autoridade, e de deduzir, com exatidão, conclusões gerais de fatos particulares. Mas, na escola e no colégio, não conhecereis outra fonte de verdade a não ser a autoridade; *e nem exercitareis vossas faculdades de raciocinar sobre coisa alguma a não ser na dedução daquilo que é determinado pela autoridade.* Havereis de fatigar a vossa alma com trabalho e muitas vezes comereis o vosso pão com tristeza e amargura e *não tereis aprendido a buscar refúgio na grande fonte de prazer realmente pacificador, o sereno lugar de descanso para a natureza humana alquebrada — o mundo da arte.*

(Apud Monroe, 1939, p. 403, grifo nosso.)

A introdução das ciências modernas nos currículos, especialmente no da escola secundária, porém, aconteceu de forma muito lenta e diferenciada. Na Alemanha, por exemplo, o ensino secundário foi diversificado por meio da introdução de novos tipos de cursos, considerados equivalentes ao *Gymnasium.* Surgiram, dessa forma, o *Realgymnasium* e a *Oberrealschule.* Outros países, como a França, por exemplo, acabaram introduzindo matérias modernas no currículo secundário humanista, transformando-o em um currículo enciclopédico e sobrecarregado (Silva, 1959, p. 165).

A inclusão dessas modernas matérias nos cursos das escolas secundárias acabou, entretanto, provocando um repensar sobre a importância do ensino da Matemática, que desde a Antiguidade clássica tinha garantido seu lugar, entre as sete artes liberais, no currículo escolar.

Os defensores da introdução de matérias mais modernas, como a História, as Ciências naturais e as Línguas modernas, ao tentarem garantir um espaço para elas no currículo da escola secundária, começaram a questionar a importância da Matemática, utilizando como argumento fundamental o fato de ela ser pouco utilizada na vida diária.

Os defensores da Matemática, por outro lado, contra-argumentavam, utilizando para isso a teoria da disciplina mental, segundo a qual "o pensamento poderia ser treinado de maneira geral mediante a instrução em matérias específicas" (Kilpatrick, 1992, p. 31. Trad. da autora). "Mais importante ainda que a matéria de matemática é o fato de que ela exemplifica de maneira muito característica, clara e simples, certos modos de pensamento que são da maior importância para todos", disse Jacob William Albert Young em 1906 (Apud Kilpatrick, 1992, p. 31. Trad. da autora).

A justificativa para o ensino de Matemática, baseada nessa argumentação, no entanto, foi fortemente abalada pelos estudos psicológicos desenvolvidos por Edward Lee Thorndike, que questionavam a possibilidade de transferência do que era aprendido em Matemática para outros domínios.

A posição de Thorndike gerou uma reação imediata da comunidade de educadores matemáticos, que acabaria levando ao desenvolvimento, durante as primeiras décadas do século XX, de uma série de outros estudos psicológicos sobre as possibilidades da transferência, ao redimensionamento das justificativas utilizadas para o ensino de Matemática e a um longo debate sobre o valor da disciplina mental nos estudos matemáticos.

Paralelamente ao desenvolvimento das escolas de nível médio, houve, também, no século XIX, a criação de cursos superiores técnicos e o ressurgimento da Universidade.

A Universidade renovou-se com a introdução de novos conteúdos técnicos e científicos, de maneira que "as ciências matemáticas e naturais acabam separando-se definitivamente da velha matriz das artes liberais, onde se situaram durante milênios" (Manacorda, 1989, p. 288).

Nessas instituições modernas — a Universidade renovada e as escolas técnicas — desenvolveu-se a Matemática do século XIX. Os matemáticos passaram a ser, além de pesquisadores, professores, começando a preocupar-se mais diretamente com as questões de ensino.

Com o novo tipo de ensino de Matemática proposto, especialmente pelas escolas técnicas, onde tanto a Matemática teórica quanto a aplicada faziam parte do currículo, houve a necessidade de novos livros didáticos. Essas obras, elaboradas pelos próprios professores/matemáticos para serem utilizadas em suas aulas, em cumprimento a uma exigência das escolas, incorporavam os novos avanços da Matemática e seriam utilizadas por estudantes de vários países durante muitos anos[5].

---

[5] Um bom exemplo são os livros de Sylvestre François Lacroix (1765-1843), professor da *École Polytechnique*, aluno e amigo de Monge. O seu livro sobre geometria analítica, por exemplo, "apareceu em vinte e cinco edições em noventa e nove anos!" (Boyer, 1974, p. 352). Suas outras obras — sobre aritmética, geometria, álgebra e cálculo — tiveram sucesso semelhante e foram utilizadas por várias gerações de estudantes, não apenas na Europa como também nos Estados Unidos e em outros países da América. No Brasil, os livros de Lacroix foram utilizados na Academia Militar Real do Rio de Janeiro, desde a sua fundação em 1810. As obras de Lacroix começam, assim, a ser traduzidas, por F. C. da Silva Torres e J. V. dos Santos e Sousa, entre 1810 e 1812, ou seja, três anos antes de ser fundada, em 1815, na Inglaterra, a *Analytical Society*, que deu início às traduções das obras de Lacroix, introduzindo naquele país os métodos analíticos do Continente. Cf. Castro, 1992, pp. 26-31. No Colégio Pedro II, desde sua criação, em 1837, o livro de geometria de Lacroix foi bastante utilizado. Cf. Haidar, 1972, pp. 102-3.

A Matemática também passou por grandes transformações nesse período. Isso, no entanto, não aconteceu apenas devido às novas exigências impostas pelo desenvolvimento industrial, mas, especialmente, pela possibilidade aberta pelas idéias democráticas de renovar as formas antiquadas de pensamento. Como nos afirma Struik:

> A nova e turbulenta atividade matemática não foi devida basicamente aos problemas técnicos provocados pelas novas indústrias. A Inglaterra, o centro da revolução industrial, permaneceu estéril por várias décadas no que diz respeito à produção matemática. A matemática progrediu com mais fulgor em França e um pouco mais tarde na Alemanha, países nos quais o corte ideológico com o passado foi sentido mais profundamente e onde foram feitas transformações mais radicais, ou tiveram de ser feitas, para preparar terreno para a nova estrutura econômica e política capitalista.
>
> (Struik, 1989, p. 225.)

Os estudos matemáticos rompem sua ligação com as necessidades práticas, com a mecânica e a astronomia. Surgem os campos especializados, a preocupação com o rigor e a revolução na geometria. Como nos diz Boyer: "O século dezenove, mais do que qualquer período precedente, mereceu ser conhecido como Idade Áurea da matemática. O que se acrescentou ao assunto durante esses cem anos supera de longe, tanto em quantidade quanto em qualidade, a produtividade total combinada de todas as épocas precedentes" (Boyer, 1974, p. 419).

O deslocamento das preocupações no século XIX, tanto de governantes quanto de educadores, para o ensino elementar acabou afetando diretamente o ensino de Matemática.

Durante séculos, ao menos desde a Grécia antiga, as grandes discussões sobre as questões educacionais estiveram centradas nos graus médio e superior. Todas as propostas reformadoras, tanto do ensino em geral como do ensino específico da Matemática, tiveram como foco central de preocupação esses níveis escolares e deram pouca ou nenhuma atenção ao ensino elementar. Entretanto, a criação dos sistemas nacionais de educação e a conseqüente ampliação desse nível de ensino a todas as camadas da população levaram a uma mudança do foco de atenção.

Nesse período, os trabalhos sobre a educação, em especial a elementar, começam a florescer, dando origem aos estudos psicológicos, sociológicos e científicos, que forneceriam as bases para o Movimento da Escola Nova ou Ativa.

Entre os finais do século XVIII e começos do XIX, Johann Pestalozzi (1746-1827), seguidor das idéias de Rousseau, forneceu os germes da moderna educação, ao propor um ensino não repressivo voltado ao desenvolvimento da criança, com base na sua curiosidade e interesse, que caminhasse do concreto ao abstrato, da intuição ao conceito, que substituísse a tradição pela experimentação.

No caso específico da Matemática, as idéias propostas por Pestalozzi alteravam radicalmente o ensino mecânico e memorístico existente até então, como podemos perceber pelos seguintes fragmentos de suas cartas dirigidas ao inglês Greaves, em sua obra *Mãe e filho*:

> Aquilo que mais propriamente importa não é o conhecimento de determinadas propriedades e de relações entre formas e números determinados, mas a exatidão do pensamento lógico e a capacidade de invenção... *Como é possível fazer entender à criança que dois mais dois são quatro, se primeiro não se mostra isso na realidade? Querer começar com conceitos abstratos é irracional e prejudicial, antes que proveitoso.*
>
> (Apud Manacorda, 1989, pp. 264-5, grifo nosso.)

Pestalozzi, menos teórico que experimentador de situações do ensino, não ficou apenas no nível das idéias e escreveu propostas específicas para o ensino de Matemática, em que apresentava "as relações mais triviais possíveis, tanto aritméticas como geométricas, em uma série inacabável, tudo isso detalhado de maneira muito minuciosa" (Klein, 1931, v. 2, p. 311. Trad. da autora).

Suas preocupações em proporcionar um ensino que não fosse iniciado pelos conceitos, mas que, ao contrário, levasse a criança a tirar suas próprias conclusões a partir da intuição, podem ser percebidas pelo seguinte exemplo:

> Para levar uma criança a compreender que um quadrado pode ser dividido em partes iguais por meio de retas horizontais e verticais, Pestalozzi não apenas faz uma tabela com todas as 100 combinações possíveis de divisão por 0, 1, ..., 9 horizontais e verticais, como também explica no texto o número e a posição de todos os retângulos e quadrados resultantes em cada caso particular.
>
> (Klein, 1931, v. 2, p. 311. Trad. da autora.)

As mesmas preocupações estavam presentes nas obras do filósofo John Frederick Herbart (1776-1841), seguidor, ampliador e teorizador das idéias de Pestalozzi.

As influências de Pestalozzi, Herbart e, também, Froebel sobre o ensino de Matemática da escola elementar, através do "reconhecimento da necessidade de conceder uma grande importância à intuição imediata, orientando os métodos para o estudo de objetos reais e bastante conhecidos dos alunos" (Klein, 1931, v. 2, p. 310. Trad. da autora), foram sentidas já a partir da segunda metade do século XIX, especialmente na Alemanha, Inglaterra, Itália, França e nos Estados Unidos.

Desde o final desse século, entretanto, essas preocupações também começaram a atingir a escola média de formação geral.

O plano de estudos proposto pela reforma de 1882, na Prússia, por exemplo, criou no terceiro ano do ensino médio, que tinha um total de nove anos, um "curso de geometria preparatória, com o objetivo de proporcionar aos alunos um conhecimento intuitivo das coisas, que servisse de base ao edifício geométrico", sem ter, nesse momento, nenhuma preocupação com as considerações lógicas (Klein, 1931, v. 2, p. 312. Trad. da autora).

Já nesse final de século começaram também a surgir os primeiros livros didáticos que seguiam as novas tendências. Um exemplo é o livro de Holzmüller, *Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik,* editado em três partes, em Leipzig (Teubner), entre 1894 e 1895. Nele, o autor apresenta os temas da Aritmética e da Geometria alternados, de forma a estabelecer conexões entre eles. O desenvolvimento dos conceitos geométricos está baseado no desenho e nas construções, para os quais o autor recomenda que sejam realizadas com "toda limpeza e exatidão". Além disso, "freqüentemente enuncia um teorema geométrico como resultado de uma construção prática" (Klein, 1931, v. 2, p. 313. Trad. da autora).

Em 1832, Warren Colburn, sob a influência de Pestalozzi, já havia publicado nos Estados Unidos o livro *Introduction to algebra upon the inductive method of instruction,* que teria como preocupação básica "fazer a transição da aritmética à álgebra tão gradual quanto possível" (Butler et al., 1970, pp. 7-8. Trad. da autora).

Apesar de essas propostas representarem um grande avanço em relação ao ensino da Matemática tradicional, uma vez que propunham um estudo mais intuitivo, mais ligado ao concreto e baseado no desenvolvimento da criança, elas não chegaram a questionar os conteúdos propostos e as aplicações da Matemática a outras áreas do conhecimento.

O acréscimo desses novos elementos, especialmente para o segundo nível do ensino médio, seria defendido pelos proponentes das reformas do ensino da Matemática que começariam a surgir em diversos países ao final do século XIX e seriam intensificadas no início do nosso século.

As primeiras propostas de mudança

Desde as últimas décadas do século XIX, começou a se manifestar em diferentes países uma preocupação em modernizar o ensino de Matemática desenvolvido nas escolas secundárias, especialmente por meio da introdução de novos conteúdos. Essa preocupação se originou pela percepção de que a Matemática ministrada nesse nível de ensino estava em descompasso com as exigências impostas pelo novo contexto sócio-político-econômico, com o desenvolvimento da Matemática e das ciências ocorrido nos últimos séculos e com a estudada nas universidades.

As universidades que preparavam professores de Matemática ofereciam um ensino restrito às matemáticas superiores. Pouca ou nenhuma atenção era dada à formação específica para o ensino da disciplina.

Com a implantação dos sistemas escolares nacionais, e a conseqüente necessidade de ampliação do quadro de professores e de uma melhor qualificação profissional, esse panorama começou a ser alterado. Universidades de diferentes países, que, a partir desse momento, passaram a ter a responsabilidade formal em fornecer professores de Matemática para os cursos secundários, começaram a propor alterações para sua formação. Em princípio, no entanto, essas mudanças ficariam restritas à introdução de conferências que tratavam de temas relacionados à pedagogia geral. Apenas ao final do século seriam introduzidos, nas universidades alemãs, cursos mais direcionados para a prática do ensino de Matemática[6].

Essas primeiras iniciativas não chegaram a melhorar de maneira significativa a formação do professor de Matemática, pois não se eliminou o descompasso existente entre essa formação e o ensino ministrado nas escolas secundárias.

A causa do descompasso residia, especialmente, na diferença entre a Matemática ensinada pelas universidades e aquela ensinada nas escolas secundárias. Enquanto a Universidade ensinava os últimos progressos da Matemática, ou seja, a Matemática superior, as escolas secundárias continuavam a ensinar a geometria grega, a álgebra elementar e o cálculo aritmético.

Essa situação acabou levando a uma "dupla descontinuidade".

Por um lado, a Matemática ensinada pela escola secundária pouco contribuía para o trabalho desenvolvido nas universidades, uma vez que "o jovem estudante encontrava-se ao começar seus estudos [universitários] ante problemas que não lhe recordavam nada das coisas que até então o tinham ocupado, e, portanto, esquecia imediata e completamente todas elas" (Klein, 1927, v. 1, p. 1. Trad. da autora).

Por outro, ao completar seus estudos universitários, o professor recém-formado não conseguia estabelecer nenhuma relação entre a Matemática estudada na Universidade e aquela que era exigida na escola secundária. Com isso, acabou-se aceitando que do "ensino tradicional e dos estudos realizados [na Universidade] restaria apenas uma recordação mais ou menos agradável, mas que não exerceria nem a mais remota influência em seu desempenho no magistério" (Klein, 1927, v. 1, p. 1. Trad. da autora).

[6] Felix Klein (1849-1925) foi um dos pioneiros na introdução de cursos de metodologia específica de Matemática nas universidades. Foi também o orientador do primeiro doutorado em Educação Matemática, defendido em Göttingen em 1911 por Rudolf Schimmack. Cf. Kilpatrick, 1992, p. 18.

Desde os finais do século XIX, começaram a surgir em diferentes países movimentos de renovação do ensino da Matemática das escolas secundárias, algumas vezes dentro de propostas mais amplas de mudança dos vários níveis educacionais, exigidas, especialmente, pelo crescimento da indústria, pelos avanços científicos e tecnológicos e pela ampliação da oferta de ensino, outras vezes, como propostas específicas para o ensino de Matemática.

Na França, a reforma seria iniciada em 1900, com um debate ocorrido na Câmara dos Deputados. Nesse debate, após a apresentação de "opiniões de destacados homens de ciência e professores", foi formada uma comissão que, assessorada por um grande número de corporações oficiais, apresentou uma proposta de reforma para todo o ensino médio, que seria incluída nos planos de estudos oficiais de 1902 e aplicada imediatamente pelas escolas.

Na parte relativa ao ensino de Matemática, os aspectos "modernos" da proposta estavam representados pelos seguintes pontos:

- preocupação em tornar o ensino mais simples e intuitivo;
- introdução de novos temas, que pertenciam tradicionalmente ao ensino superior;
- sugestão do estabelecimento de uma articulação, ou "fusão", entre os temas geométricos e os aritméticos.

As justificativas apresentadas para a introdução dos novos temas — o conceito de função, a representação gráfica e as noções do cálculo infinitesimal — baseavam-se na importância deles para as ciências naturais e para a técnica, e pelo fato de serem considerados acessíveis para esse grau de ensino.

A fusão dos temas geométricos com os aritméticos foi uma necessidade imposta, por um lado, pela introdução dos novos temas e, por outro, pelo próprio desenvolvimento da Matemática contemporânea.

A proposta de um ensino "mais simples e intuitivo" estava, por outro lado, ligada às exigências da nova pedagogia, especialmente na necessidade de adequar o ensino ao nível de desenvolvimento do aluno.

Na Inglaterra, tradicionalmente mais conservadora que a França, as propostas de mudança do ensino de Matemática tiveram penetração difícil e lenta.

A mais forte reação contra o sistema do ensino secundário inglês foi iniciada por John Perry (1850-1920), um engenheiro e professor de Física.

Durante o período em que foi professor da escola técnica *Clifton College,* entre 1870 e 1873, onde começou a introduzir os métodos experimentais em suas aulas de Física, Perry já perceberia a falta que os conhecimentos da moderna Matemática, especialmente aqueles relativos ao estudo das relações entre quantidades, estava causando para o desenvolvimento das ciências e para a formação dos futuros engenheiros.

Essa preocupação se reforçou durante a sua estada no Japão, onde o ensino técnico experimental encontrava-se em um estágio bastante desenvolvido.

Logo após o seu retorno à Inglaterra e o início de suas atividades no *Finsbury Technical College*, em 1882, apresentou sua primeira proposta de um programa de Matemática prática para engenheiros.

Nesse programa, foram contemplados: o estudo das fórmulas algébricas; o estudo de funções e gráficos, como introdução às idéias do cálculo; os métodos práticos no estudo das medidas e da geometria; a trigonometria numérica; trabalhos com a geometria em três dimensões e vetores. Esses estudos se desenvolveram em aulas teóricas e trabalhos em laboratório.

Perry, entretanto, não se limitou a propor alterações para as escolas de engenharia. Acreditava que os elementos da moderna Matemática deveriam ser ensinados em todos os níveis e tipos de escola e mostrava-se otimista com relação à implantação de sua proposta. Na reunião da *British Association*, ocorrida em Belfast no ano de 1902, ele afirmou:

> Parece provável que daqui a cinco anos nenhum garoto de quinze anos será compelido a empreender-se em qualquer raciocínio abstrato sobre coisas que ele não conhece; será versado em matemática experimental, que ele pode ou não chamar de mensuração; usará logaritmos, e simples multiplicações e divisões que serão um prazer para ele; terá uma capacidade de trabalhar com álgebra e senos e cossenos; será hábil para resolver imediatamente qualquer novo problema interessante que pode ser resolvido com papel quadriculado; e não terá receio dos símbolos do cálculo infinitesimal... Em cinco anos isso será chamado "matemática elementar". Quatro anos atrás era uma não ortodoxa matéria chamada "matemática prática"...
>
> (Apud Brock e Price, 1980, p. 377. Trad. da autora.)

Os aspectos básicos da proposta de Perry podem ser resumidos nos seguintes pontos:

- utilização da intuição como um procedimento didático;
- presença da experimentação no ensino de Matemática;
- introdução de conteúdos da moderna Matemática;
- importância atribuída às aplicações práticas.

Para Perry, as aplicações práticas teriam "maior valor educativo que as questões puramente teóricas, que, segundo ele, não despertavam interesse nem formavam o sentido do real" (Toranzos, 1963, p. 30. Trad. da autora).

As posições de Perry, por serem consideradas extremamente radicais, sofreram forte oposição inicial. Essa reação pode ser facilmente entendida quando lemos algumas de suas afirmações — presentes em seu *Report of the British Association at Glasgow*, de 1901 — e contrapomos com a tradição dos estudos teóricos, ainda forte naquele momento:

> O estudo começa porque é útil e continua porque é útil, e é estimado pelo mundo devido à utilidade de seus resultados...
>
> [...]
>
> Eu creio que o homem que ensina geometria demonstrativa e matemática ortodoxa, geralmente não apenas está destruindo a capacidade de pensar que todavia existe, senão está produzindo antipatia e ódio por todos os estudos de medição e portanto por todos os estudos científicos da natureza, e está causando incalculável dano.
>
> (Apud Toranzos, 1963, pp. 30-1. Trad. da autora.)

Apesar das resistências, ou exatamente devido a elas, a campanha de Perry para a renovação do ensino de Matemática causou uma forte reação na Inglaterra, ficando conhecida como o "movimento de Perry".

Apesar de sua proposta não ter sido aplicada da forma como ele imaginara, foi por meio dela, e de outras que seriam desenvolvidas por seus seguidores, que as correntes modernizadoras do ensino de Matemática entraram na Inglaterra, tendo influência decisiva especialmente nas escolas secundárias. Em 1904, por exemplo, graças a essas idéias "seriam incorporados aos programas ingleses muitos pontos da matemática moderna; dentre eles, o uso de coordenadas e representação gráfica, assim como numerosas questões de utilidade prática, e igualmente o uso da intuição e do laboratório" (Toranzos, 1963, p. 31. Trad. da autora).

O "movimento de Perry", entretanto, não influenciou apenas as discussões sobre as mudanças do ensino de Matemática ocorridas na Inglaterra. Ele esteve presente na Europa, onde foi chamado de "Perryísmo" e, também, nos Estados Unidos, onde ficaria conhecido como "Método de Laboratório".

Em um discurso pronunciado durante o congresso anual da *American Mathematical Society*, realizado em 1902, E. H. Moore, matemático da Universidade de Chicago, que presidia o congresso naquele ano, chamou a atenção para a necessidade de reformar os planos e métodos do ensino de Matemática, colocando claramente a sua posição com relação às idéias de Perry:

> Como matemático puro, sustento que uma das sugestões mais importantes de Perry é que, dando um maior desenvolvimento ao aspecto prático da matemática, isto é, aos conceitos

> aritméticos, ao desenho linear e aos métodos gráficos em geral, em contínua relação com os problemas da Física, da Química e da engenharia, será possível dar aos estudantes uma grande parte das noções essenciais da Trigonometria, da Geometria Analítica e do Cálculo.
>
> (Toranzos, 1963, p. 33. Trad. da autora.)

As disputas existentes naquele período entre os matemáticos puros e os aplicados sobre a preparação mais adequada aos estudos avançados aparecem claramente nessas palavras de Moore, que, "apesar de ser um matemático puro", concordava em alguns aspectos com a proposta do "aplicado" Perry. Esse era um sintoma claro da rivalidade ainda persistente entre as "artes práticas" e as "artes cultas".

As propostas de Moore, que no fundamental coincidiam com as de Perry, exerceriam grande influência na educação média americana.

A necessidade de maior articulação entre os vários tópicos matemáticos tratados na escola, especialmente na escola secundária, já era também percebida naquele momento nos Estados Unidos. Em um discurso proferido no mesmo ano, perante a Associação Nacional de Educação, Charles W. Newhal expressava "a esperança de que chegaria o tempo em que o curso da escola secundária compreenderia seis anos *e que a matemática não estaria limitada a fronteiras artificiais*, como acontecia no estudo da álgebra, da geometria e da trigonometria" (Butler et al., 1970, p. 14. Trad. e grifo da autora).

Na Itália, que possuía uma longa tradição de rigor no ensino médio, as propostas modernizadoras da Educação Matemática encontraram forte resistência para serem introduzidas.

Desde 1895, entretanto, os professores de Matemática começaram a reagir "criando a associação *Mathesis*, com o nobre propósito de defender, junto ao público, a importância do ensino das matemáticas". Cinco anos depois, em 1900, "depois de repetidos votos expressos em congressos da *Mathesis*", os programas começariam a ser modificados, através da inclusão, por exemplo, dos cursos de aritmética prática e de geometria intuitiva, na escola primária elementar (Castelnuovo, 1975, p. 33. Trad. da autora).

As modificações nas escolas de nível médio, no entanto, demorariam ainda bastante para acontecer. Imperaria durante muito tempo ainda o espírito "anticientífico" e "antimatemático". Apenas "os acontecimentos do mundo exterior — as grandes aplicações técnicas e industriais, e as controvérsias sociais — conseguiriam fazer chegar aos italianos o convencimento de que não apenas com matérias literárias se pode ter um caráter humanístico e altamente espiritual" (Castelnuovo, 1975, p. 34. Trad. da autora).

Na Alemanha, o movimento de renovação do ensino de Matemática surgiria, em 1890, associado a um movimento mais amplo de aperfeiçoamento do ensino de nível médio em geral, que culminou com a realização, em 1904, de "uma reunião conjunta de matemáticos e professores de ciências físicas e naturais", cujo objetivo principal era a tentativa de conciliação dos "múltiplos interesses, até então considerados antagônicos, dessas diversas disciplinas" (Roxo, 1937, p. 48).

Dessa reunião, que havia sido proposta por Christian Felix Klein (1849-1925), surgiu a "*comissão breslauense*, que, após um trabalho intensivo", apresentou, em 1905, no Congresso dos Naturalistas, realizado em Meran, os denominados *planos meranenses*, que continham propostas de planos de ensino para os diferentes tipos de escolas de grau médio (Roxo, 1937, p. 49).

Nesses planos, na parte relativa ao ensino de Matemática, foram acatadas as sugestões apresentadas por Felix Klein.

Felix Klein

Felix Klein foi um dos mais importantes matemáticos do final do século XIX e um dos últimos — junto com Gauss, Riemann e Poincaré — a conseguir quebrar a barreira da especialização e fornecer os elementos fundamentais que impulsionariam a Matemática do século XIX e inícios do século XX.

O seu famoso Programa de Erlangen, de 1872, em que apresentou toda "a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações", serviu como fonte de inspiração não apenas para os seus futuros trabalhos, mas também para futuras pesquisas de muitos outros matemáticos. A influência desse estudo "pode ainda hoje ser percebida em qualquer tratado geral de geometria moderno" (Boyer, 1974, p. 401).

Felix Klein, que ficou "profundamente impressionado com as possibilidades unificadoras do conceito de grupo", tinha como meta a "unificação dos aspectos discreto e contínuo da matemática", segundo essa noção. Por essa razão, passou "boa parte do resto de sua vida desenvolvendo, aplicando e popularizando" o conceito de grupo (Boyer, 1974, p. 400 e 404).

Apesar desse seu particular interesse pela teoria dos grupos, ou devido a isso, Klein não deixou de se interessar por todos os desenvolvimentos de seu tempo, tanto aqueles referentes ao campo da Matemática pura quanto aos da Matemática aplicada. Isso levou "Klein e os seus colegas alemães a uma grande empresa, a *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*". Essa publicação, que circulou entre 1898 e 1935, consistiu em uma compilação de monografias cuja aspiração, "no espírito de Klein", encontrava-se no estabelecimento de inter-relações entre os diferentes campos da Matemática. Essa preocupação seria de certo modo conseguida e permearia toda a publicação, "desde a secção I, *Arithmetik und Algebra*, até a secção VI, 2, *Astronomie*" (Struik, 1989, p. 302).

As preocupações com o desenvolvimento e divulgação da Matemática de seu tempo, e a consciência "da crescente importância das matemáticas na indústria", fizeram com que Klein fosse um dos primeiros matemáticos a obter apoio de setores privados, quer para a organização, quer para a realização de pesquisas em Matemática aplicada. Um dos resultados desses esforços foi a criação do Instituto de Investigação Aerodinâmica e Hidrodinâmica, em Göttingen, em 1908 (Struik, 1989, p. 300).

Quando, em 1886, assumiu o cargo de professor, a Universidade de Göttingen tornara-se "um centro universal de investigação matemática, onde jovens, rapazes e raparigas, de muitos países se reuniam para estudar os assuntos do seu interesse como uma parte integrante de todas as matemáticas" (Struik, 1989, p. 286). O fato se deveu, especialmente, à importância que Klein dispensava ao ensino. Suas aulas eram consideradas estimulantes. Prova disso é que as notas de suas aulas "circularam de uma forma mimeografada e proporcionaram a gerações inteiras de matemáticos uma informação especializada e, acima de tudo, uma compreensão da unidade de sua ciência" (Struik, 1989, p. 286).

O seu interesse pelo ensino, entretanto, não ficou restrito às suas aulas. Também não ocorreu ao final de sua carreira, como afirmam alguns autores. Apesar de ser verdade que a Educação Matemática foi um dos interesses centrais de Klein ao final da vida, especialmente a partir de 1892, é também inegável que ele se interessara pelo assunto desde a sua juventude. A omissão dessas preocupações iniciais de Klein com relação ao ensino de Matemática deve-se, segundo Rowe, a um equívoco apresentado pelos historiadores em relação ao seu Programa de Erlangen.

Muitos historiadores afirmam que em sua aula inaugural, em 1872, ao assumir o cargo de professor titular — *ordinariat* — na Universidade de Erlangen, Klein teria apresentado o famoso *Programa de Erlangen*, no qual unificava muitas das geometrias conhecidas até aquele momento por meio de um especial grupo de transformações.

Essas afirmações, entretanto, "identificam incorretamente o conteúdo da conferência de Klein, seu *Erlangen Antrittsrede*, de 7 de dezembro de 1872, com o conteúdo de seu mais famoso *Eintrittsprogramm, 'Vergleichende Betrachtungen ueber neuere geometrische Forschungen'*" (Uma revisão comparativa das recentes pesquisas em geometria) (Rowe, 1983, p. 448-9. Trad. da autora).

Na realidade, tanto a apresentação de uma conferência como a de um trabalho escrito faziam parte das exigências para contratação na Universidade de Erlangen, como podemos confirmar pelas próprias palavras de Klein:

> Em Erlangen o mais novo professor nomeado, em adição à conferência por meio da qual ele é introduzido, por si próprio, no

círculo de seus futuros colegas, tradicionalmente entregava também um programa publicado.

(Apud Rowe, 1983, p. 449. Trad. da autora.)

Dessa forma, o que é atualmente conhecido como o *Programa de Erlangen* refere-se apenas à parte escrita apresentada por Klein. A conferência pública, no entanto, foi "reservada a assuntos mais acessíveis a uma audiência universitária mais geral" (Rowe, 1983, p. 449. Trad. da autora). O tema escolhido por Klein para essa conferência dizia respeito à Educação Matemática.

O próprio Klein, em sua autobiografia de 1923, assim recordava-se da conferência ocorrida 50 anos antes:

Em minha fala inaugural em dezembro, eu apresentei um detalhado programa para meus planos de ensino, em que declarava que a unidade de todo o conhecimento e o ideal de uma educação completa não poderia ser negligenciada por causa dos estudos especializados. E, em conseqüência disso, que a educação humanística e a matemático-científica [...] não deveriam ser colocadas uma em oposição à outra. Por outro lado, que era necessário cultivar a matemática aplicada da mesma forma que a pura, a fim de preservar a conexão entre disciplinas próximas, como a física e a tecnologia. Além disso, juntamente com a capacidade lógica, igual importância deve ser dada à necessidade de desenvolver a intuição e, mais geralmente, a imaginação matemática [...] Finalmente, as universidades devem se preocupar com o ensino preparatório nas escolas, e assim dar particular ênfase na educação dos professores. As organizações das escolas técnicas de ensino médio devem ser examinadas, e em muitos aspectos tomadas como modelo.

(Klein, 1923, p. 18, apud Rowe, 1983, p. 451. Trad. da autora.)

Entretanto, essas memórias de Klein, já influenciadas pelas mudanças que suas idéias passariam ao longo de 50 anos, refletem apenas em parte o real conteúdo da conferência que havia proferido aos 23 anos.

Naquela conferência, após um breve comentário inicial acerca da separação existente entre a educação humanística e a científica, em que estariam as raízes da pequena divulgação dos estudos matemáticos, Klein apresentou a sua posição sobre o ensino de Matemática, especialmente no nível universitário.

Em relação aos objetivos da Educação Matemática, acreditava que, em primeiro lugar, deveria ser considerado o desenvolvimento da própria Matemática, ou seja, estudar Matemática por ela mesma. A razão disso estaria na satisfação que esse estudo poderia propiciar aos alunos, apesar de poucos chegarem a obter o prazer máximo proporcionado por uma produção independente. Para ele, isso ocorreria, também, em outras áreas que exigiam determinadas habilidades específicas, como, por exemplo, a música.

Além desse objetivo, dois outros também seriam contemplados: a importância da Matemática para o desenvolvimento de outras ciências e, especialmente, o valor formal propiciado pelos estudos matemáticos.

A maneira como a Matemática poderia auxiliar no desenvolvimento de outras ciências, no entanto, deveria ser entendida não no sentido usual, como meras aplicações práticas, mas, ao contrário, como uma ferramenta teórica fundamental para a obtenção de resultados gerais. Para exemplificar sua maneira de entender as aplicações, apresentou alguns desenvolvimentos ocorridos no campo da física matemática — a teoria molecular, a teoria da luz e a geometria óptica. Também observou que a forma como se obtinham os fundamentos de uma determinada teoria — se pela observação da natureza ou por hipóteses estabelecidas *a priori* — não era relevante, uma vez que o mais importante era "o treinamento da mente ganho pelo trabalho com a matemática pura" (apud Rowe, 1985, p. 138. Trad. da autora).

Dessa forma, a Matemática seria uma ferramenta teórica indispensável a todo cientista, especialmente no momento em que as ciências estariam buscando raciocínios gerais para justificar seus resultados.

Seguindo essa linha de argumentação, Klein propunha que a Matemática estivesse presente na formação universitária de todos os estudantes de ciências naturais e medicina, independentemente do assunto escolhido, pois o mais importante eram os raciocínios desenvolvidos...

Com relação ao ensino de Matemática desenvolvido nas escolas secundárias, acreditava que ela deveria ser ensinada com "maior zelo". Não sugeria, entretanto, nem um aumento das horas destinadas ao seu desenvolvimento, nem uma mudança de seus conteúdos, mas, apenas, que fosse ensinada de uma maneira mais viva, com mais significado.

Para que isso pudesse ocorrer, acreditava que as universidades deveriam aumentar o padrão dos estudos matemáticos oferecidos aos futuros professores, de forma a possibilitar-lhes não apenas o contato com os assuntos sobre os quais iriam ensinar, mas também com os últimos desenvolvimentos da Matemática, os quais deveriam ser complementados com a produção de um trabalho independente. Ou seja, Klein acreditava que estudos mais avançados de Matemática nas universidades acarretariam uma mudança de qualidade no ensino de Matemática nas escolas secundárias.

Apesar de encontrarmos nessas posições iniciais de Klein uma clara preocupação em modificar o ensino de Matemática, em muitos aspectos elas estavam ainda bastante distantes de suas propostas futuras.

O período em que Klein trabalhou no *Technische Hochschule* de Munique, de 1875 a 1880, onde participou do trabalho de um grupo de matemáticos interessados no estudo das relações entre ciência e tecnologia, levou-o a rever muitas de suas idéias.

Essa experiência, de fato, contribuiu para que as futuras propostas de Klein apresentassem fortes influências do tipo de ensino realizado nas escolas técnicas, em particular, da tradição de ensino da *École Polytechnique* e da *Eidgenössische Polytechnikum* de Zurique.

Nos primeiros anos de nosso século, Klein propôs uma renovação do ensino de Matemática baseada em mudanças tanto na escola secundária como nos estudos universitários.

Por um lado, defendia a atualização da Matemática na escola secundária, de maneira a ficar mais próxima do desenvolvimento moderno dessa área e, também, dos últimos avanços científicos e tecnológicos. De outro, acreditava que a Universidade deveria modificar a sua proposta de ensino, levando em consideração as necessidades do futuro professor.

Para que a Universidade pudesse atingir esse objetivo, Klein sugeria que fossem criados cursos que contemplassem os seguintes aspectos:

- as relações existentes entre as diferentes áreas da Matemática e entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento;
- a relação entre os conteúdos estudados e o seu ensino das escolas.

Um dos aspectos necessários para a atualização do ensino de Matemática nas escolas secundárias foi a consideração dos "motivos psicológicos". Sobre esse aspecto, Klein declarou:

> O professor deve ser, por assim dizer, algo *diplomático;* tem de conhecer a psicologia das crianças para poder captar o seu interesse, e isso só poderá conseguir se aceitar apresentar as coisas de uma forma intuitiva facilmente assimilável. Dentro da escola, apenas nas classes superiores se pode revestir a doutrina de forma abstrata [...] Mas isso [...] deveria também estender-se a todo ensino, mesmo o superior; a matemática sempre deveria ser apresentada relacionada com tudo aquilo que pudesse interessar ao homem e com o que utilizará em sua vida.
>
> (Klein, 1927, v. 1, p. 5, grifo do autor. Trad. da autora.)

A escola secundária deveria considerar os últimos resultados da psicologia no desenvolvimento de suas aulas de Matemática, levando em consideração o interesse do aluno, a aplicação dos conceitos e a graduação do ensino, o qual deveria partir do intuitivo para o abstrato. Além disso, Klein entendia que, também, eram necessárias mudanças conceituais.

A mais importante dessas mudanças seria a introdução do "conceito de função como centro do ensino". A justificativa estaria no fato de a função representar "o conceito dos últimos dois séculos que desempenha um papel fundamental em todos os campos que se utilizam das noções matemáticas" e, também, porque, dessa forma, "o aluno começaria a familiarizar-se, tão rapidamente quanto possível, sempre com o *constante emprego dos métodos gráficos,* com a representação de qualquer lei no plano de variáveis (x, y), que hoje é utilizada em todas as aplicações da matemática pelo caráter de evidência que apresenta" (Klein, 1927, v. 1, p. 5, grifo do autor. Trad. da autora).

Além disso, Klein acreditava que "para facilitar a renovação seria necessário prescindir de muito do que até hoje tem se constituído objeto de nosso ensino, que, embora possa, por si só, ser muito interessante, parece menos essencial no relacionamento com toda a cultura moderna" (Klein, 1927, v. 1, pp. 5-6. Trad. da autora).

Propôs, também, a introdução do cálculo infinitesimal, de modo a garantir "tanto ao naturalista como ao técnico de seguros o instrumento de que irá necessitar em seu trabalho" (Klein, 1927, v. 1, p. 6. Trad. da autora).

Essa observação a respeito da importância do estudo de cálculo infinitesimal para "os naturalistas e técnicos de seguros" mostra-nos claramente a sua preocupação com uma formação básica para todas as profissões. Para ele, tanto as escolas técnicas como as secundárias deveriam dar uma formação básica de Matemática a seus alunos e, também, ser consideradas igualmente como exigência para as universidades.

Um outro aspecto fundamental nessa proposta, que representa uma mudança em relação à conferência de 1872, é a ênfase dada às aplicações práticas da Matemática, inclusive no sentido usual, e a minimização do valor atribuído ao desenvolvimento de uma faculdade mental — o raciocínio.

Essa mudança pode ser percebida na seguinte passagem de seu livro *Matemática elemental desde un punto de vista superior,* no qual, após afirmar "que na escola, desde o princípio, as aplicações devem acompanhar o ensino do cálculo (na aritmética); de modo que o discípulo não apenas compreenda as regras, mas aprenda a realizar algo com elas", apresenta a maneira como entende a relação entre a Matemática pura e a aplicada:

> As relações puramente lógicas devem ficar, por assim dizer, como o esqueleto do organismo da matemática, que dá a esta solidez e certeza.
>
> Mas o vivo da matemática, seus mais importantes estímulos, sua eficácia externa, assentam-se sempre em suas aplicações, isto é, nas correlações daqueles entes puramente lógicos com todos os demais domínios do saber.
>
> Pretender retirar da matemática as aplicações equivaleria a querer centralizar a vida de um animal em sua ossada unicamente, sem prestar atenção aos seus músculos, nervos e vísceras.
>
> (Klein, 1927, v. 1, p. 21. Trad. da autora.)

A proposta de Klein representaria o rompimento definitivo entre uma formação geral e uma prática, entre a tradição culta e a artesanal, entre o desenvolvimento do raciocínio em oposição ao desenvolvimento das atividades práticas, no ensino de Matemática.

Seria o início de uma nova concepção de formação Matemática para todos: os futuros técnicos, os futuros profissionais liberais...

Entretanto, essa proposta não foi integralmente adotada. Em todos os países continuou a existir, ainda por muito tempo, a antiga separação entre uma formação clássica e uma técnica, aquela destinada aos que continuariam seus estudos, esta para os que deveriam apenas trabalhar.

Apesar disso, foi devido especialmente aos esforços empreendidos por Klein, na discussão e divulgação dessas idéias, que mudanças viriam a ocorrer cedo ou tarde em diversos países.

O Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática

O rápido desenvolvimento ocorrido na Matemática durante o século XIX transformou-a, por volta de 1870, numa "estrutura enorme e complexa, dividida num grande número de campos, só conhecidos dos especialistas" (Struik, 1989, p. 282). Esse florescimento acabou dando origem, como ocorreu também em outras áreas, à publicação de periódicos específicos, à organização de sociedades especializadas nacionais e ao surgimento dos encontros internacionais.

O estabelecimento de contato mais intenso com matemáticos-professores de outros países — propiciado especialmente por meio dos Congressos Internacionais de Matemática, o primeiro deles ocorrido em 1897, em Zurique — tornou públicos os problemas relacionados ao ensino da Matemática, enfrentados por diferentes países, e as formas encontradas para solucioná-los.

Até aquele momento, as questões relativas à Educação Matemática eram resolvidas em cada país de forma independente. A influência das experiências ocorridas em outras nações era bastante restrita, como podemos atestar pelas seguintes palavras de Felix Klein:

> Existe um aspecto comum à maior parte das pessoas que escrevem sobre questões de ensino: elas conhecem apenas a literatura escolar de seu próprio país, e *desconhecem não apenas as tendências que podemos chamar paralelas existentes em outros países* como também os progressos da ciência pura referente à disciplina particular que se estuda aqui, os fundamentos da geometria.
>
> (Klein, 1931, v. 2, p. 289. Trad. e grifo da autora.)

Os Congressos Internacionais de Matemática — ao possibilitarem o acesso a matemáticos de diferentes países aos últimos estudos desenvolvidos pela área e ampliarem as oportunidades de reflexão conjunta sobre estes e futuros estudos — estavam, juntamente com as revistas especializadas e as associações nacionais, respondendo à última preocupação apresentada por Klein. Além disso, foi nesses Congressos que as preocupações com o ensino da Matemática — que acabariam culminando com o nascimento de um movimento internacional para a sua modernização — começaram a se manifestar.

As sessões dos primeiros Congressos Internacionais reservadas às discussões sobre Educação Matemática não satisfizeram, porém, as pessoas mais preocupadas com o tema. Entre elas, estava David Eugene Smith, que era professor de Educação Matemática no *Teachers College* da Columbia University e estava muito interessado em discutir questões relacionadas ao ensino de Matemática.

Em seu artigo *Réformes à accomplir dans l'enseignement des mathématiques,* de 1905, publicado na revista *L'Enseignement Mathématique,* Smith "lamentava que nas sessões sobre Educação Matemática do Terceiro Congresso Internacional de Matemática, celebrado no ano anterior em Heidelberg, os participantes empregaram seu tempo debatendo minúcias matemáticas em vez de examinar os problemas gerais da Educação Matemática" (Kilpatrick, 1992, p. 60. Trad. da autora).

Essa insatisfação, que estava diretamente relacionada à percepção da importância de se repensar o ensino de Matemática, levou Smith a sugerir, nesse mesmo artigo, a criação de uma Comissão Internacional para estudar questões relativas à Educação Matemática. Para ele, um levantamento sobre as propostas pedagógicas existentes nos diferentes países podia fornecer elementos comparativos fundamentais para a organização dos currículos. Apesar disso, Smith não pretendia que esse levantamento fornecesse elementos para uma proposta de reforma (Kilpatrick, 1992, p. 22. Trad. da autora).

Uma proposta formal para a criação dessa Comissão foi apresentada durante o Quarto Congresso Internacional de Matemática, realizado em abril de 1908 em Roma. Após a sua aprovação, estabeleceu-se a *Commission Internationale de L'Enseignement Mathématique* — CIEM. Essa Comissão, denominada pelos alemães IMUK, iniciais de *Internationalen Mathematische Unterrichts Kommission*, a partir de 1954 passou a ser conhecida como ICMI — *International Comission on Mathematical Instruction*.

Apesar de não estar presente ao Congresso, Felix Klein foi nomeado presidente da Comissão — posto que ocuparia até falecer, em 1925. O vice-presidente da Comissão foi G. Greenhill, da Universidade de Londres, e o secretário-geral, Henri Fehr, da Universidade de Genebra. "A revista *L' Enseignement mathématique,* fundada em 1899 por Fehr e Charles Laisant [da Escola Politécnica de Paris], passou a ser a revista oficial da Comissão" (Kilpatrick, 1992, p. 22. Trad. da autora).

O Congresso de Roma recomendou que a Comissão procurasse obter informações a respeito da situação em que se encontrava o ensino de Matemática nas escolas secundárias dos vários países. Para isso, solicitou-se, às nações participantes dos Congressos Internacionais de Matemática (ICM), a nomeação de um delegado que se incumbiria de organizar uma subcomissão nacional com o propósito de apresentar informações a respeito da situação em que se encontrava o ensino secundário de Matemática em seu país.

Essa recomendação, entretanto, foi ampliada durante a primeira reunião da Comissão, realizada em setembro de 1908, em Colônia. A Comissão considerou ser impossível estudar apenas as escolas secundárias e decidiu examinar a situação em que se encontrava o ensino de Matemática em todos os níveis e tipos de escolas. Nessa reunião estavam presentes pequenas delegações de vários países. A delegação dos Estados Unidos, por exemplo, era composta de apenas três delegados, D. Smith, W. Osgood e J. W. Young. Dezenove países foram considerados participantes e catorze, países associados[7].

Outras cinco reuniões internacionais da Comissão se realizaram antes do Quinto Congresso Internacional de Matemática: em Karlsruhe, Basle, Bruxelas (1910), Milão (1911) e nas montanhas de Harz.

Algumas das questões que estiveram na pauta das discussões foram levantadas por D. Smith em seu discurso durante o Congresso de Roma:

> Quais têm sido os resultados dos esforços para remover as barreiras entre tópicos tais como álgebra e geometria, ou para ensinar os dois simultaneamente (isto é, numa mesma série), e estamos preparados para fazer alguma recomendação nesse sentido? [...]
>
> Qual seria um conteúdo mínimo e seguro para a geometria euclidiana, o cálculo e a mecânica?
>
> Que posição deve assumir a escola secundária com relação à natureza das aplicações e às relações entre a matemática pura e a aplicada?

---

[7] Os países participantes eram: Áustria, Bélgica, Dinamarca, França, Alemanha, Grécia, Holanda, Hungria, Itália, Japão, Noruega, Portugal, Romênia, Rússia, Espanha, Suíça, Reino Unido, Estados Unidos e Suécia. Os países considerados associados eram: Argentina, Austrália, Brasil, Bulgária, Canadá, África do Sul (Cape Colony), Chile, Egito, Índia, México, Peru, Sérvia, Turquia. Cf. Howson, 1984, p. 76. A distinção entre os dois grupos se deveu ao critério estabelecido, ainda no ICM de Roma, para participação nas atividades do IMUK. Os países que houvessem enviado ao menos dois matemáticos a pelo menos dois ICMs seriam representados por um membro votante. Se o número de participantes fosse dez ou mais, o número de membros votantes seria dois ou três. Dessa forma se definiriam os "países participantes". Entretanto, pelo fato de esse critério não ter contemplado todos os países considerados "relevantes", os organizadores decidiram convidar alguns países, chamados "países associados", que poderiam participar das atividades do IMUK, mas sem direito a voto. Cf. Schubring, 1987, pp. 6-7.

> Qual deve ser a natureza dos cursos na escola secundária para aqueles que não irão seguir os estudos universitários, e para aqueles que pretendem seguir?
>
> (Howson, 1984, pp. 76-7. Trad. da autora.)

Essas questões já nos apontam para algumas das preocupações que, naquele momento, alimentavam as discussões sobre a modernização do ensino de Matemática, especialmente no nível secundário. Vinculadas a elas, outras de caráter mais geral também foram levantadas.

> Que matemática deveria ser ensinada para os estudantes de física e de ciências naturais? Qual é o lugar do rigor no ensino de matemática? Como pode o ensino de diferentes ramos da matemática ser mais bem integrado?
>
> (Howson, 1984, p. 77. Trad. da autora.)

Apesar da riqueza dessas questões e de muitas outras que provavelmente foram levantadas durante as reuniões da Comissão, os esforços desse período se concentraram no já mencionado levantamento das práticas de ensino de Matemática existentes nos países participantes.

Essa iniciativa acabou produzindo uma efervescente atividade em vários países, a qual pode ser avaliada pela quantidade de informes nacionais apresentados ao Congresso de Cambridge (1912) e, também, pela quantidade de material apresentado por essas subcomissões. Apresentaram-se informes de 17 subcomissões nacionais, e "os informes mais extensos correspondiam a 11 volumes dos Estados Unidos, 6 volumes da Alemanha, 5 volumes da França e 2 grandes volumes do Reino Unido" (Kilpatrick, 1992, p. 23. Trad. da autora).

Durante o Congresso, além da apresentação dos informes nacionais, foi dada especial atenção a dois outros temas, sobre os quais já existiam interessantes estudos: "O ensino prático de matemática do físico" e "Intuição e experimentação no ensino de matemática na escola secundária" (Howson, 1984, p. 78. Trad. da autora). Além disso, a Comissão escolheu dois outros temas para serem discutidos durante uma reunião em Paris, em 1914, que incluiu, como oradores, Felix Klein e Emile Borel. Os temas eram: "A posição ocupada pelo cálculo na escola secundária" e "O lugar da matemática na educação técnica superior" (Howson, 1984, p. 78. Trad. da autora).

As informações apresentadas pelos vários países à Comissão Internacional deram origem a uma grande quantidade de trabalhos publicados pela revista oficial da Comissão — *L'Enseignement mathématique* —, por periódicos nacionais, anais de encontros internacionais, etc. Essas publicações — 294, até 1920 — não apenas apresentaram os resultados obtidos naquelas informações como também começaram a aprofundar questões mais amplas, subjacentes a esses resultados.

Dessa forma, é inegável que a iniciativa da Comissão em levantar o estado da Educação Matemática nos vários países representou "o começo dos esforços de matemáticos e educadores matemáticos não apenas para reformar as matemáticas escolares, mas também para recolher informações que pudessem ser utilizadas nessa reforma" (Kilpatrick, 1992, p. 23. Trad. da autora).

O rápido crescimento e a grande influência da Comissão nos assuntos relativos ao ensino de Matemática podem ser avaliados pela reunião de Paris, que contou com a presença de 160 participantes, representando 17 países. Entre esses participantes estavam renomados matemáticos, tais como Guido Castelnuovo — presidente da conferência —, Emile Borel, Gaston Darboux, Maurice d'Ocagne e Paul Stäckel.

O intenso trabalho desenvolvido pela Comissão Internacional para o Ensino de Matemática acabou provocando, como era provavelmente esperado, ao menos por parte de alguns de seus dirigentes, mudanças pedagógicas significativas. Em 1914, segundo Schubring (1987), nove dentre os vinte países que já haviam organizado sua subcomissão nacional, apresentavam experiências de reforma. Eram eles: Áustria, Bélgica, Dinamarca, França, Hungria, Alemanha, Suécia, Reino Unido e Estados Unidos.

Estamos, portanto, diante do Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática, que se originou com a constituição da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática.

A Primeira Guerra Mundial, de 1914 a 1918, interrompeu bruscamente o excepcional crescimento das atividades da Comissão, e, conseqüentemente, o movimento reformulador, que em apenas seis anos de existência identificou questões-chaves para o ensino de Matemática, recolheu uma quantidade de informações nunca antes, e nem depois, reunidas, propiciou o surgimento de uma enorme quantidade de publicações sobre Educação Matemática e levou as discussões acerca desse tema aos mais variados países. A reunião de Paris foi a última dessa série de realizações dos primeiros tempos da Comissão. O Sexto Congresso Internacional de Matemática, programado para ser realizado em Estocolmo, em 1918, foi cancelado.

Durante a realização do primeiro congresso posterior à Primeira Guerra (Estrasburgo, 1920), que excluiu os países derrotados, pouca atenção se deu às questões educacionais. O mesmo aconteceu no congresso seguinte, realizado em Toronto, em 1924.

Porém, durante a realização do Congresso de Bolonha, em 1928, a discriminação contra os países derrotados foi abandonada, sendo formalmente reconstituída a Comissão Internacional para o Ensino de Matemática.

Nesse Congresso, em que estiveram presentes 836 delegados de diversos países, sendo 52 dos Estados Unidos e 37 da União Soviética, foram escolhidos como dirigentes pessoas que tiveram uma participação ativa na Comissão no período anterior à guerra. Assim, D. Smith assumiria o cargo de presidente, G. Castelnuovo e J. Hadamard, a vice-presidência, e H. Fehr continuaria no cargo de secretário-geral.

Apesar da interrupção das atividades da Comissão causada pela Primeira Guerra, as atividades relacionadas ao ensino de Matemática não desapareceram totalmente nesse período. Algumas publicações relacionadas aos resultados apresentados no Congresso de Cambridge continuaram a ser produzidas, especialmente na Alemanha e nos Estados Unidos, enquanto H. Fehr tentaria, de Genebra, conservar as subcomissões nacionais ativas e em contato. Ou seja, os resultados daqueles anos efervescentes seguiram fornecendo subsídios e influenciando as propostas de mudanças.

Nos Estados Unidos, por exemplo, os relatórios da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática, publicados pelo *Bureau* de Educação, entre os anos de 1911 e 1918, exerceram forte influência sobre as propostas de mudança no currículo de Matemática do curso secundário. Após um estudo detalhado os comitês nacionais da Comissão Internacional concluíram que seria necessário:

> [...] um preparo melhor dos professores e diminuir, senão eliminar, o desperdício de esforços no tratamento independente e sempre inadequado de questões fundamentais por escolas, universidades ou sistemas locais.
>
> (Butler et al., 1970, p. 10. Trad. da autora.)

A percepção da existência de uma Educação Matemática das escolas secundárias desvinculada da educação das universidades, que causava, além do desperdício de esforços, uma descontinuidade entre os dois níveis de ensino, levou o comitê a sugerir as seguintes modificações para o secundário:

- a introdução do cálculo;
- uma organização da matéria que caminhasse em direção à fusão dos conteúdos, ou seja, que eliminasse a forma compartimentalizada existente até então;
- maior ênfase às aplicações práticas.

Em 1916, foi organizado o Comitê Nacional para os Requisitos Matemáticos, vinculado à *American Mathematical Society*, tendo como propósito:

> [...] dar expressão nacional ao movimento de reforma no ensino de matemática, o qual ganhou considerável progresso em

várias partes do país, mas ao qual faltava o poder que coordenação e esforços unidos poderiam dar.

(Butler et al.,1970, p. 12. Trad. da autora.)

Com a intenção de que algumas experiências fossem realizadas antes de que orientações mais fechadas fossem sugeridas, o Comitê apresentou algumas possibilidades de planos para a escola secundária, sendo propostos novos conteúdos eletivos: estatística elementar, matemática de investimento, matemática de compra, sobrevivência e navegação e geometria descritiva ou projetiva. Além disso, recomendou-se o "[...] uso extensivo de material histórico e biográfico em todo o programa para emprestar significado à matéria estudada" (Butler et al., 1970, p. 13. Trad. da autora).

Apesar de não ter sido constituída com o objetivo explícito de elaborar uma nova proposta pedagógica, especialmente em nível secundário, a Comissão Internacional para o Ensino de Matemática era assim encarada por representantes de alguns países. Esse, na verdade, parece ter sido o propósito de alguns de seus integrantes, especialmente Felix Klein.

Podemos perceber essa ambivalência das funções atribuídas à Comissão Internacional, nas seguintes palavras de Euclides Roxo, ao se referir aos relatórios "publicados em inglês no *Yearbook of the national council of teachers of mathematics* (tomo IX, 1929) e, em francês, em *L'Enseignement mathématique* (tomos XVIII e XI, 1929, 1930), sobre as modificações essenciais do ensino das matemáticas nos principais países a partir de 1910":

Deles se evidencia que em 14 países da Europa, na América do Norte e no Japão, já foram adotados nos programas oficiais *grande parte dos princípios preconizados por Felix Klein* e pelos demais colaboradores dos planos meranenses.

(Roxo, 1937, p. 55, grifo nosso.)

Kilpatrick não parece ter dúvidas a respeito das intenções de Klein ao assumir a presidência da Comissão, mesmo não estando presente ao Congresso, uma vez que afirma que Klein estaria "interessado em utilizar a nova comissão para fazer avançar seus objetivos de reforma" (Kilpatrick, 1992, p. 22. Trad. da autora).

De qualquer maneira, é possível afirmar que nesse período esteve em marcha, com Felix Klein à frente, um Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática. Apesar de ter sido enfraquecido pela eclosão da Primeira Guerra Mundial e, sem dúvida, também, pela morte de Felix Klein em 1925, esse movimento influenciou as propostas do ensino de Matemática daquele momento em diante.

As seguintes palavras de J. W. A. Young, retiradas de seu livro *The teaching of mathematics in the elementary and secondary school*, de 1929, ao mesmo tempo que confirmam a existência de um movimento internacional, mostra-nos que ele propunha um rompimento radical com o ensino existente até então:

> É demasiado cedo para predizer qual será o resultado do *movimento internacional para melhorar o ensino da matemática* e no meio do qual nos achamos atualmente. Pode, pelo menos, ser considerado como um grande passo para provar que existe a inquietação; que a necessidade de melhorar está largamente reconhecida, que o sentimento tranqüilo de ser a matemática uma disciplina acabada, cujo ensino não está sujeito a ulterior aperfeiçoamento, dissipou-se de modo eficaz. *O pêndulo se está afastando do abstrato, do formalístico, do sistematizado* — possivelmente mesmo para o outro extremo —, seja como for, está oscilando e ainda não chegou o dia de um relativo reajustamento.
>
> (Young, 1929, apud Roxo, 1937, p. 56, grifo nosso.)

Esse movimento pode ser encarado como uma primeira reação organizada contra "o culto a Euclides", pois foi a primeira ação coletiva no sentido de propor um ensino de Matemática, particularmente para o curso secundário, baseado em princípios totalmente opostos aos apresentados pela obra de Euclides.

Os princípios que orientavam as novas propostas podem ser assim resumidos:

- eliminação da organização excessivamente sistemática e lógica dos conteúdos da escola;
- consideração da intuição como um elemento inicial importante para a futura sistematização;
- introdução de conteúdos mais modernos, como as funções e o cálculo diferencial e integral, especialmente devido à importância deles no desenvolvimento da Matemática e na unificação de suas várias áreas;
- valorização das aplicações da Matemática para a formação de qualquer estudante de escolas de nível médio, não apenas para os futuros técnicos;
- percepção da importância da "fusão", ou descompartimentalização, dos conteúdos ensinados.

Esses princípios estavam vinculados, segundo Klein, a três tendências principais que norteavam as teses de modernização:

> 1 — Predominância essencial do ponto de vista psicológico.
> 2 — Escolha da matéria a ensinar em dependência com as aplicações da matemática ao conjunto das outras disciplinas.
> 3 — Subordinação da finalidade do ensino às diretrizes culturais da nossa época.
>
> (Apud Roxo, 1937, p. 57.)

Apesar de os princípios orientadores do movimento modernizador não terem sido aplicados de uma forma unificada e com a mesma velocidade nos diferentes países, eles acabaram alterando significativamente a fisionomia do ensino de Matemática e oferecendo elementos fundamentais para as futuras discussões. A mudança de postura com relação à Educação Matemática, provocada pelas propostas do movimento renovador, pode ser percebida pelo seguinte fragmento da introdução do livro *Les principles de l'analyse mathématique*, de Pierre Boutroux:

> O ensino de matemática sofreu recentemente, quase em todos os países, uma transformação notável. Até há pouco, eram a estrutura da demonstração, o encadeamento impecável das proposições que preocupavam nossos mestres. Hoje visa-se, ao contrário, a tornar intuitivas as concepções matemáticas, isto é, a apresentá-las sob uma forma viva e concreta; não se separam de suas aplicações e espera-se, desse modo, fazer com que elas correspondam a necessidades reais, que não meras estruturas de silogismos, elaborados, em horas de lazer, por espíritos sutis e maníacos.
>
> (Apud Roxo, 1937, p. 57.)

As idéias apresentadas pelo movimento modernizador da Matemática começariam a influenciar o ensino de Matemática brasileiro apenas ao final da década de 20, como veremos no próximo capítulo.

Capítulo IV

O ensino de Matemática no Brasil: evolução e modernização

Quando teremos a coragem e a independência de espírito necessárias para pôr nos mostruários dos museus os belos candelabros gregos da didática euclidiana e iluminar, com as lâmpadas dos Edisons da matemática moderna, essa obumbrada e fria catacumba, que é uma aula de geometria elementar?

(Euclides Roxo)

Essas palavras de Euclides Roxo, de janeiro de 1931, escritas em complemento a uma passagem de Jules Tannery[8], defendiam a introdução dos modernos métodos do cálculo infinitesimal, criados por Newton, Leibniz e Lagrange, na escola secundária.

A introdução do cálculo infinitesimal na escola secundária, um dos pontos defendidos pela proposta de Euclides Roxo, estava fundamentada nas idéias apresentadas pelo Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática, iniciado em 1908, com a criação da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática.

A proposta de modernização do ensino de Matemática na escola secundária brasileira, contemplada pela Reforma Campos, encontrou algumas resistências para ser implantada.

[8] "Que fazemos nós do trabalho prodigioso dos três últimos séculos, do gênio dos sábios que os ilustraram, dos tesouros que eles amontoaram para nós? Parecemos um milionário que, dispondo dos aparelhos aperfeiçoados da iluminação elétrica, preferisse, apesar do mau cheiro, servir-se, para lumiar sua residência, e sob o pretexto de que a forma é encantadora, de uma dessas lâmpadas de bronze esverdeado que, de quando em vez, se desenterram no solo da Grécia e da Itália. Continuemos a desencavar essas lâmpadas, admiremo-las e coloquemo-las numa vitrine" (Tannery, 1912, apud Roxo, 1937, pp. 231-2).

Essa resistência deveu-se, especialmente, a defensores do tipo de educação que havia caracterizado o ensino secundário brasileiro desde a sua origem, ainda no tempo dos jesuítas, ou seja, a escola clássico-humanista.

O ensino secundário brasileiro, entretanto, percorreu um longo caminho — desde o descobrimento do Brasil, em pleno Renascimento, até 1931 — para começar a ser organizado em um sistema nacional.

O ensino de Matemática, também, teve um longo caminho a percorrer. Num primeiro momento, para conseguir que suas várias áreas fossem consideradas importantes para a formação geral do estudante. Num segundo momento, para modernizar seus conteúdos.

As origens

O ensino brasileiro foi, durante mais de duzentos anos, dominado quase exclusivamente pelos padres da Companhia de Jesus. Durante esse período, as escolas secundárias seguiram a tradição clássico-humanista, expressa desde 1599 pelo *Ratio atque Institutio Studiorum Societatis Jesu,* o código educacional máximo da Companhia de Jesus.

Nessa proposta, na parte equivalente ao ensino médio — os *studia inferiora* —, defendia-se uma educação baseada apenas nas humanidades clássicas, cujas disciplinas eram a retórica, as humanidades e a gramática. As ciências e, em particular, as matemáticas eram reservadas apenas aos *studia superiora.* Entretanto, mesmo nesses estudos superiores, desenvolvidos no curso de filosofia e ciências, ou de artes, pouco se estudavam as matemáticas.

Nos programas iniciais dos cursos de filosofia das escolas jesuíticas da Europa, o estudo das matemáticas se desenvolvia em uma aula diária, em cada um dos três anos de sua duração. No *Ratio* de 1586, entretanto, o tempo destinado a elas foi reduzido para dois anos e, no *Ratio* de 1599 — que seria revisto apenas após a restauração da ordem em 1814 —, sugeria-se que esses estudos começassem apenas em meados do segundo ano do curso.

Apesar da redução gradativa do tempo destinado às matemáticas, as propostas educacionais da Ordem nunca deixariam de evidenciar a utilidade desses estudos, como podemos perceber pelo seguinte fragmento do *Ratio* de 1586:

> Ensinam aos poetas o nascimento e o ocaso dos astros;
> aos historiadores a situação e as distâncias dos diversos lugares;
> aos filósofos exemplos de sólidas demonstrações;
> aos políticos métodos verdadeiramente admiráveis para dirigir os assuntos internos e os relativos à guerra;

aos físicos os modos e a diversidade dos movimentos celestes, da luz [...]
aos jurisconsultos e aos canonistas o cômputo;
sem falar dos serviços prestados pelo trabalho dos matemáticos ao Estado, à medicina, à navegação e à agricultura.
É necessário, pois, esforçar-se para que as matemáticas floresçam em nossos colégios do mesmo modo que as demais disciplinas.

(*Ratio*, 1586, apud Château, 1992, p. 86. Trad. da autora.)

Na prática, entretanto, essas orientações nem sempre foram seguidas.

Muitos jesuítas não viam com bons olhos as matemáticas. Os estudos das relações misteriosas entre números e entre estes e as letras — a gematria — inquietavam os religiosos. Além disso, "a busca de relações abstratas que aparentemente não ocupam nenhum lugar na escala dos seres" era encarada como uma "ciência vã". As seguintes palavras do "douto Jean Bouhier (1673-1746), presidente do Parlamento de Dijon, filólogo, historiador e poeta acadêmico", confirmam essa hostilidade dos jesuítas em relação às matemáticas:

O estudo das ciências especulativas, como a geometria, a astronomia, a física, é um entretenimento sobremaneira vão; todos esses conhecimentos, estéreis e infrutíferos, são inúteis por si mesmos. Os homens não nasceram para medir linhas, examinar as relações entre os ângulos e perder todo o seu tempo em considerações sobre os distintos movimentos da matéria.

(Dainville, 1954, apud Château, 1992, p. 85. Trad. da autora.)

Em algumas escolas jesuíticas, entretanto, devido ao empenho de alguns de seus mestres, os estudos matemáticos foram mais incentivados. Esse foi o caso do Colégio de Roma, onde o padre Christopher Clavius (1537-1612) mostrou-se grande defensor das matemáticas.

Contudo, apenas em meados do século XVIII, quando a "revolução cartesiana começaria a dar seus frutos" nas escolas jesuíticas, as matemáticas passariam a ser consideradas como um dos "melhores elementos culturais". Foi nesse período, em 1744, que o padre Morand iniciou o seu curso aos alunos do Colégio de Avilon, com as seguintes palavras:

As matemáticas são exatamente idôneas para aperfeiçoar o espírito e proporcionar aos que as cultivam uma extraordinária facilidade para conhecer e aprofundar, mais do que comumente se costuma, essas verdades que a elas se aplicam. O costume de julgar e de raciocinar bem só se adquire pelo exercício, e as reflexões que exigem as demonstrações matemáticas constituem o exercício mais útil... Este discernimento vivo e esse espírito de invenção somente podem ser conseqüência de uma longa meditação sobre as verdades matemáticas.

(Dainville, apud Château, 1992, pp. 88-9. Trad. da autora.)

Temos poucas informações sobre o ensino de Matemática existente nos colégios que os jesuítas estabeleceram no Brasil — apenas alguns anos após a sua chegada, em 1549 —, mesmo naqueles em que foram criados os cursos de artes, como o Colégio da Bahia. Esse talvez seja um indicativo de que os estudos matemáticos fossem pouco desenvolvidos nessas escolas, que enfatizavam a tradição clássico-humanística. Como nos diz Azevedo, uma prova de que os jesuítas foram fiéis a essa tradição era o fato de que:

[...] nas várias gerações de estudantes, que passaram pelos seus colégios, nenhum deles se destacou na Colônia por qualquer interesse pelas ciências físicas e naturais ou preocupação com atividades científicas, técnicas e artísticas. Foram todos letrados, cronistas e historiadores [...] poetas [...] ou oradores sacros [...].

(Azevedo, 1976, pp. 38-9.)

Com a expulsão dos jesuítas do Brasil, em 1759, o sistema educacional brasileiro praticamente desmoronou, restando apenas alguns poucos centros educacionais dirigidos por outras ordens religiosas e poucos padres-professores, formados pelas escolas jesuíticas.

A partir de 1772, porém, foram criadas pela reforma pombalina as chamadas "aulas régias" — aulas de disciplinas isoladas — cujo objetivo consistia em preencher a lacuna deixada pela eliminação da estrutura escolar jesuítica.

Essa medida representou um retrocesso em termos institucionais, uma vez que essas aulas eram "avulsas", ou seja, dadas em locais diferentes, sem nenhuma articulação entre elas e sem planejamento do trabalho escolar. Além disso, os professores recrutados para essas aulas não possuíam uma formação adequada. Na verdade, "segundo testemunhos da época", eles mostravam "não só uma espessa ignorância das matérias que ensinavam, mas uma ausência absoluta de senso pedagógico" (Azevedo, 1976, p. 51).

Apesar disso, foi por meio da criação dessas aulas régias que os conteúdos escolares começaram a ser modificados, especialmente por meio da introdução de novas disciplinas, tais como a Aritmética, a Álgebra e a Geometria.

Foi, portanto, apenas ao final do século XVIII, como nos diz Geraldo Bastos Silva, que:

> [...] ao lado das matérias do ensino literário e religioso — o latim, a retórica, o grego, o hebraico, a filosofia, a teologia — *a paisagem escolar do Brasil inclui as matemáticas.* A estas, depois de 1800, agregar-se-ão outras disciplinas, como o desenho, o francês, o inglês.
>
> (Silva, 1959, p. 209, grifo nosso.)

É claro que a introdução legal das aulas régias de Matemática não era uma garantia de que elas seriam populares e nem ao menos de que seriam realmente efetivadas na prática.

Com relação à freqüência nessas aulas régias, é esclarecedora a seguinte passagem de Maria Thetis Nunes:

> Encontramos um edital do governador de São Paulo ordenando que em cumprimento do bando lançado no dia 20 do mês anterior, todos os estudantes e pessoas conhecidamente curiosas se alistassem na aula que se havia de abrir para o ensino de geometria. Àqueles que, infringindo o determinado nesse edital, se não apresentassem a alistar perante o Rev.^{mo} Padre Frei José do Amor Divino Duque, "aplicar-se-ia a pena de se sentar praça de soldado".
>
> (Nunes, 1962, p. 57.)

Seria necessário ameaçar com uma punição para garantir a presença de alunos nas aulas régias de geometria? Isso aconteceria apenas com as disciplinas matemáticas?

Na verdade, a pouca freqüência às aulas régias não seria um "privilégio" das Matemáticas, apesar de essas disciplinas, sem dúvida, encontrarem uma maior resistência, especialmente pelo fato de não fazerem parte do currículo tradicional.

No relatório apresentado pelo ministro do Império, Antônio Pinto Chichorro da Gama, em 1834, sobre a situação em que se encontravam as aulas avulsas no Brasil, com relação ao ensino das matemáticas os dados apresentados eram os seguintes:

- Na Província do Rio de Janeiro, das duas vagas existentes, uma de Geometria e outra de Aritmética, Geometria e Álgebra; a primeira estava vaga, ou seja, não estava em funcionamento, e a segunda, embora estivesse "provida", não possuía alunos matriculados.

- Nas demais províncias a situação não era diferente: das 13 vagas existentes — apenas para Geometria —, duas delas estavam em funcionamento, enquanto as demais encontravam-se vagas (Haidar, 1972, p. 20-1).

Essas informações nos mostram que, ainda na primeira metade do século XIX, as aulas avulsas das disciplinas matemáticas existiam em um número bastante reduzido e que, além disso, eram pouco freqüentadas.

Apesar desse desinteresse demonstrado pelas aulas régias, sobretudo por aquelas consideradas modernas — em especial as matemáticas, que representavam o reflexo, na Colônia, da renovação educacional efetuada pela Reforma Pombalina em Portugal, inspiradas em grande parte pelas idéias dos enciclopedistas franceses —, as novas tendências chegaram a produzir alguns efeitos, mesmo pequenos, na educação secundária brasileira. O maior deles foi, sem dúvida, a criação do Seminário de Olinda pelo bispo Azeredo Coutinho, em 1798.

Nesse Seminário, que entrou em funcionamento em 1800, como nos diz Fernando de Azevedo:

> As novas tendências pedagógicas exprimem-se não só no ambiente liberal que nele se criou, com métodos mais suaves e mais humanos, no respeito maior à personalidade do menino, nas transformações profundas das relações dos adultos com as crianças, dos mestres com os discípulos, mas ainda *pela importância dada, no plano de estudos, ao ensino das matemáticas* e das ciências físicas e naturais.
>
> (Azevedo, 1976, p. 66, grifo nosso.)

Ainda que Azeredo Coutinho permanecesse pouco na direção do Seminário, este era um foco de irradiação das novas idéias que incendiaram as discussões sobre o ensino secundário durante o século XIX e inícios do século XX. De um lado, estavam os defensores do ensino clássico-humanístico e, de outro, os defensores de uma nova tendência educacional mais preocupada com o desenvolvimento dos estudos científicos.

Durante todo o período colonial e imperial, além das aulas avulsas, que vão sendo aos poucos suprimidas, existiam os seminários e colégios mantidos por ordens religiosas, as escolas e professores particulares (estes especialmente na cidade do Rio de Janeiro) e os recém-criados Liceus das Províncias: o Ateneu do Rio Grande do Norte, em 1835, e os Liceus da Bahia e da Paraíba, em 1836, como reunião das aulas avulsas existentes em um mesmo edifício. O objetivo comum de todos esses estabelecimentos de ensino secundário era a preparação dos alunos para o ingresso nas Academias Militares e Escolas Superiores. Outros tipos de escolas — preparatórias aos cursos superiores — foram, também, criadas para atender à preparação específica de determinado tipo de ensino superior.

Uma conseqüência direta desse caráter propedêutico foi o oferecimento apenas das matérias exigidas pelos exames de seleção das escolas superiores. Como as exigências eram ainda em grande parte restritas aos estudos humanísticos, as disciplinas matemáticas ficariam, na maior parte das vezes, limitadas ao estudo da aritmética e da geometria. Além disso, pelo fato de essas exigências legais não serem muitas vezes cumpridas, especialmente devido à série de irregularidades existentes nos exames de seleção, mesmo esses cursos eram ainda pouco freqüentados.

A situação das escolas secundárias brasileiras, durante esse período, pode ser avaliada pelas seguintes palavras de Gonçalves Dias, em seu relatório de 1852, dirigido ao governo imperial, no qual é apresentada uma avaliação de alguns Liceus provinciais:

> O grande inconveniente da nossa instrução secundária é de não se ocupar de outra coisa senão de preparar moços para a carreira médica ou jurídica. Os nossos Liceus são escolas preparatórias das Academias, — e escolas más [...] A insuficiência destes estudos, a facilidade de tais exames nas Academias, o meio por que sabemos que se pode fazer, são outros tantos obstáculos para que prosperem os Liceus. *Se algum deles tem querido introduzir no quadro do ensino secundário noções das ciências naturais e exatas, — tais como as Matemáticas puras, a Química, a Física, a Botânica, a Agrimensura, vêem definhar esses estudos, porque não são necessários para nenhum grau literário...*
>
> Outras vezes, como na Paraíba, acontece apresentar a Instrução Secundária uma freqüência satisfatória, mas a ilusão desaparece, quando se examina o quadro do Liceu, e se conhece a desproporção que há entre as matrículas e as aprovações. Nessa Província, no ano de 1851, de 102 matriculados foram aprovados 6 [...] Dos 102 matriculados couberam 2 a Retórica e Geografia, *7 a Geometria*, 5 a Inglês e nenhum a Filosofia! Os que mais avultavam eram 22 de Francês e 65 de Latim.
>
> (Dias, 1852, apud Almeida, 1989, pp. 348-9, grifo nosso.)

A criação do Colégio Pedro II, em 1837, representou, entretanto, um primeiro passo na direção de mudanças no ensino secundário brasileiro.

O caminho da modernização

O estado lastimável em que se encontrava o ensino secundário no Município da Corte, reduzido a poucas aulas avulsas, sem nenhuma inspeção, incentivo ou orientação, onde professores escolhiam seus horários de aula e os conteúdos de suas lições, e os alunos matriculavam-se e retiravam-se das aulas quando bem entendessem, levou os ministros do Império, a partir de 1833, a propor modificações.

A proposta mais freqüente foi a criação de liceus onde fossem reunidas e fiscalizadas as aulas avulsas existentes. Nesse primeiro momento, como nos afirma Haidar, não "se reivindicava ainda a reestruturação das aulas e sua organização em cursos seriados, cuja duração, previamente fixada, garantiria um mínimo de escolaridade regular" (Haidar, 1972, p. 96).

Em 1837, porém, o ministro e secretário de Estado da Justiça e interino do Império, Bernardo Pereira de Vasconcelos, inspirado na organização dos colégios franceses, criou a primeira escola secundária pública da cidade do Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II.

Pela primeira vez, foi apresentado um plano gradual e integral de estudos para o ensino secundário, no qual os alunos eram promovidos por série, e não mais por disciplinas, e obtinham, ao final do curso, um título de bacharel em Letras, que lhes garantia a matrícula em qualquer escola superior, sem a necessidade de prestar exames. Nesse plano de estudos, nos moldes dos colégios franceses, predominaram as disciplinas clássico-humanistas. Apesar disso, as matemáticas, as línguas modernas, as ciências naturais e físicas e a história seriam também contempladas, mostrando uma tentativa de conciliação entre o ensino clássico e as tendências modernas; um reflexo das discussões entre *anciens* e *modernes* que aconteciam na Europa. As matemáticas — aritmética, geometria e álgebra — tiveram, assim, seu lugar garantido e apareceram em todas as oito séries do curso. Nesse primeiro plano de estudos, a aritmética compareceu nas três primeiras séries; nas duas séries seguintes estudava-se a geometria, na sexta série, a álgebra, e, nas duas últimas séries, reservavam-se respectivamente seis e três lições para Matemática.

Em todas as várias reformas pelas quais passariam os planos de estudo do Colégio Pedro II, durante o período imperial, ora predominando o ensino clássico, ora o científico, as matemáticas — com a inclusão da trigonometria — estiveram sempre presentes, variando apenas a quantidade de horas destinadas ao seu ensino e, em alguns momentos, a profundidade de seus conteúdos. Foi o caso, por exemplo, do ensino de geometria, que, em alguns momentos, ficou restrito ao estudo da geometria plana, como na Reforma de 1870, e em outros seriam estudados tanto a geometria plana quanto a sólida.

Com a República e o primeiro-ministro do recém-criado Ministério da Instrução, Correios e Telégrafos — Benjamin Constant —, todo o sistema educacional brasileiro passou por uma profunda reforma — oficializada pelo Decreto nº 891, de 8 de novembro de 1890 —, que ficou conhecida por Reforma Benjamin Constant.

A Reforma, elaborada segundo a filosofia de Augusto Comte, representou uma ruptura com a tradição clássico-humanista existente até então no ensino secundário. Era uma tentativa de introduzir uma formação científica — nos moldes positivistas — em substituição à formação literária existente. Isso se realizou, entretanto, não pela eliminação das disciplinas tradicionais — Latim e Grego —, mas por meio do acréscimo das disciplinas científicas, o que ampliou ainda mais o caráter enciclopédico do currículo de nossa escola secundária.

Na parte relativa ao ensino de Matemática — considerada a ciência fundamental dentro do positivismo — estiveram contempladas todas as partes que compõem tanto a Matemática abstrata como a Matemática concreta, dentro da hierarquia estabelecida por Comte. O programa de Matemática da escola secundária ficou assim distribuído:

> 1º ano — aritmética (estudo completo) e álgebra elementar (estudo completo); 2º ano — geometria preliminar, trigonometria retilínea, geometria especial (estudo perfunctório das seções cônicas, da concóide, da *limaçon* de Pascal e da espiral de Arquimedes); 3º ano — geometria geral e seu complemento algébrico, cálculo diferencial e integral (limitado ao conhecimento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita); 4º ano — 1º período: mecânica geral (limitada às teorias gerais de equilíbrio e movimento dos sólidos invariáveis e precedida das noções rigorosamente indispensáveis do cálculo das variações); 2º período: astronomia (precedida da trigonometria esférica), geometria celeste e noções sucintas de mecânica celeste (gravitação universal).
>
> (Silva, 1959, p. 246.)

Na proposta apresentada por Benjamin Constant, que reservava sete anos para o ensino secundário, além do eixo central determinado pelas matemáticas, pela Física geral, Química geral, Biologia, Sociologia e Moral e Noções de Direito pátrio e de Economia política, existiam ainda as seguintes disciplinas: Português, Latim, Francês, Inglês ou Alemão, Grego, Geografia política e econômica, especialmente do Brasil, Zoologia, Botânica, Meteorologia, Mineralogia, Geologia, História universal, História do Brasil e da literatura nacional, Desenho, Música e Ginástica. Além dessas, estavam previstos em todos os anos, a partir do terceiro, horários destinados à revisão das matérias estudadas anteriormente, que aumentavam a cada ano.

Essa proposta, "além de contrariar a concepção preparatória do ensino secundário, ainda dominante na opinião pública, era intrinsecamente inexeqüível" (Silva, 1959, p. 247).

As manifestações em contrário não tardaram a aparecer, mesmo por parte dos próprios positivistas, que alegavam que Benjamin

Constant havia aplicado erroneamente as idéias de Comte à educação.

Apesar disso, talvez devido ao "respeito que inspirava a memória do reformador, já falecido", essas manifestações não produziriam efeitos imediatos. Como afirma Geraldo Bastos Silva:

> É pela ação do tempo, podemos dizer, que o plano monumental de Benjamin Constant vai sendo desfigurado, através de cortes e de ajustamentos oportunísticos à idéia predominante de um curso secundário voltado à consecução do objetivo de preparo aos cursos superiores.
>
> (Silva, 1959, p. 247.)

Nenhuma das várias reformas que ocorreram após a de Benjamin Constant, até 1930, chegou a produzir mudanças significativas no ensino secundário brasileiro, além de não resolver a antiga questão sobre a melhor formação secundária — literária ou científica. O ensino continuou a ser entendido como destinado à preparação apenas das profissões liberais — o direito, a medicina e a engenharia.

Ao lado do ensino secundário e das faculdades, entretanto, começaram a surgir as escolas técnicas, especialmente para atender às necessidades da agricultura e da indústria, que estavam começando a firmar-se em alguns centros, como Rio de Janeiro e São Paulo. Essas escolas, no entanto, durante muitos anos não passaram de instituições dispersas, sem nenhuma articulação entre elas ou com os outros tipos de ensino.

Entretanto, a expansão da indústria nacional, o desenvolvimento de nossa agricultura, a expansão dos centros urbanos e a influência das novas idéias que agitavam a Europa e os Estados Unidos após a Primeira Guerra Mundial produziram no Brasil um movimento de renovação social, cultural e educacional.

Nesse momento de mudanças, em que se manifestava claramente o conflito entre o novo e o velho em todos os setores da vida social, "entre o novo regime político e as velhas oligarquias, entre o capitalismo industrial e o predomínio da economia agrícola", entre a arte antiga e a moderna, a nova proposta educacional tinha de "ser 'uma reação categórica, intencional e sistemática contra a velha estrutura do serviço educacional, artificial, e verbalista, montada para uma concepção vencida'" (Romanelli, 1990, p. 146).

Essa nova proposta educacional surgiu através do que ficaria conhecido como o Movimento da Escola Nova.

As novas correntes educacionais surgidas ao final do século passado, na Europa e nos Estados Unidos, que já tinham produzido seus primeiros reflexos no ensino primário brasileiro, começaram, a partir da década de 20, a alterar completamente a fisionomia da educação em nosso país.

As reformas que começaram a ocorrer em diversos Estados tentando colocar em prática as novas idéias[9], a publicação de livros sobre educação que apresentavam as novas correntes educacionais e, especialmente, a criação da Associação Brasileira de Educação, em 1924, que promoveu as Conferências Nacionais de Educação, foram os elementos desencadeadores do movimento de renovação da educação brasileira, provocando uma ampla discussão sobre as questões pedagógicas.

Apesar de o termo Movimento da Escola Nova englobar uma variedade de correntes pedagógicas modernas, que podiam até mesmo conter princípios divergentes, é inegável que algumas idéias básicas eram aceitas por todos. Dentre elas estavam o "princípio da atividade" e o "princípio de introduzir na escola situações da vida real".

Esses princípios provocaram uma mudança radical no ensino das séries iniciais, em particular no de Matemática. De uma "Matemática do quadro-negro", emprestando uma expressão usada por Irene de Albuquerque, passaríamos a uma "Matemática de atividade".

Na reforma proposta por Anísio Teixeira para o Distrito Federal (1932-1935), essas preocupações podem ser percebidas pela seguinte orientação dada com relação à questão dos problemas aritméticos:

> As condições dos problemas devem ser as mesmas da vida real. Os problemas devem ser propostos de acordo com ocupações e interesses da classe, de modo que os alunos, sentindo a necessidade de resolvê-los, se apliquem à solução, movidos por verdadeiro interesse. Assim as contas que a criança faz para casa, no mercado, na feira, nas lojas, no armazém; os trabalhos escolares, movimento de cooperativas, jogos, esportes, excursões; a saúde da criança e de pessoas da família, as condições de saúde do bairro, incluindo serviços de Saúde Pública, despesas com receitas, dietas, remédios etc., fatos diversos que a criança presencia — tudo isto constitui assunto para problemas.
>
> (Apud Brasil MEC, 1955, p. 137.)

O Movimento da Escola Nova não atingiu inicialmente as escolas secundárias, que permaneceram ligadas aos princípios tradicionais: um ensino livresco, sem relação com a vida do aluno, baseado na memorização e na assimilação passiva dos conteúdos. Apenas uma experiência de introdução das idéias do Movimento da Escola Nova ocor-

9 As primeiras reformas que se orientavam pelos princípios renovadores foram: a de São Paulo, em 1920, por Sampaio Dória; a do Ceará, em 1922/23, por Lourenço Filho; a do Rio Grande do Norte, em 1925/28, por José Augusto; a do Distrito Federal, em 1922/26, e a de Pernambuco, em 1928, ambas por Carneiro Leão; a do Paraná, em 1927/28, por Lysímaco da Costa; a de Minas Gerais, em 1927/28, por Francisco Campos; a do Distrito Federal, em 1928, por Fernando de Azevedo, e a da Bahia, em 1928, por Anísio Teixeira. Cf. Romanelli, 1990, p. 129.

reu no Instituto Cruzeiro, em Cruzeiro — SP. Nessa escola "se desenvolveu [...] um sistema de organização geral das atividades escolares sob a forma de instituições as mais diversas — associações, centros, núcleos, academias, grêmios, cooperativas, fábricas, oficinas — [...] que substituíam, em seu funcionamento, a atividade das aulas de cada disciplina do programa oficial, e de outras, acrescidas" (Lourenço Filho, 1978, p. 177).

Porém, as novas idéias que agitavam as discussões educacionais no país, que apresentavam novas propostas para o ensino das séries iniciais e que se efetivavam na prática por meio das reformas empreendidas em vários Estados, não deixariam de apresentar seus reflexos na escola secundária, em especial no ensino de Matemática.

A introdução das idéias modernizadoras no ensino da Matemática

Em 1928, a Congregação do Colégio Pedro II apresentou uma proposta de alteração da seriação do curso secundário, na qual se pensava em uma radical mudança para os programas do ensino de Matemática.

Nessa proposta, estavam presentes todas as idéias modernizadoras, defendidas pelo Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática.

Apesar de o Brasil ter participado das atividades da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática como "país convidado", ou seja, sem direito a voto, desde 1908, esse intercâmbio aconteceu de maneira muito superficial, sem conseqüências na prática do ensino de Matemática brasileiro.

Realmente, a primeira, e única, participação do Brasil nos primeiros anos de atividade dessa Comissão ocorreu em reunião de 1912, durante a realização do V Congresso Internacional de Matemática, realizado de 21 a 28 de outubro, em Cambridge.

Nessa reunião, o professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia, professor do Colégio Pedro II, apresentou a adesão brasileira, sendo então nomeado delegado do Brasil.

No momento destinado à apresentação do relato da situação do ensino de Matemática em cada um dos países participantes, com relação ao Brasil, o professor Raja Gabaglia teria anunciado que:

> O governo brasileiro adere oficialmente à Comissão Internacional, pois ele prega um aperfeiçoamento da organização dos estudos em seu país. Um estudo completo, portanto, sobre o conjunto dos estabelecimentos que fornecem um ensino matemático, será tornado público no próximo Congresso.
>
> (*L'Enseignement mathématique*, 1912, p. 479. Trad. da autora.)

No entanto, devido à interrupção dos Congressos Internacionais de Matemática e dos trabalhos da Comissão Internacional, em razão da eclosão da Primeira Guerra Mundial, esse relato não foi apresentado e a continuidade da participação brasileira ficou comprometida.

As idéias modernizadoras apresentadas por essa Comissão começaram a penetrar no ensino de Matemática de nossa escola secundária apenas a partir de 1928, com a proposta do Colégio Pedro II. Isso pode ser confirmado pelas seguintes palavras de Euclides Roxo, professor catedrático de Matemática nessa instituição e o maior responsável pela elaboração da proposta modernizadora brasileira, baseado em argumentos utilizados por "nomes de valor indiscutível", especialmente Felix Klein:

> Entre nós, até 1929, o ensino de aritmética, o de álgebra e o de geometria eram feitos separadamente. O estudante prestava, pelo regime de preparatórios que vigorou até 1925, um exame distinto para cada uma daquelas disciplinas [...]. Em 1928, propusemos à Congregação do Colégio Pedro II a modificação dos programas de matemáticas, *de acordo com a orientação do moderno movimento de reforma* e a conseqüente unificação do curso em uma disciplina única sob a denominação de matemática [...]
>
> (Roxo, 1940, pp. 73-4, grifo nosso.)

Essa proposta de alteração do ensino de Matemática, bem como de toda a seriação do curso secundário, foi homologada pelo Conselho Nacional do Ensino e transformada no Decreto nº 18 564, de 15 de janeiro de 1929. Esse decreto, entretanto, dizia respeito à introdução das idéias modernizadoras apenas no Colégio Pedro II. Apesar de essa instituição ser considerada um modelo para as demais escolas secundárias, não se garantia que elas adotariam essas orientações.

Apesar de o professor Euclides Roxo afirmar, na introdução de seu livro *A Matemática na educação secundária* (1937), que a sua intenção era apenas de apresentar "muitas opiniões abalizadas sobre as questões mais relevantes e de ordem mais geral, relativas ao ensino de matemática", e que o livro não continha "nenhuma idéia original, nenhum ponto de vista pessoal", a sua posição em defesa da modernização transparece em cada página, além de ser claramente percebida por sua atuação como professor e diretor do Colégio Pedro II.

A proposta da Congregação do Colégio Pedro II, que estava de acordo com as novas idéias existentes naquele momento no Brasil, representou um elemento decisivo para a introdução do ensino moderno em todas as escolas secundárias brasileiras. O fato, no entanto, só se deu com a reforma que Francisco Campos apresentaria para a escola secundária — inicialmente, por meio do Decreto nº 19 890, de 18 de abril de 1931, depois consolidada pelo Decreto nº 21 241, de 4 de abril de 1932

—, a qual foi a primeira tentativa de estruturar todo o curso secundário nacional e de introduzir nele os princípios modernizadores da educação.

Francisco Campos, o primeiro-ministro do recém-criado Ministério da Educação e Saúde Pública — que havia remodelado o ensino primário e normal de Minas Gerais, de acordo com as idéias do movimento renovador da educação —, acatou, em sua reforma para o ensino secundário, todas as idéias modernizadoras presentes na proposta da Congregação do Colégio Pedro II, na parte relativa ao ensino de Matemática.

Dessa maneira, essas idéias foram, ao menos oficialmente, implantadas em todas as escolas secundárias brasileiras.

Em sua exposição de motivos, Francisco Campos deixou clara a intenção de conferir ao ensino secundário um caráter "eminentemente educativo", ultrapassando o caráter propedêutico que tinha tido até então. Para que essa finalidade pudesse ser alcançada, era necessário introduzir no ensino secundário as novas idéias educacionais, uma vez que:

> A qualidade da educação não se mede pelo volume das noções e dos conceitos; estes, pelo contrário, quando incutidos pelos processos usuais do ensino, constituem falsas aquisições, pelas quais os seus possuidores, no sistema de trocas que funciona na vida real, não obterão valores autênticos e úteis.
>
> A verdadeira educação concentra o seu interesse antes sobre os processos de aquisição do que sobre o objeto que eles têm em vista, e a sua preferência tende, não para a transmissão de soluções já feitas, acabadas e formuladas, mas para as direções do espírito, procurando criar, com os elementos constitutivos do problema ou da situação de fato, a oportunidade e o interesse pelo inquérito, a investigação e o trabalho pessoal em vista da solução própria e adequada e, se possível, individual e nova.
>
> (Campos, Exposição de motivos, 1931, apud Bicudo, 1942, p. 639.)

Considerando que as exigências do mundo contemporâneo, "em estado de movimento e de mudança", reforçavam essa necessidade de modernização, continuou:

> O homem mais capaz, nas condições do mundo contemporâneo, não é aquele que dispõe de um repositório de respostas, aprendidas na escola para um grande número de questões que, ele espera, lhe serão propostas pela vida real, mas aquele em cujo espírito a educação houver construído um vigoroso

sistema de hábitos e de tipos definidos e preciso de reação, de modo que as situações novas que lhe criar a vida possam ser rápida e seguramente elaboradas no sentido de soluções concretas e adequadas. Visando, portanto, os processos de aquisição, de preferência as aquisições, pois que estas envelhecem e passam, e aqueles continuam a funcionar utilmente no sentido de novas aquisições, a educação, para ser eficaz e valiosa, ao invés de assentar sobre bases estáticas, tem de orientar o seu centro de gravidade para uma base ativa, móvel e dinâmica, visando mais os pontos de vista, as atitudes de espírito, os métodos e processos de ataque do que as noções, os conceitos e os produtos acabados do ensino, isto é, as soluções transmitidas pelos viciosos sistemas usuais de comunicação entre professor e aluno.

(Campos, Exposição de motivos, 1931, apud Bicudo, 1942, p. 640.)

Foi por meio dessa reforma que ficaram estabelecidos "definitivamente o currículo seriado, a freqüência obrigatória, dois ciclos, um fundamental e outro complementar, e a exigência de habilitação neles para o ingresso no ensino superior" na educação secundária brasileira (Romanelli, 1990, p. 135). Nela, as disciplinas matemáticas apareciam englobadas sob o título de Matemática, nas cinco séries que compunham o curso fundamental, com três aulas por semana em cada série, e, no curso complementar, apenas aos candidatos à matrícula nos cursos de Medicina, Farmácia e Odontologia; com quatro aulas por semana, em apenas uma das duas séries que compunham o curso; e, para os candidatos aos cursos de Engenharia ou Arquitetura, nas duas séries do curso, sendo seis aulas por semana em cada série.

As preocupações demonstradas pelo ministro Campos, especialmente com relação à modernização dos conteúdos e métodos do ensino secundário, compatibilizavam-se com a proposta de modernização do ensino de Matemática apresentada por Euclides Roxo, adotada integralmente pela Reforma.

Na Portaria Ministerial nº 19 890, de 30 de junho de 1931, em que são apresentados os programas do curso fundamental do ensino secundário e as respectivas instruções pedagógicas, encontramos explicitados todos os pontos defendidos pelo movimento reformador em geral e, em particular, aqueles defendidos pelo Movimento Internacional para a Modernização do Ensino da Matemática.

O objetivo do ensino de Matemática deixava de ser apenas o "desenvolvimento do raciocínio", conseguido através do trabalho com a lógica dedutiva, mas incluía, também, o desenvolvimento de outras "faculdades" intelectuais, diretamente ligadas à utilidade e aplicações da Matemática.

Esses objetivos eram explicitados da seguinte forma:

O ensino da Matemática tem por fim desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habilitando-o, ao mesmo tempo, *à concisão e ao rigor do raciocínio pela exposição clara do pensamento em linguagem precisa.*

Além disso, para atender ao interesse imediato da sua utilidade e ao valor educativo dos seus métodos, procurará, não só despertar no aluno a capacidade de resolver e agir, com presteza e atenção, como ainda favorecer-lhe *o desenvolvimento da faculdade de compreensão e de análise das relações quantitativas e especiais, necessárias às aplicações nos diversos domínios da vida prática e à interpretação exata e profunda do mundo objetivo.*

(Decreto nº 19 890, 1931, apud Bicudo, 1942, p. 156, grifo nosso.)

Para que esses objetivos pudessem ser alcançados, era necessário que as exigências advindas da nova psicopedagogia, e que estavam na base do Movimento da Escola Nova, fossem observadas: um ensino orientado segundo o grau de desenvolvimento mental, baseado no interesse do aluno, que deveria partir da intuição e apenas aos poucos ir introduzindo o raciocínio lógico, que enfatizasse a descoberta, e não a memorização.

Desse modo, nas orientações gerais, enfatizavam-se os seguintes aspectos: a importância da prática dos cálculos mentais, da compreensão das operações elementares, do desenvolvimento do senso de estimativa, da análise de situações, relacionamento de fatos e estabelecimento de leis gerais, do uso do método heurístico, que levariam o aluno a ser "um descobridor", e não "um receptor passivo de conhecimentos", e, também, da introdução de um "curso propedêutico" de geometria, "destinado ao ensino intuitivo, de caráter experimental e construtivo". Além disso, seria necessário "renunciar completamente à prática de memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de definições e regras e ao estilo sistemático das demonstrações já feitas" e introduzir a matéria "por meio da resolução de problemas e de questionários intimamente coordenados" (Decreto nº 19 890, 1931, apud Bicudo, 1942, p. 157).

A proposta também trazia uma visão mais moderna dos conteúdos matemáticos, sugerindo a eliminação de "assuntos de interesse puramente formalístico", de "processos de cálculos desprovidos de interesse didático" e introduzindo o conceito de função e noções do cálculo infinitesimal. Além disso, propunha a descompartimentalização das várias áreas da Matemática, enfatizando a importância de suas aplicações. Esses aspectos estão claramente explicitados no seguinte fragmento das "instruções pedagógicas" da reforma:

A Matemática será sempre considerada como um *conjunto harmônico cujas partes estão em viva e íntima correlação.* A acentuação clara dos três pontos de vista — aritmético, algébrico e geométrico — não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas.

Para dar unidade à matéria, estabelecendo-se essa estreita correlação entre as diferentes modalidades do pensamento matemático, será adotada, *como idéia central do ensino, a noção de função,* apresentada, a princípio, intuitivamente e desenvolvida, nas séries sucessivas [...], de modo gradativo, tanto sob a forma geométrica como sob a analítica.

Como um desenvolvimento natural do conceito de função, será incluído na 5ª série o ensino das *noções fundamentais e iniciais do cálculo das derivadas,* tendo-se não só em vista a sua aplicação a certas questões, geralmente tratadas em matemática elementar por processos artificiais, como ainda aos problemas elementares da mecânica e da física [...]

O assunto deverá, portanto, ser escolhido de modo que se ensinem exclusivamente *as noções e os processos que tenham importância nas aplicações práticas,* ou sejam necessárias à ligação íntima das partes que o constituem [...]

E, por fim, com o intuito de aumentar o interesse do aluno, o curso será incidentalmente *entremeado de ligeiras alusões a problemas clássicos e curiosos e aos fatos da história da Matemática, bem como à biografia dos grandes vultos desta ciência.*

(Decreto nº 19.890, 1931, apud Bicudo, 1942, pp. 157-8, grifo nosso.)

Nas orientações específicas, que acompanhavam as questões gerais, e em que, ao contrário do que poderíamos esperar, os três ramos da Matemática escolar, Aritmética, Álgebra e Geometria, apareciam em partes separadas, detalhavam-se esses aspectos modernizadores.

Enfatizou-se a necessidade de os conceitos serem inicialmente trabalhados de maneira intuitiva e experimental, sem preocupação com o formalismo, de serem apresentados de forma gradativa, dos mais fáceis aos mais complexos, e de serem compreendidos pelos alunos, evitando mecanizações de processos e cálculos excessivos e desnecessários.

Com relação ao estabelecimento de inter-relações entre os três ramos, foram apresentadas sugestões para que fossem representadas geometricamente as grandezas numéricas, para que fosse estabelecida uma correlação entre conceitos e expressões algébricas com as noções de geometria intuitiva, por meio da associação com as noções de perímetro, área, volume e segmentos orientados. Essas inter-relações estabelecidas tinham em vista o fornecimento de elementos básicos para a compreensão do fator unificador da proposta, ou seja, o conceito de função:

> *A noção de função constituirá a idéia coordenadora do ensino.* Introduzida, a princípio, intuitivamente, será depois desenvolvida sob feição mais rigorosa, até ser estudada, na última série, sob ponto de vista geral e abstrato. Antes mesmo de formular qualquer definição e de usar a notação especial, o professor não deixará, nas múltiplas ocasiões que se apresentarem, tanto em Álgebra como em Geometria, de chamar a atenção para a dependência de uma grandeza em relação a outra ou como é determinada uma quantidade por uma ou por várias outras.
>
> *A representação gráfica e a discussão numérica devem acompanhar, constantemente, o estudo das funções e permitir, assim, uma estreita conexão entre os diversos ramos das matemáticas elementares.*
>
> [...] Como recursos indispensáveis à resolução rápida dos problemas da vida prática, é necessário que o estudante perceba serem *tabelas, gráficos e fórmulas algébricas representações da mesma espécie de conexão entre quantidades* e verifique a possibilidade de se tomar qualquer desses meios como ponto de partida, conforme as circunstâncias.
>
> (Decreto nº 19 890, 1931, apud Bicudo, 1942, p. 159, grifo nosso.)

Na parte relativa à Geometria, percebe-se uma clara preocupação em introduzir os raciocínios lógicos apenas após um trabalho inicial que familiarize o aluno com as noções básicas presentes nas figuras geométricas, quer em sua posição fixa, quer através de seus movimentos. Com respeito a este último aspecto, enfatizava-se a importância de serem examinadas as noções de simetria axial e central, de rotação e de translação.

Apesar de não ser eliminado o estudo da geometria dedutiva, que, entretanto, ficara restrito à geometria plana, sugeria-se que ele fosse introduzido de forma gradual e tivesse sempre por base as observações intuitivas e a compreensão da necessidade de uma demonstração.

Após esse detalhamento, propõe-se um programa para as cinco séries do curso fundamental, com a seguinte ressalva:

> A ordem em que é enumerada a matéria de cada série não é obrigatória: serve apenas para mostrar como se podem subordinar os programas dos cursos às diretrizes metodológicas aqui estabelecidas.
>
> (Bicudo, 1942, p. 161.)

O programa trazia uma listagem dos conceitos a ser trabalhados em cada série. Percebe-se claramente a tentativa de articulação entre os vários campos, que deveria acontecer de maneira gradativa.

Na 1ª série, os três campos apareciam separados. Listavam-se os conceitos fundamentais de cada um deles. Na parte relativa à Geometria, percebe-se um claro rompimento com a apresentação dedutiva: em seguida ao trabalho com as "noções sobre as formas geométricas", propunha-se o estudo de áreas e volumes das principais figuras geométricas. Os temas propostos para a Aritmética e a Álgebra eram os que tradicionalmente dão início a estes ramos. A única novidade consistia no "traçado de gráficos", colocado como o último item da Aritmética.

Na 2ª série, a articulação começava a ficar mais definida. Na Geometria, após o estudo de ângulos, paralelas e perpendiculares, triângulos, quadriláteros, figuras semelhantes e medida de distância, eram introduzidas as primeiras noções da Trigonometria do triângulo retângulo. A Aritmética e a Álgebra apareciam como um único campo, onde se apresentava a noção de função de uma variável e a sua representação gráfica. Após a introdução desse "elemento unificador", deparamos com um caminho novo, que trabalhava, de forma articulada, noções antes estudadas separadamente. Isso fica claro na seguinte seqüência proposta: o estudo das funções $y = ax$ e $y = a/x$, proporções e suas propriedades, porcentagens, juros, equações de 1º grau, sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis, representação gráfica da função linear de uma variável e de um sistema de duas equações com duas incógnitas.

Na 3ª série, a articulação entre a Aritmética e a Álgebra continuava através da ampliação do estudo das funções, de sua representação gráfica e das equações e desigualdades algébricas. Na Geometria, era claro o rompimento com o modelo euclidiano, quando se sugeria o estudo do "conjunto de proposições fundamentais que servem de base à geometria dedutiva", das "noções sobre deslocamentos elementares no plano; translação e rotação de figuras" e, em seguida, uma série de outros estudos específicos sobre figuras, relações métricas e homotetia. Era a "pulverização" da geometria dedutiva euclidiana.

Na 4ª e 5ª séries essas características básicas se mantiveram, culminando com a introdução das noções básicas do cálculo infinitesimal.

Não é difícil imaginar que uma proposta tão inovadora, que introduzia alguns aspectos radicalmente opostos àqueles existentes até então, ou seja, que se propunha a alterar uma tradição vigente, encontrou muitas resistências para ser implantada.

O primeiro ataque veio de professores que, em geral, não se sentiam seguros para trabalhar a Matemática de uma maneira tão diferente daquela que estavam habituados. Essa situação se agravou pelo fato de quase inexistirem, inicialmente, livros didáticos que contemplassem as idéias modernizadoras[10]. Segundo as antigas orientações de ensino, os

[10] As primeiras coleções que seguiram a moderna orientação do ensino de Matemática, publicadas a partir dos últimos anos da década de 20, foram *Curso de matemática elementar*, de Euclides Roxo, e *Curso de matemática*, de Cecil Thiré e Mello e Souza.

livros adotados até então eram compêndios separados de aritmética, álgebra, geometria ou trigonometria, que apresentavam, em geral, uma exposição formal dos conteúdos e uma quantidade extensa de exercícios.

Para adaptar-se às novas diretrizes da Reforma, os professores, num primeiro momento, recolheram fragmentos de vários livros, como podemos perceber pela seguinte passagem de Maria Antonieta Martins:

> Os Professores da Universidade Federal do Paraná Arthur Barthelmess e Lauro Esmanhoto [...] lembram-se de que para ensinar Matemática nesse período, no qual não existiam mais livros que se ajustassem às séries, retiravam os conteúdos — uma parte do Compêndio de Aritmética, outra do livro de Álgebra, e o mesmo ocorria com os de Geometria e Trigonometria.
>
> (Martins, 1984, p. 168.)

Essa tentativa de adaptação dos professores, no entanto, mostrava uma clara descaracterização da proposta, uma vez que se constituiria apenas em uma união de "retalhos" de um estilo de ensino que se tentava extinguir.

O maior problema enfrentado pela modernização, entretanto, veio da forte resistência apresentada pelos defensores do ensino clássico. Eles entendiam que "a restauração das Humanidades Clássicas" era a forma adequada de combater o enciclopedismo superficial e a especialização prematura responsáveis pela "descida de nível dos estudos secundários no Brasil" (Vieira, 1935, pp. 9 e 16).

Com relação ao ensino de Matemática, as maiores críticas foram dirigidas ao excesso de assuntos, ao sistema de ciclos e à eliminação de sua apresentação lógica. Esses elementos seriam os responsáveis pela Matemática deixar de dar a sua maior contribuição ao ensino, ou seja, a "formação da inteligência".

O padre Arlindo Vieira, um dos maiores defensores do ensino das humanidades clássicas e um dos maiores críticos das últimas reformas do ensino secundário, buscou os seus argumentos na comparação entre os programas adotados em outros países e os programas brasileiros existentes na época.

O padre classificou os nossos programas para o ensino de Matemática, comparado com o existente nas escolas portuguesas, como "excessivamente carregados". Em Portugal, se estudava na 1ª e 2ª séries a aritmética e na 3ª, 4ª e 5ª, a álgebra. Em todas as séries, a geometria e os estudos mais aprofundados dessas disciplinas, bem como a trigonometria, só eram vistos pelos alunos que optassem pela área matemática. Assim se posicionava Arlindo Vieira:

> Que dizer pois dos nossos programas, onde, em cada série, *se amontoam noções de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria,* com amplos desenvolvimentos que tornam esses programas de todo inexeqüíveis? O resultado é o que nós vemos: os alunos concluem o curso ginasial sem saber quase nada.
>
> (Vieira, 1936a, p. 29, grifo nosso.)

E continuaria, citando o seguinte comentário, que teria sido feito por um "ilustre professor de matemática", sobre os nossos programas e "certos" manuais escolares existentes: "Muita gente pensa que a ressonância das palavras substitui a vacuidade das idéias".

Nessa passagem fica clara não apenas a oposição de Arlindo Vieira com relação à quantidade de assuntos desenvolvidos no ensino de Matemática no curso secundário, mas também a sua posição contrária ao "fusionismo" das várias áreas da Matemática.

Em outro livro ele faria os seguintes comentários, agora utilizando para comparação as escolas italianas:

> Nosso programa de matemática, correspondente às três primeiras séries, é pelo menos cinco vezes mais desenvolvido que o programa italiano.

E continuaria, especificando as partes de nosso programa que não constavam dos programas italianos:

> Quanto à geometria, não há nos programas italianos dos três primeiros anos estes pontos que se encontram nos programas de 2ª e 3ª séries do nosso curso fundamental: "Noções sobre figuras semelhantes; escala. Medida indireta das distâncias. Noções sobre deslocamentos elementares do plano; translação e rotações de figuras [...] Linhas proporcionais; linhas proporcionais no triângulo. Semelhança: homotetia. Relações métricas no triângulo. Relações métricas no círculo. Média proporcional".
>
> Evidentemente não se encontra no programa italiano este absurdo do programa da nossa 2ª série: "Razões entre os lados de um triângulo. Seno, cosseno e tangente de ângulo agudo. Uso de tabelas de senos, cossenos e tangentes naturais!"

E concluía:

> De maneira que o programa de matemática dos cinco anos de ginásio italiano é cerca da metade do programa das nossas três primeiras séries [...]
>
> Não sei o que dirão os autores dos nossos mirabolantes programas diante do confronto que acabamos de fazer.
>
> São 80 por cento dos candidatos às Escolas Superiores da Itália que se submetem, em um curso secundário de oito anos, a um programa de matemática muito mais reduzido que o programa do nosso curso fundamental!
>
> E notemos bem que essa medida é preconizada pelos pedagogos de um país que, quanto à cultura da matemática, está à altura da França e da Alemanha.
>
> (Vieira, 1936b, pp. 264-5 e 268.)

As críticas de Arlindo Vieira à prematura especialização, ao excesso de conteúdos, ao "fusionismo" das várias áreas da Matemática estavam, sem dúvida, associadas a uma concepção disciplinar de educação, segundo a qual a maior importância da Matemática estaria em seu poder de desenvolver a memória e a razão.

Mas, além das concepções, havia por trás dessas críticas uma necessidade de ordem mais prática. Era necessário recolocar o Latim no "lugar que lhe compete". Afinal, a parte do ensino fundamental da Reforma Campos reservaria ao Latim apenas três aulas semanais nas duas últimas séries, enquanto para a Matemática, a matéria com maior número de horas, eram destinadas três aulas semanais em todas as cinco séries. Para que o Latim pudesse ocupar um espaço maior, seria, portanto, necessário diminuir o espaço reservado a outras matérias. Unindo esses dois elementos, Arlindo Vieira apresentou a seguinte proposta:

> Quais as medidas urgentes que devem ser tomadas? Não se trata aqui de consertar o que não tem conserto, mas tão-somente de tornar menos prejudicial o programa do curso fundamental.
>
> Quanto à matemática, o programa deve ser, não só simplificado, mas refundido completamente [...]
>
> Na 1ª e 2ª séries não deve haver mais que a Aritmética. O programa de Álgebra da 5ª série, derivadas, desenvolvimento em série, etc., deve ser excluído do curso fundamental. Tudo isso é

pura perda de tempo. Os alunos, quase sem exceção, não compreendem nada. O programa de Álgebra e Geometria das 2ª, 3ª e 4ª séries deverá ser gradualmente desenvolvido nas três últimas séries com algumas noções muito elementares de Trigonometria.

(Vieira, 1936b, p. 372.)

As críticas à proposta não vinham, entretanto, apenas dos defensores das línguas clássicas, mas, também, de professores de Matemática que defendiam a Matemática clássica, no estilo euclidiano. O seguinte fragmento de um artigo de Almeida Lisboa, professor do Colégio Pedro II — ou seja, colega de Euclides Roxo —, mostra-nos claramente essa forte oposição encontrada pela proposta de modernização:

A Matemática desapareceu do ensino secundário. Eis o triste resultado do que se chama enfatuadamente "a moderna orientação do ensino de matemática", e *é apenas uma orientação brasileira,* atestando a nossa incompetência pedagógica. *As verdadeiras demonstrações, os raciocínios perfeitos, o rigor e a lógica da ciência, tudo o que faz a beleza e a imensa utilidade da matemática foi abolido do ensino oficial.*

Nos programas oficiais brasileiros, não há mais nem teoria, nem rigor matemático.

Reduziu-se tudo a uma pequena coleção de receitas. E o aluno que aprendeu uma delas e resolveu um desses problemas para jardineiros, não sabe tratar outros análogos, que só diferem do primeiro por insignificantes modificações: desconhece a teoria que lhe mostraria o caminho seguro para atingir a solução procurada. Estudou curiosidades; não sabe matemática e não raciocina [...]

"Os livros [didáticos] que obedecem a esta falsa diretriz são simples inventários de fatos isolados, de exercícios infantis, de noções erradas, livros que envenenam a mocidade em vez de lhe inspirar o amor da ciência e o hábito do estudo [...]

Os que pretendem realmente aprender nada encontram nessas páginas vazias [...]

Em geral, *os autores que seguem os atuais programas oficiais, tomaram por modelo livros americanos ou alemães, para escolas profissionais elementares.* E é isso que impingem, no Brasil, aos estudantes do curso secundário!"

(Apud Vieira, 1936a, pp. 208-9, grifo nosso.)

Essas palavras do professor Lisboa ao mesmo tempo que nos mostram a sua clara posição em defesa do ensino da Matemática clássica, do estilo euclidiano, da concepção de disciplina mental, evidenciam alguns argumentos utilizados pela crítica ao movimento modernizador que merecem ser mais bem analisados.

O primeiro deles diz respeito à ligação existente entre as idéias modernizadoras da Matemática e as escolas profissionais.

Sem dúvida alguma, a proposta de modernização vinculava-se à necessidade de se estabelecer uma melhor articulação entre o ensino das escolas técnicas e o das escolas secundárias.

Essa necessidade decorria das novas exigências impostas pelo contexto sócio-político-econômico, que impunha uma nova formação para todos os estudantes, capaz de apresentar alguns elementos aplicados e conteúdos mais modernos. Além disso, os novos estudos psicopedagógicos desenvolvidos, que também influenciaram o movimento, mostravam que os estudos formais deviam acontecer apenas após um trabalho intuitivo com os conceitos. Esses dois aspectos acabaram por determinar uma mudança nos livros-textos, que se tornaram mais aplicados e intuitivos. O uso de alguns livros com essas características, usados em escolas profissionais, não era, portanto, um motivo de "rebaixamento" do ensino, mas, ao contrário, uma tentativa de adaptação às novas exigências. O livro de Clairaut é um exemplo disso. Num primeiro momento, como o próprio autor havia previsto, ele seria utilizado em escolas técnicas e, depois, com o movimento de modernização, serviria de base para as novas propostas de ensino.

Um segundo argumento levantado por Lisboa que merece destaque é o de que a orientação modernizadora seria apenas brasileira.

Essa tese, entretanto, não nos parece válida, uma vez que o movimento modernizador do ensino de Matemática teve influência na programação pedagógica e a alterou em vários países. Nossa afirmação continua válida, mesmo se, no momento da aplicação dessa proposta no Brasil, alguns países não houvessem ainda mudado seus programas ou, mesmo, já os tivessem alterado, eliminando alguns aspectos modernizadores. O que poderíamos considerar como "apenas brasileira" era a forma como essas idéias foram concretizadas em nosso país.

Outras críticas mais específicas feitas à proposta de modernização foram rebatidas por Euclides Roxo, especialmente em seu livro *Matemática na escola secundária*.

É difícil avaliar até que ponto as idéias modernizadoras conseguiram alterar a fisionomia do ensino de Matemática das escolas secundárias brasileiras. Apenas podemos afirmar que a partir desse momento alguns elementos novos começaram a penetrar nesse ensino.

Considerações finais

O Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática, ocorrido nos primeiros anos de nosso século, tinha como um de seus objetivos a diminuição do descompasso existente entre os estudos científicos e tecnológicos e o ensino de Matemática desenvolvido nas escolas de nível médio; particularmente naquelas do tipo secundário, as únicas que davam acesso à universidade.

Com relação à descontinuidade existente, assim se manifestou Felix Klein, o maior defensor da modernização:

> Essa [...] descontinuidade não tem trazido vantagens nem para a escola nem para a universidade; por isso, agora é feito um grande esforço para eliminá-la completamente, procurando, de um lado, embeber, por assim dizer, o ensino das escolas com as idéias ajustadas ao moderno desenvolvimento da ciência e da cultura geral, e tendo em conta, de outra parte, as necessidades dos professores do ensino universitário.
>
> (Klein, 1927, v. 1, p. 1-2. Trad. da autora.)

Esse Movimento consistiu na primeira tentativa de romper com o ensino de Matemática "tradicional", "antigo", "velho", que era ensinado na escola secundária.

A "modernização" proposta naquele momento, entretanto, estava ligada a uma "moderna matemática", que surgiu no momento em que um novo contexto sócio-político-econômico começou a exigir "um estudo mais rigoroso do movimento, um estudo *quantitativo*, que permitisse *medir* e *prever*" (Caraça, 1978, p. 199, grifo do autor).

Essa Matemática seria considerada "nova ou moderna", porque representava a superação dos limites estabelecidos pela "antiga" Matemática grega.

Apesar das grandes contribuições da Matemática grega (dentre elas, a valorização do raciocínio lógico, o surgimento da demonstração dedutiva e a crença de que o mundo físico poderia ser descrito em termos matemáticos), ela trouxe também algumas limitações para os estudos matemáticos. Dentre esses problemas, que resistiram durante séculos, podemos citar:

- a incapacidade de conceber o conceito de variável e, portanto, o de função;
- o abandono do estudo quantitativo dos fenômenos naturais e o refúgio nas concepções qualitativas;
- o primato da figura sobre o número;
- a separação da geometria e da aritmética;
- a exclusão na geometria de tudo que lembrasse o movimento, o mecânico e o manual;
- um conceito limitado de curva, restrito à reta, circunferência e cônicas;
- a tendência de fugir a tudo que viesse ligado às concepções quantitativas e dinâmicas, em particular a um estudo quantitativo do conceito de infinito (Caraça, 1978, p. 197).

A "moderna matemática", que nasceu associada ao desenvolvimento da ciência moderna, foi uma ferramenta importante para a explicação dos fenômenos da natureza, ou seja, um elemento fundamental para a formação, comprovação e generalização de resultados observados pela experiência. Dessa forma, representou a união da Matemática prática com a teórica, ou seja, da parte da Matemática que havia sido desvalorizada pelo pensamento grego[11] com aquela que seria a sua maior contribuição.

Essa nova Matemática, que se iniciou com Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), forneceu os elementos básicos para os futuros desenvolvimentos tanto da Matemática pura quanto da aplicada, tinha como centro o conceito de lei quantitativa, ou de função, valorizou o aspecto quantitativo, as ligações entre geometria, aritmética e álgebra, o conceito de movimento, as aplicações práticas, etc.

Nesse sentido, podemos dizer que foi a partir desse Primeiro Movimento que começaria a ser dado o alerta "Abaixo Euclides".

Realmente, esse alerta pode ser percebido na análise dos *Elementos*, de Euclides, feita por Felix Klein, na parte relativa à geometria de seu livro *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Segundo ele, tal análise se justificava pela existência do que chamaria de "culto a Euclides", o qual era um forte empecilho à entrada das idéias modernas nas escolas. Em relação às aplicações práticas, cuja introdução nas escolas foi um dos pontos defendidos pelos modernizadores e que eram consideradas por Euclides "como algo manual e impróprio para a ciência", Klein teceu o seguinte comentário:

[11] Essa afirmação é feita considerando a posição predominante entre os matemáticos gregos, em sua maioria da escola platônica, e o fato de que foi essa posição que influenciaria durante séculos o pensamento ocidental. É claro, entretanto, que alguns matemáticos gregos se interessavam pelas questões práticas. O mais importante deles foi, sem dúvida, Arquimedes (c. 287-212 a.C.), que, apesar de encontrar vários de seus resultados de maneira prática, acabou apresentando-os "de acordo com mais estritas exigências de rigor" (Struik,1989, p. 95).

> Desgraçadamente essa maneira de pensar está ainda bastante difundida, e até hoje existem professores da universidade que não concedem bastante importância às aplicações, considerando-as coisa acessória. Contra tão orgulhosa opinião deve-se lutar sem trégua [...]. Os maiores matemáticos, como Arquimedes, Newton e Gauss, abarcaram igualmente a teoria e a prática.
>
> (Klein, 1931, v. 2, p. 254. Trad. da autora.)

As propostas modernizadoras apresentadas, entretanto, podem ser consideradas tímidas, quando comparadas ao desenvolvimento da Matemática daquele período, que já se encontrava num novo momento de mudança, ou seja, no da fundamentação dos resultados obtidos pelas experimentações dos séculos XVII e XVIII.

Os representantes do movimento, no entanto, em sua maior parte importantes matemáticos, tinham plena consciência disso. Apesar disso, percebiam que o descompasso existente era muito grande e que os elementos básicos daquela "nova matemática" eram fundamentais para iniciar o processo de adequação da escola secundária aos últimos avanços científicos e tecnológicos e, especialmente, ao ensino desenvolvido nos cursos superiores.

A proposta era introduzir não os últimos avanços da Matemática na escola secundária, mas sim alguns elementos mais atuais nesse nível de ensino, procurando, ao mesmo tempo, abrir espaço nos cursos superiores para o desenvolvimento de outros estudos.

A introdução do conceito de função, elemento unificador dos vários ramos da Matemática, já representava uma tentativa de adequação aos estudos mais recentes que tinham como uma de suas características fundamentais o rompimento da barreira existente entre os campos matemáticos.

Nesse sentido, esse movimento estava de certa forma preparando terreno para o Movimento da Matemática Moderna.

Contudo, esses primeiros modernizadores, apesar de não deixarem de valorizar os estudos teóricos, percebiam certo "perigo" na introdução de determinados conceitos muito modernos e abstratos na escola secundária.

Felix Klein, por exemplo, que defendia o estudo dos grupos no nível superior e chegou até a acenar com a possibilidade de serem introduzidas as transformações no ensino da geometria da escola secundária (que, para ele, não representavam nada mais que "uma generalização do conceito de função"), com relação à introdução dos conceitos da teoria dos conjuntos, fez muitas restrições. Após colocar-se a questão de como servir-se da teoria dos conjuntos no ensino médio, ele respondeu:

Do nosso ponto de vista pedagógico-matemático, naturalmente, a resposta deve ser absolutamente negativa, pois não devem ser dadas inicialmente ao aluno coisas demasiado abstratas e difíceis. Para precisar melhor a minha opinião a esse respeito, tenho de recordar a *lei fundamental biogenética*, segundo a qual o indivíduo em seu desenvolvimento percorre em rápida sucessão todos os estágios do desenvolvimento da espécie [...] Este princípio, creio eu, deveria ser seguido também, ao menos em suas linhas gerais, no ensino da matemática da mesma forma que em qualquer outro ensino; *a juventude deveria ser conduzida, tendo em conta a sua natural capacidade e disposição, lentamente, até chegar às matérias elevadas e, finalmente, às formulações abstratas, seguindo o mesmo caminho que a humanidade tem ascendido desde seu estado primitivo aos altos cumes do conhecimento científico.* Nunca se repetirá isso o bastante, pois sempre existem pessoas que, à maneira dos escolásticos da Idade Média, iniciam o ensino com as idéias mais gerais e querem justificar esse método como o "único científico". E, sem dúvida, tal coisa não tem sido nunca certa: *ensino científico só pode ser chamado aquele que conduz o homem a pensar cientificamente, mas de modo algum é aquele que desde o princípio oferece-lhe uma sistemática fria, embora muito acabada cientificamente.*

(Klein, 1927, pp. 399-400, grifo do autor. Trad. da autora.)

O Primeiro Movimento Internacional para a Modernização representou a primeira tentativa, organizada e envolvendo vários países, de reformular um ensino de Matemática existente havia séculos. Mesmo não existindo uma intenção inicial nesse sentido e, também, uma proposta única, algumas diretrizes que foram por ele estabelecidas influenciaram as futuras discussões sobre a Educação Matemática em diferentes países.

Apesar disso, as mudanças ocorridas durante as primeiras décadas de nosso século não chegaram a produzir os efeitos esperados.

O descompasso existente entre os últimos avanços científicos e tecnológicos e a Matemática ensinada nas escolas de nível médio seria intensificado e este seria novamente um dos mais fortes argumentos utilizados pelos defensores do Movimento da Matemática Moderna para justificar a necessidade de "modernização" dos conteúdos matemáticos desenvolvidos naquele nível de ensino, como podemos confirmar pelas seguintes palavras, extraídas da introdução do livro *La enseñanza de las matemáticas modernas*:

Apenas recolhemos a opinião, bastante espalhada, de que essa reforma [Movimento da Matemática Moderna] constitui uma tentativa de encontrar uma solução para as tensões que se apresentam, já há algum tempo, entre um ensino das matemáticas praticamente petrificado [...] e algumas ciências (em particular, as próprias matemáticas) em desenvolvimento, que utilizam ferramentas novas [...], além de uma tecnologia em plena expansão, com os resultados espetaculares que todos conhecemos.

(Hernández, in Piaget et al., 1986, pp. 15-6. Trad. da autora.)

Essa "moderna Matemática", que começava a ter aplicações práticas na ciência e na técnica e que já havia "impregnado" os estudos universitários, estava "há séculos de distância" daquela ensinada no nível médio. Era, portanto, necessário, como forma de garantir uma certa "continuidade" entre esses dois níveis de ensino, que fossem introduzidos nas escolas de nível médio alguns aspectos "modernos" da Matemática.

A nova preocupação em modernizar o ensino de Matemática, entretanto, teria sido originalmente motivada por acontecimentos ocorridos fora do campo científico-tecnológico, mas a ele totalmente vinculados.

Nos Estados Unidos, por exemplo, onde já eram perceptíveis os problemas existentes com relação ao ensino de Matemática, essa preocupação teria se manifestado mais fortemente durante a Segunda Guerra Mundial, uma vez que os soldados americanos apresentavam tão alto grau de deficiência com relação à Matemática, que o governo foi obrigado a fornecer cursos especiais, como forma de amenizar a situação.

Durante os primeiros anos da década de 50 vários projetos começaram a ser desenvolvidos, tendo em vista a melhoria do ensino secundário, especialmente por meio da adequação à realidade da universidade e aos avanços tecnológicos.

Mas foi um fato não ligado diretamente à situação escolar dos Estados Unidos que acabou acelerando as propostas pedagógicas americanas e desencadeando um movimento internacional de modernização.

O lançamento, em 1957, do primeiro foguete soviético — o Sputnik — levou o governo americano a tomar consciência de que, para resolver o problema da clara desvantagem tecnológica existente em relação aos russos, era necessário repensar o ensino de Matemática e o de Ciências. Com esse objetivo, e através da abertura de financiamentos, incentivou a criação de grupos nacionais para estudar novas propostas de currículo para a escola média.

Em 1959, a Organização Européia de Cooperação Econômica, a OECE, preocupada com uma melhor qualificação do pessoal técnico-científico de seus países membros, organizou uma Conferência Internacional em Royaumont. Durante duas semanas, especialistas de vinte países discutiram propostas de mudança para o ensino de Matemática da escola de nível médio.

Nessa conferência, em que foram estabelecidas as bases do Movimento da Matemática Moderna, Jean Dieudonné justificou a necessidade de modernização da seguinte forma:

> Já no século passado se considerava a passagem das matemáticas da escola secundária às da universidade como um salto a um mundo diferente. Com a introdução das matemáticas modernas, esse fosso tem aumentado muito [...] Recentemente, têm sido introduzidos nos últimos programas dos três anos da escola secundária superior (das escolas francesas) os elementos de cálculo diferencial e integral, de álgebra vetorial e de geometria analítica, mas esses temas são sempre relegados a um segundo plano, e o interesse se concentra em primeiro lugar na geometria pura ensinada, mais ou menos, à maneira de Euclides, com um pouco de álgebra e de teoria de números. Estou convencido que o tempo deste "trabalho remediado" já passou e que deveríamos pensar em uma reforma muito mais profunda, a menos que se deixe piorar a situação até o ponto de comprometer seriamente cada progresso científico ulterior. Se eu quiser resumir em uma frase todo o programa que tenho em mente, tenho de pronunciar o *slogan*: Abaixo Euclides!
>
> (Dieudonné, apud Castelnuovo, 1975, p. 49. Trad. da autora.)

Como podemos perceber por essas palavras de Dieudonné, a proposta de modernização pretendia "revolucionar" o ensino de Matemática no nível médio, por meio da introdução de aspectos da "moderna Matemática", ou seja, da Matemática mais recente, mais atual, mais nova, que estava sendo desenvolvida nas últimas décadas, e pela eliminação de conteúdos tradicionais.

Essa "moderna Matemática" havia surgido no início de nosso século, embora estivesse em estado embrionário desde o século XIX.

A sua origem estava ligada à necessidade de uma maior reflexão e fundamentação acerca dos vários conceitos e teorias novas que haviam surgido durante o longo período de experimentação dos estudos matemáticos, especialmente daqueles ligados à mecânica e à astronomia, ocorridos nos séculos XVII e XVIII.

Esses estudos de fundamentação acabaram provocando uma mudança radical de orientação na Matemática, que levou a um distanciamento da prática e a uma acentuada separação entre Matemática pura e Matemática aplicada.

Essa mudança de orientação dos estudos matemáticos já no século XIX foi percebida por Jacobi (1804-1851), que fez o seguinte comentário sobre a "antiga" posição de Fourier (1764-1830), ainda representativa do ponto de vista utilitário no século XVIII:

É verdade que o Senhor Fourier tinha a opinião de que o principal objetivo das matemáticas era a utilidade pública e a explicação dos fenômenos naturais; mas um filósofo como ele deveria saber que o único fim da ciência é a honra do espírito humano e que, deste ponto de vista, uma questão relacionada com números é tão importante como uma questão relacionada com o sistema do mundo.

(Apud Struik, 1989, p. 226.)

A "moderna Matemática" apresentava alto nível de generalidade, elevado grau de abstração e maior rigor lógico. Podendo ser identificada com as estruturas e a axiomatização, ela surgiu com o desenvolvimento dos três ramos seguintes:

1 — as extensões da noção de número e o aparecimento da álgebra "abstrata";

2 — o nascimento das geometrias não euclidianas de Gauss, Lobatchevski e Bolyai, seguido mais tarde pelas axiomatizações da geometria de Euclides realizadas por Pasch, Peano e sobretudo Hilbert (1899);

3 — o desenvolvimento da lógica, com a publicação da famosa obra de Boole em 1854 e as contribuições, dentre outros, de Frege e Peano, para culminar no monumental tratado de Russell e Whitehead.

(Hernández, in Piaget et al., 1986, p. 20. Trad. da autora.)

O desenvolvimento dessa "moderna Matemática", cada vez mais distante da antiga concepção de Matemática como ciência da quantidade, culminou com os trabalhos de Nicolas Bourbaki[12], cujo objetivo central consistia na exposição de toda a Matemática de forma axiomática e unificada, em que as estruturas seriam os elementos unificadores.

Os trabalhos de Bourbaki, ou seja, o estágio mais avançado dos estudos matemáticos, orientaram as propostas do Movimento da Matemática Moderna, reforçada por estudos psicológicos contemporâneos, especialmente pelos de Jean Piaget.

[12] Nicolas Bourbaki foi um nome fictício escolhido por um grupo de matemáticos, na maioria franceses; dentre eles, Cartan, Chevalley, Dieudonné, Weil, que tinham a intenção de apresentar toda a Matemática de seu tempo em uma obra intitulada *Élements de mathématique*. O primeiro volume dessa obra apareceu em 1939. Cf. Boyer, 1974, pp. 457-8, Hernández, in: Piaget et al., 1986, p. 27, e Eves, 1995, p. 691.

Esse novo movimento pode, por um lado, ser considerado uma continuidade em relação ao movimento anterior, uma vez que ambos tinham como objetivo inicial diminuir o descompasso existente entre o ensino de Matemática do curso médio e o do curso universitário; este se ligava diretamente aos últimos avanços da Matemática, enquanto aquele se mantinha baseado, quase exclusivamente, na Matemática grega. Portanto, de maneiras diferentes, os dois movimentos tinham como pressuposto básico o *slogan* defendido por Jean Dieudonné, durante a conferência de Royaumont: Abaixo Euclides! Por outro lado, cada um encontrou formas bastante diferenciadas, até mesmo opostas, para operacionalizar esse pressuposto. O movimento reformador do início do século procurou na intuição e nas aplicações da Matemática a outras áreas do conhecimento os elementos fundamentais para a elaboração de sua proposta, elegendo o conceito de função como o elemento unificador. O Movimento da Matemática Moderna, entretanto, apresentou uma proposta baseada exclusivamente na moderna Matemática em sua forma axiomática desenvolvida pelo grupo Bourbaki, na qual os elementos essenciais eram os conjuntos, as relações e as estruturas.

Ao contrário do primeiro movimento, as propostas do Movimento da Matemática Moderna, reforçadas pelos estudos psicológicos de Jean Piaget e tendo o incentivo de vários governos, propagaram-se "como um rastilho de pólvora por todo o mundo" (Santaló, 1979, p. 41). Os únicos países que não chegaram a adotar um programa de acordo com essa orientação foram a Itália e os ligados à antiga União Soviética (Castelnuovo, 1989b, p. 28).

No Brasil, as questões relativas ao ensino de Matemática começaram a ser discutidas com maior intensidade pelos professores durante a década de 50, devido especialmente à realização dos primeiros Congressos Nacionais de Ensino da Matemática.

O primeiro desses congressos realizou-se em 1955, na cidade de Salvador-BA, por iniciativa da Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia. Seu objetivo principal era a discussão dos problemas relacionados ao ensino da Matemática. Estiveram presentes 115 professores, sendo 103 da Bahia e alguns representantes de instituições de outros Estados: Distrito Federal, São Paulo, Rio Grande do Sul, Espírito Santo, Pernambuco e Rio Grande do Norte.

Nesse congresso ainda estavam presentes algumas das idéias propostas pelo movimento de modernização do início do século. A busca da articulação entre as várias áreas da Matemática, entre a Matemática e outras ciências e a importância de se considerarem elementos da história da Matemática em seu ensino foram algumas delas. Além disso, Euclides Roxo, Felix Klein e outros representantes daquele movimento ainda foram bastante citados. Os elementos considerados "modernos" diziam respeito, especialmente, ao uso do estudo dirigido em Matemática. O Congresso recomendou o seu uso, levando em consideração as experiências que estavam sendo realizadas, com excelentes resultados, em colégios de aplicação.

Com relação ao programa, foi aprovada uma proposta que tentava "articular" as várias áreas e eliminar alguns temas considerados desnecessários. Durante as discussões manifestou-se claramente a preocupação dos professores em participar mais diretamente da elaboração dos programas. Além disso, existia a preocupação em evitar mudanças radicais. Essa intenção foi explicitada nos anais, quando, ao final da apresentação do programa, foi dito que o Congresso organizou "um programa analítico, moldado nas diversas tendências manifestadas e que mais se aproximassem *do atual programa em vigor*, em virtude das graves dificuldades que se originam no ensino quando se efetuam transformações radicais" (Anais, Salvador, p. 24, grifo do autor).

A importância do aprofundamento das discussões sobre nossas reais condições era outro elemento defendido pelo Congresso. Em seu discurso de abertura, a professora Marta Maria de Souza Dantas, secretária-geral do Congresso, assim se manifestou com relação a esse aspecto:

> Quanto aos programas, devemos fugir, por certo, das reformas que deformam. Uma reforma não se faz num dia: reformar o que está mal feito, sem estudar-lhe realmente a estrutura e sem conhecer nossas necessidades reais, seria talvez piorar.
>
> Que se processem, no Brasil, reformas realmente baseadas no resultado da pesquisa das nossas condições, para que se possam alcançar, com segurança, os objetivos delineados. Deixemos de copiar o estrangeiro porque não podemos copiar o clima, a raça, as condições sociais, a formação. Sintamos melhor as nossas necessidades, não trancados em gabinetes de trabalho, como técnicos sem alma, e, sim, nesse contato humano que deve existir entre mestre e aluno.
>
> (Anais, Salvador, 1957, p. 263.)

No segundo e terceiro Congressos, realizados em 1957 e 1959, respectivamente em Porto Alegre e no Rio de Janeiro, percebe-se claramente uma ampliação da participação dos professores. Além do aumento quantitativo de representantes, 240 no segundo Congresso e 500 no terceiro, ampliou-se a participação dos Estados. No terceiro Congresso estiveram representados 18 Estados brasileiros. As maiores participações foram do Distrito Federal, com 182 professores, e de São Paulo, com 92 professores. Outros elementos indicam que a crescente participação dos professores nos Congressos acabou propiciando condições para a busca de outros fóruns de debate e de uma organização nacional de professores. Esses elementos são as propostas de criação de Círculos de Professores de Matemática e de uma Associação Brasileira dos Professores e Pesquisadores de Matemática e a proposta de realização de Congressos Estaduais de Professores de Matemática.

Nestes Congressos encontramos também as primeiras manifestações das idéias defendidas pelo Movimento Internacional da Matemática Moderna. Na tese "Sugestões para Programas em Curso de Aperfeiçoamento de Professores Primários", apresentada por Odila Barros Xavier e Aurora U. P. de Azevedo, no II Congresso, e baseada em experiências desenvolvidas pelas autoras em cursos de especialização para professores primários, encontramos a proposta de um programa de Matemática no qual os números seriam estudados através de sua evolução histórica. Nessa proposta foram contemplados vários elementos da Matemática moderna: conjunto — seu significado e sua importância na Matemática —, definições e propriedades das operações da aritmética, a ampliação dos conjuntos por meio das impossibilidades operatórias. As justificativas baseavam-se em autores como Piaget e Gattegno.

Em outras apresentações podemos perceber claramente a introdução das idéias dos modernizadores nas propostas e discussões sobre as mudanças necessárias para o ensino brasileiro da Matemática. São exemplos dessa influência a introdução, no curso secundário, da feição moderna da Matemática, a ênfase no estudo das propriedades para facilitar a compreensão das estruturas algébricas, a citação de autores como André Lichnerowicz, André Weil e Sauders Mac Lane, a sugestão de experimentação no ensino com os novos elementos. Apesar disso, nota-se cautela com a introdução desses novos elementos: é necessário realizar experiências na escola secundária, aprofundar a discussão, estudar as obras de autores que dão suporte ao movimento, introduzir nos currículos das Faculdades de Filosofia o espírito da Matemática moderna, oferecer cursos de preparação à Matemática moderna para professores de nível médio.

Apesar de as novas idéias terem sido apresentadas e discutidas nesses dois congressos, não seriam eles que desencadeariam o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Isso seria conseguido, especialmente, por meio das atividades desenvolvidas pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática — GEEM —, fundado em outubro de 1961, por professores do Estado de São Paulo, tendo como principal representante Osvaldo Sangiorgi.

Após o primeiro contato com a proposta modernizadora desenvolvida nos Estados Unidos, durante sua participação em um seminário em Kansas, o professor Osvaldo Sangiorgi tomou a iniciativa de propor a realização de um curso de aperfeiçoamento para professores, cujo objetivo fundamental era a introdução da Matemática moderna. Esse curso foi ministrado por professores da USP, do Mackenzie e pelo professor George Springer, da Universidade de Kansas. Realizado durante os meses de agosto e setembro de 1961 pela Universidade Mackenzie, recebeu a colaboração da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e da National Science Foundation. Com o encerramento do curso e a percepção dos participantes da necessidade de aprofundar os estudos sobre a Matemática moderna e de divulgá-la para outros professores, foram criados os elementos fundamentais para a proposta de organização do GEEM.

Durante o IV Congresso Nacional de Ensino da Matemática, realizado em Belém-PA, em 1962, o GEEM levou alguns exemplos de trabalhos bem-sucedidos com a Matemática moderna e apresentou uma proposta de programa para a escola secundária, orientado pelas idéias modernizadoras.

O V Congresso Nacional — coordenado pelo GEEM, em 1966, no Centro Técnico da Aeronáutica em São José dos Campos-SP — esteve dirigido especialmente à Matemática moderna. Foram realizadas sessões de estudos sobre várias áreas da Matemática moderna superior, conferências sobre vários aspectos relacionados à Matemática moderna e a seu ensino, aulas-demonstração sobre temas específicos de primeiro e segundo graus, comunicações — em sua maior parte de experiências realizadas com a Matemática moderna —, exibição de filmes sobre temas relacionados ao ensino de primeiro e segundo graus e exposição de material didático para o ensino moderno de Matemática. Nesse Congresso houve, pela primeira vez, a participação de vários professores estrangeiros: Marshall Stone, dos Estados Unidos, George Papy, da Bélgica, Hector Merklen, do Uruguai, e Helmuth Völker, da Argentina.

O "espírito da Matemática moderna" presente no V Congresso veio apenas reforçar a difusão das idéias modernizadoras que, especialmente por meio dos cursos organizados pelo GEEM — com o apoio do MEC e da Secretaria de Estado — e da publicação dos primeiros livros didáticos de acordo com essa nova orientação, a partir da primeira metade da década de 60, desencadearam um processo de implantação da Matemática moderna nas escolas brasileiras.

Os trabalhos e discussões relativos à Matemática moderna, entretanto, não ficaram restritos ao GEEM. Outros grupos de estudo foram sendo criados e vários projetos elaborados e aplicados. Dentre eles, podemos destacar o GEEMPA — Grupo de Estudos de Ensino da Matemática de Porto Alegre —, o NEDEM — Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática de Curitiba —, o GEPEM — Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do Rio de Janeiro — e o grupo coordenado pelo professor Omar Catunda na UFBA.

Em nenhum outro momento o ensino da Matemática foi tão discutido, divulgado e comentado como naquele período. Os jornais noticiavam, os professores faziam cursos, os livros didáticos multiplicavam-se, os pais assustavam-se e os alunos "aprendiam" a Matemática moderna.

A organização da Matemática moderna baseava-se na teoria dos conjuntos, nas estruturas matemáticas e na lógica matemática. Esses três elementos foram responsáveis pela "unificação" dos campos matemáticos, um dos maiores objetivos do movimento. Para isso, enfatizou-se o uso de uma linguagem matemática precisa e de justificações matemáticas rigorosas. Os alunos não precisariam "saber fazer", mas, sim, "saber justificar" por que faziam. A teoria dos conjuntos, as propriedades estruturais dos conjuntos, as relações e funções, tornaram-se temas básicos para o desenvolvimento dessa proposta.

No entanto, a Matemática moderna não conseguiu resolver o problema do ensino da disciplina. Ao contrário, agravou ainda mais a situação. Já no início do movimento, alguns professores, como Carlos B. Lyra e Omar Catunda, alertaram para os riscos de um enfoque centralizado apenas na linguagem. Apesar desses alertas iniciais, foi exatamente esse o caminho percorrido pela Matemática moderna em nossas escolas. Como nos diz Lopes:

> Embora não fizessem uso da bola de cristal, os professores Lyra e Catunda acertaram na mosca. A Matemática moderna descambou, via livro didático, para a ênfase exagerada à simbologia da Teoria dos Conjuntos.
>
> (Lopes, 1988, p. 42.)

Nos primeiros anos da década de 70, pesadas críticas ao movimento começaram a aparecer. René Thom e Morris Kline são alguns dos que combateram os exageros cometidos por muitas das propostas desenvolvidas em vários países. No Brasil, essas críticas se intensificaram a partir da segunda metade da década.

Entretanto, nesse momento, talvez devido à forte penetração que o movimento tinha alcançado na prática, as propostas de modificação aconteceram de forma lenta e paulatina.

Apesar de diferentes, as posições assumidas pelos dois movimentos de modernização da Matemática ocorridos no nosso século influenciaram profundamente o ensino da disciplina daquele momento em diante. Ainda hoje, podemos perceber a presença de suas idéias não apenas nas discussões teóricas sobre o assunto, mas também na prática da Educacão Matemática.

Bibliografia

Aaboe, A. *Episódios da história antiga da matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

Abreu, J. *A educação secundária no Brasil: ensaio de identificação de suas características principais.* Rio de Janeiro: MEC/INEP, 1955.

Aguayo, A. M. *Didática da escola nova.* São Paulo: Nacional, s/d.

Albuquerque, I. de. *Metodologia da matemática.* Rio de Janeiro: Conquista, 1964.

Almeida, A. F. de. *História do ensino secundário no Brasil.* Rio de Janeiro: Typographia Baptista de Souza, 1936.

Almeida, J. R. P. de. *História da instrução pública no Brasil, 1500 a 1889.* São Paulo: EDUC; Brasília: INEP/MEC, 1989.

Aragão, R. M. de. *A instrução pública no Brasil.* Rio de Janeiro: Editora da Fundação Getúlio Vargas, 1985.

Ashursi, F. G. *Fundadores de las matemáticas modernas.* Madrid: Alianza, 1985.

Associação Brasileira de Educação. *O problema brasileiro da escola secundária.* Rio de Janeiro, s/d.

Azevedo, F. de. *A transmissão da cultura.* São Paulo: Melhoramentos/Instituto Nacional do Livro, 1976.

Backheuser, E. *A aritmética na "Escola Nova" (A nova didática da aritmética).* Rio de Janeiro: Livraria Católica, 1933.

Bernal, J. D. *Ciência na história.* Lisboa: Livros Horizonte, 1969. 6 v.

Bezerra, M. J. *O material didático no ensino da matemática.* 2ª ed. Rio de Janeiro: MEC/C.A.D.E.S., 1962.

Bicudo, J. C. *O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação (de 1931 a 1941, inclusive).* São Paulo: [s. n.], 1942.

Blanché, R. *A axiomática.* Lisboa: Presença,1987.

______. *A epistemologia.* Lisboa: Presença, 1988.

Boyer, C. B. *História da matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Brasil, Ministério da Educação e Saúde. *Ensino secundário no Brasil: organização, legislação vigente e programas.* Rio de Janeiro: INEP, 1952. Publicação nº 67.

Brasil, Ministério da Educação e Cultura. *Introdução ao estudo do currículo da escola primária.* Rio de Janeiro: INEP/CILENE/Irmãos Di Giorgio & Cia., 1955.

Brock, W. H. e Price, M. H. Squared paper in the nineteenth century: instrument of science and engineering, and symbol of reform in mathematical education. In: *Educational Studies in Mathematics,* v. 11, 1980, pp. 365-81.

Bürigo, E. Z. *Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da* *ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60.* FE/UFRGS, 1989. Dissertação de Mestrado.

_______. Matemática moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros nos anos 60. In: *Teoria & Educação*, 2, 1990, pp. 255-65.

BUTLER, C. H. et al. *The teaching of secondary mathematics.* EUA: McGraw-Hill Book Company, 1970.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: [s. n.], 1978.

CARMO, M. P. Considerações sobre o ensino da matemática. In: *Revista de Ensino de Ciências,* nº 2, fev. 1981.

CARR, E. H. *Que é história?* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1982.

CARVALHO, J. B. P. As idéias fundamentais da matemática moderna. In: *Boletim GEPEM,* ano XIII, nº 23, 2º semestre, 1988.

CASTELNUOVO, E. *Didáctica de la matemática moderna.* México: Trillas, 1975.

_______. *Geometría intuitiva.* Barcelona: Labor, 1966.

_______. The teaching of geometry in italian high schools during the last two centuries: some aspects related to society. In: *Mathematics, Education, and Society.* Paris: UNESCO, 1989a. Science and Technology Education Document Series, nº 35. Division of Technical and Environmental Education.

_______. Panorama de la enseñanza matemática en el tiempo y en el espacio. In: *Educación Matemática,* v. 1, nº 3, Diciembre 1989b.

CASTRO, F. M. de Oliveira. *A matemática no Brasil.* Campinas: Editora da UNICAMP, 1992.

CHACE, A. B. The Rhind mathematical Papyrus. Printed in the United States of America: The National Council of Teachers of Mathematics.

CHÂTEAU, J. (org.). *Los grandes pedagogos.* México: Fondo de Cultura Económica, 1992.

CLAIRAUT, A. C. *Elementos de geometria.* São Paulo: Bibliópola, 1892.

COMÊNIO, J. A. *Didáctica magna.* 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.

Congresso Nacional de Ensino da Matemática no Curso Secundário, I. *Anais*. Salvador: Universidade da Bahia, 1957.

Congresso Nacional de Ensino da Matemática, II. *Anais*. Porto Alegre, 1957.

Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, III. *Anais*. Rio de Janeiro: CADES-MEC, 1959.

Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, V. *Anais*. São Paulo, 1968.

D'AMBROSIO, B. S. *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education.* Thesis of Doctor of Philosophy. Indiana University, 1987.

DAMPIER, W. C. *Historia de la ciencia.* Madrid: Tecnos, 1986.

DANTZIG, T. *Número: a linguagem da ciência.* Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

D'AUGUSTINE, C. H. *Métodos modernos para o ensino da matemática.* Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1976.

DAVIS, H. T. *História da computação.* São Paulo: Atual, 1992.

EVES, H. *Estudio de las geometrías.* México: Hispano Americana, 1969. 2 v.

_______. *História da geometria.* São Paulo: Atual, 1992.

_______. *Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FIORENTINI, D. *Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática.* Campinas: FE/UNICAMP, 1994. Tese de Doutorado.

FOUCHÉ, A. *A pedagogia das matemáticas.* São Paulo: Nacional, 1957.

GARCIA, W. E. (coord.). *Inovação educacional no Brasil: problemas e perspectivas.* São Paulo: Cortez/Autores Associados, 1980.

GERDES, P. Sobre a origem histórica do conceito de número. In: *Bolema,* especial 1. Rio Claro: UNESP, 1989.

_______. *Cultura e o despertar do pensamento geométrico.* Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991.

HAIDAR, M. de L. M. *O ensino secundário no império brasileiro.* São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo/Editorial Grijalbo, 1972.

HOGBEN, L. *Maravilhas da matemática.* Porto Alegre: Globo, 1970.

_______. *El universo de los números: historia y evolución de las matemáticas.* Barcelona: Ediciones Destino, s/d.

HOWSON, A. G. Seventy five years of the international commission on mathematical instruction. In: *Educational Studies in Mathematics,* v. 15, nº 1, February 1984, pp. 75-93.

IFRAH, G. *Os números: história de uma grande invenção.* Rio de Janeiro: Globo, 1989.

IMENES, L. M. P. *Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática.* Rio Claro: IM/IGCE/UNESP, 1989. Dissertação de Mestrado.

JAEGER, W. *Paideia — a formação do homem grego.* São Paulo: Herder, s/d.

KALEFF, A. M. Matemática moderna, sua origem e aspectos de seu desenvolvimento em alguns países ocidentais. In: *GEPEM*, ano XIV, 2º sem. 1989, pp. 3-9.

KARLSON, P. *A magia dos números.* Porto Alegre: Globo, 1961.

KILPATRICK, J.; RICO, L. e SIERRA, M. *Educación matemática y investigación.* Madrid: Editorial Síntesis, 1992.

KLEIN, F. *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Madrid: s/e, Coleção Biblioteca Matemática, 2 v., 1927 e 1931.

KLEINE, M. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial, 1972. 2v.

_______. *O fracasso da matemática moderna.* São Paulo: Ibrasa, 1976.

LACROIX, S. F. *Éléments de géométrie.* Paris: Gauthier-Villars, 1872.

LAISANT, C. A. e FEHR, H. *L'Enseignement mathématique.* Genebra: Georg & Cie , 1912.

LARROYO, F. *História geral da pedagogia.* São Paulo: Mestre Jou, 1982. 2 v.

LEGENDRE, A. M. *Éléments de géométrie.* Paris: Hector Manceaux, 1889.

LOPES, A. J. Matemática moderna não é mais aquela. In: *Leia*, novembro de 1988, pp. 41-2.

LOPES, M. L. A educação matemática, sua evolução. In: *Gepem*, ano XV, 1º sem. 1990, pp. 44-54.

_______. Breve histórico do GEEM. In: *Gepem*, ano XIV, 1º sem. 1989, pp. 15-9.

LOURENÇO FILHO, M. B. *Introdução ao estudo da escola nova: bases, sistemas e diretrizes da pedagogia contemporânea.* São Paulo: Melhoramentos/Fundação Nacional de Material Escolar, 1978.

LUZURIAGA, L. *História da educação e da pedagogia.* São Paulo: Nacional, 1975.

MANACORDA, M. A. *História da educação: da antiguidade aos nossos dias.* São Paulo: Cortez/Autores Associados, 1989.

MARROU, H. I. *História da educação na antiguidade.* São Paulo: EPU, 1975.

MARTINS, M. A. M. *Estudo da evolução do ensino secundário no Brasil e no Estado do Paraná com ênfase na disciplina de matemática.* Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 1984. Dissertação de Mestrado.

MASON, S. F. *Historia de las ciencias.* Madrid: Alianza Editorial, 1984. 5 v.

MIALARET, G. e VIAL, J. *História mundial da educação.* Porto: Rés - Editora, s/d. 4 v.

MIGUEL, A. *Três estudos sobre história e educação matemática.* São Paulo: FE/UNICAMP, 1993. Tese de Doutorado.

_______, FIORENTINI, D. e MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? *Pro-Posições*, v. 3, nº 1 (7), 1992, pp. 39-54.

MIORIM, M. A. *O ensino de matemática: evolução e modernização.* São Paulo: FE/UNICAMP, 1995. Tese de Doutorado.

MOACYR, P. *A instrução e a república.* Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1944. v. 5.

MONROE, P. *História da educação.* São Paulo: Nacional, 1939.

NUNES, M. T. *Ensino secundário e sociedade brasileira.* Rio de Janeiro: MEC/ISEB, 1962.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica.* São Paulo: FE/UNICAMP, 1989. Dissertação de Mestrado.

PFROMM NETTO, S. *O livro na educação.* Rio de Janeiro: Primor/MEC, 1974.

PEIXOTO, A. et al. *Um grande problema nacional — estudos sobre o ensino secundário.* Rio de Janeiro: Irmãos Pongetti, 1936.

PEREIRA, W. C. de A. *Matemática dinâmica com números em cores.* Recife: s/e, 1961.

PIAGET, J. et al. *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza, 1986.

PILATTI, O. A. *Legislação do ensino da matemática*. Rio Claro: UNESP, 1984. Trabalho não publicado.

PLATÃO. *A república: livro VII*. São Paulo: Editora Universidade de Brasília/Ática, 1989.

PONCE, A. *Educação e luta de classes*. São Paulo: Cortez/Autores Associados, 1983.

Revista Educação & Matemática, nº 5, 1979.

RIBEIRO, M. L. S. *História da educação brasileira: a organização escolar*. São Paulo: Cortez/Autores Associados, 1989.

RÍBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas*. Moscou: MIR, 1987.

RIBOULET, L. *História da pedagogia*. São Paulo: Francisco Alves, 1951.

ROMANELLI, O. de O. *História da educação no Brasil (1930/1973)*. Petrópolis: Vozes, 1990.

ROSA, M. G. de. *A história da educação através dos textos*. São Paulo: Cultrix, 1972.

ROWE, D. E. A forgotten chapter in the history of Felix Klein's Erlangen programm. In: *Historia Mathematica*, v. 5, nº 4, Nov. 1983, pp. 383-499.

______. Felix Klein's "Erlangen Antrittsrede". In: *Historia Mathematica*, v. 12, nº 2, May 1985, pp.123-41.

______. Essay Review. In: *Historia Mathematica*, v. 12, nº 3, Aug. 1985, pp. 203-312.

ROXO, E. *A matemática na escola secundária*. São Paulo: Nacional, 1937.

ROXO, E. et al. *Curso de matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1940. 5 v.

SANTALÓ, L. De Platão à matemática moderna. In: *Educação & Matemática*, nº 5, jul./set. 1979.

SCHUBRING, G. *The cross-cultural 'transmission' of concepts — the first international mathematics curricular reform around 1900, with an appendix on the biography of F. Klein*. Occasional Paper nº 92, Nov. 1987 (corr. version, Febr. 1989).

SILVA, C. P. da. *A matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento*. Curitiba: Editora da UFPR, 1992.

SILVA, G. B. *Introdução à crítica do ensino secundário*. Rio de Janeiro: MEC, 1959.

SMITH, D. E. *Rara arithmetica*. New York: Chelsea Publishing Company, 1970.

SOUZA, J. C. de M. *O escândalo da geometria*. Rio de janeiro: Editora Aurora, s/d.

STRUIK, D. *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

TAHAN, M. *Didática da matemática*. São Paulo: Saraiva, 1962. 2 v.

TEIXEIRA, A. *Educação no Brasil*. São Paulo: Companhia Editora Nacional/INL, 1976.

Thorndike, E. L. *A nova metodologia da aritmética.* Porto Alegre: Globo, 1936.

Thom, R. "Modern" Mathematics: an educational and philosophic error? In: *American Scientist*, nº 59, Nov./Dec. 1971, p. 695-9.

Toranzos, F. I. *Enseñanza de la matemática.* Buenos Aires: Kapelusz, 1963.

Vasconcellos, F. A. *História das matemáticas na antiguidade.* Lisboa: Aillaud e Bertrand, s/d.

Vianna, C. C. de S. *O papel do raciocínio dedutivo no ensino da matemática.* Rio Claro: IM/IGCE/UNESP, 1988. Dissertação de Mestrado.

Vieira, A. *A decadência do ensino no Brasil — suas causas e remédios.* Rio de Janeiro: F. Briguiet & Cia., 1935.

_______ . *O problema do ensino secundário.* Rio de Janeiro: Livraria Jacintho, 1936a.

_______ . *O ensino das humanidades.* Rio de Janeiro: Livraria Jacintho, 1936b.

_______ . *Subsídios para a reforma do ensino secundário.* Rio de Janeiro: Empresa Editora ABC Limitada, 1937.

_______ . *A nova orientação do ensino.* São Paulo: Melhoramentos, 1937.

Introdução à história da Educação Matemática apresenta as principais questões e os momentos mais significativos do ensino da Matemática ao longo dos tempos. O eixo tomado foi o da modernização, explicitando idéias e a atividade de pessoas que desempenharam um papel importante na evolução histórica da Educação Matemática.

Escrita por Maria Ângela Miorim, professora do Departamento de Metodologia de Ensino da Faculdade de Educação da Unicamp, esta obra representa uma valiosa contribuição para estudantes, professores e todos aqueles que se dispõem a refletir sobre os caminhos do ensino dessa disciplina, dos tempos primitivos ao ocaso do movimento da Matemática moderna.

ATUAL EDITORA

ISBN 85-7056-870-3
9 788570 568700