Capítulo 1

Teorias em Educação Matemática

Resumo

Neste capítulo, o meu ponto de partida é que uma teoria em educação matemática é algo como um *sistema*. Está sempre mudando e é constituído por componentes inter-relacionados. Quero sugerir que uma teoria inclua três componentes interligados: (1) um conjunto organizado de princípios teóricos; (2) uma metodologia; e (3) algumas questões paradigmáticas de investigação. Desenvolvo esta ideia neste capítulo a partir de uma discussão que começa com um exemplo em uma sala de aula de Grau 4[a], exemplo que utilizo para introduzir progressivamente os três componentes acima mencionados. Depois, discuto brevemente dois exemplos de teorias em educação matemática – o construtivismo e a teoria das situações didáticas (TSD) –, e finalizo o capítulo com uma breve referência à teoria da objetivação.

[a]Na província de Ontário, os anos escolares são denominados graus. Para estabelecer uma correspondência com os anos escolares brasileiros, adicionamos ao lado do indicativo de grau, a idade das crianças que estão matriculadas no grau em questão. No Grau 1 estão os alunos de 6-7 anos de idade. Indicaremos então Grau 1 (6 – 7 anos), Grau 2 (7 – 8 anos), o mesmo acontecendo para anos posteriores. [N.T.]

Um exemplo de sala de aula

ANTES de iniciar a aula na turma do Grau 4 (9–10 anos), a professora Giroux, em frente a todos os alunos, pediu a Marc para dizer à turma algo sobre o seu aniversário. Marc então falou sobre alguns dos presentes que tinha recebido. Entre estes, um cofrinho, com o qual Marc parecia particularmente encantado.

A professora Giroux e sua classe (de Grau 4) iriam em breve começar a trabalhar com generalização de padrões algébricos. Aproveitando o presente de Marc, ela inventou uma história através da qual os estudantes podiam começar a pensar em termos de covariação para produzir uma fórmula, não necessariamente utilizando o simbolismo alfanumérico. Em termos de conteúdo, a fórmula deveria permitir aos estudantes calcular o valor dos termos remotos (mais distantes) numa sequência simples. Passados alguns dias, os estudantes trabalharam, em pequenos grupos, um problema com base na seguinte história:

> Em seu aniversário, Marc recebe um cofrinho com forma de porquinho com um dólar. Ele poupa 2 dólares por semana. No final da primeira semana tem 3 dólares, no final da segunda semana tem 5 dólares, e assim por diante.

A professora distribuiu aos alunos fichas de duas cores (azul e vermelha) e copos de plástico numerados, destinados a representar a semana 1, semana 2, etc., e propõe a eles calcular o processo de poupança até a semana 5 com as fichas. Depois, desenhando outros copos na lousa, a professora convidou os alunos a encontrar o total poupado no final das semanas 10, 15, e 25.

Vejam uma parte da discussão de um grupo de três alunos, representado pela Figura 1: Albert à direita, parcialmente visível nas imagens, Krysta no meio, e Manuel à esquerda.[1]

14. Krysta: Então, devemos fazer. . . Isso, vezes dois. Então, 11 . . . (*quadro 1 na Figura 1*).

15. Albert: 11 mais 11 . . . 22.

16. Krysta: 22.

17. Albert: (*Albert ri.*)

[1] O diálogo, a seguir, inicia com a linha 14, por ser parte de pesquisa adotada em outros estudos. [N.T.]

18. Krysta: No final de . . . ok, no final de. . .

19. Albert: Humm, espere . . . Não. Seria 11 mais 10 porque. . .

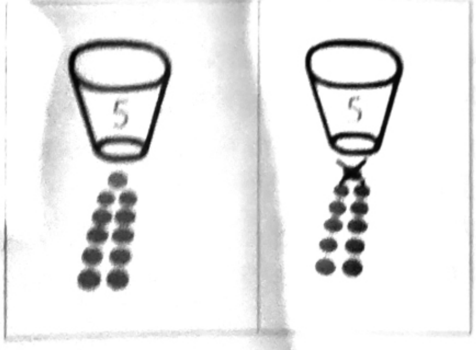
20. Krysta: 5 (*Apontando para a semana 5*).

21. Albert: Nós sempre começamos com a . . . [ficha azul] (*ver quadro 2 figura 1*).

Figura 1: *No quadro 1, Krysta aponta para as fichas da semana 5, e no quadro 2, Albert aponta para a ficha azul*

Como podemos ver, para responder à pergunta sobre a semana 10, os estudantes recorrem a uma estratégia de duplicação. Acrescentam a quantia em dólares poupada até a semana 5 obtendo um valor dobrado, depois removem uma das fichas azuis desse valor, uma vez que há sempre uma, e apenas uma ficha azul, para cada semana (Figura 2).

Figura 2: *A estratégia de duplicação, com a correspondente remoção de uma ficha azul.*



O raciocínio não é perfeitamente articulado em palavras por Albert, nas linhas 19 e 21, mas o seu gesto ao apontar ajuda claramente a preencher a lacuna verbal na explicação pretendida.

A estratégia de duplicação pode ser aplicada a outros casos, como os estudantes observaram. Assim, para encontrar o montante de dinheiro poupado, por exemplo da semana 25, observamos que alguns grupos começam a partir da semana 5; ao duplicar, obtêm o montante de dinheiro poupado na semana 10. Voltam a duplicar e adicionam o montante da semana 5, sem esquecerem de remover as fichas azuis extras que foram adicionadas no processo. A estratégia funciona muito bem, mas é complicada para determinar o montante da poupança em semanas "remotas", citando semana 78... 103...

Mas, continuemos com o exemplo do cofrinho. Quando a professora Giroux foi ver o trabalho de Krysta e de seus colegas de equipe, percebeu que os estudantes estavam recorrendo à estratégia de duplicação. A discussão desenrolou-se da seguinte forma:

22. Profª Giroux: Interessante! Aqui no seu modelo, tem fichas de duas cores. O que isso significa?

23. Krysta: Porque ele, o Marc, já tinha a azul.

24. Manuel: Sim, porque a história do problema diz que o cofrinho já tinha 1 dólar.

25. Albert: O cofrinho tinha 1 dólar, portanto aquelas fichas azuis são o 1 dólar que ele já tinha (*Ele aponta, em sequência, para as fichas azuis das semanas 1 a 5*), juntando com a 2, 4, 6, 8, 10 (*apontando para as fichas vermelhas das semanas 1 a 5*)

26. Profª Giroux: Está bem, está bem. O que aconteceria se fosse a semana 10?

27. Albert: (*Apontando para a semana 5*). Bem, acrescentaríamos tudo isto novamente, porque sabemos que 5 + 5 = 10, então . . . (*Ele faz um gesto arrastando a caneta indicando todas as fichas; Figura 3, quadros 1 e 2*)

28. Krysta: Mas . . . nós acrescentaríamos . . . Adicionaríamos tudo isto, não o azul (*Ela aponta para as fichas vermelhas na semana 5, apontando para a ficha azul; Figura 3, quadro 3*)

29. Profª Giroux: (*Tentando fazer com que os alunos notem a estrutura covariacional*) O que se percebe em relação à semana 5 e o número de fichas? E para a quarta semana e o número de fichas? (*Ela mostra o copo correspondente à semana 5, e aponta para as fichas vermelhas; Figura 3, quadro 4*).

30. Albert: É sempre duas vezes . . .

31. Profª Giroux: É sempre duas vezes. (*Repetindo*)

32. Krysta: É o dobro do que você . . . não! Estou confusa! (*Ela observa intensamente os artefatos durante algum tempo*)

33. Albert: Sim! É duas vezes. Olha! $1 + 1, 2; 2 + 2, 4; 3 + 3, 6; 4 + 4$. (*Contando as fichas vermelhas*)

34. Krysta: 8. (*Interrompendo*)

35. Albert: 8. (*Ao mesmo tempo*)

36. Krysta: 5+5, 10.

37. Albert: 5+5, 10. (*Apontando para as fichas na semana 5*)

38. Krysta: Legal! É o dobro da semana . . .

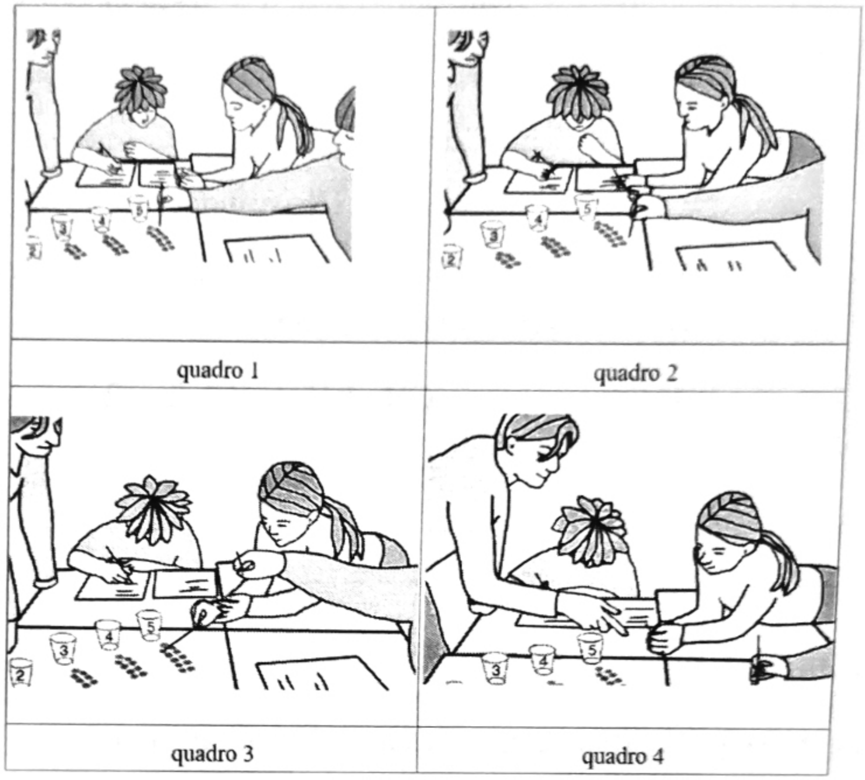
39. Profª Giroux: Então, se as vermelhas são duas vezes [o número da semana], o que acontece com a ficha azul? (*Ela aponta para a ficha azul na semana 5*)

40. Krysta: Mais 1.

Das linhas 22 a 28, os alunos explicam a sua estratégia à professora. A estratégia não é identificada como um código, tal como a estratégia de duplicação ou outra coisa qualquer; pelo contrário, a estratégia é explicada em ação, através de palavras e gestos.

Na linha 29, acontece algo importante. Na verdade, nesta linha, o professor tenta introduzir o que parece ser uma nova abordagem à percepção das coisas: Ela diz: "O que se percebe em relação à semana 5 e o número de fichas? A quarta semana e o número de fichas"? No final da passagem, os alunos parecem começar a notar uma relação de covariação entre o número da semana e as fichas vermelhas e azuis.

Figura 3: *Os alunos e a professora discutindo a estratégia para encontrar o número de fichas na semana 10*



1.1 Questões de pesquisa

Por meio de questões de pesquisa, uma teoria aborda *problemas* específicos que procura investigar. Assim, uma teoria interessada no problema da *interação* em sala de aula faria perguntas sobre como ocorre a interação professor-aluno e talvez perguntas sobre a sua evolução durante o ano, ou ao longo dos anos. Uma teoria interessada nos problemas do ensino e da aprendizagem faria perguntas, tais como: *O que* os alunos estão aprendendo? Como estão aprendendo? Uma tal teoria faria também perguntas sobre o professor. E em referência ao exemplo de sala de aula relatado anteriormente, a teoria poderia perguntar: Qual é a natureza da intervenção do professor? A sua intervenção é apropriada?

1.2 Método

Para responder a essas e outras questões semelhantes, uma teoria precisa produzir alguns *fatos*, necessários para *articular* de forma *convincente* os relatos do fenômeno sob escrutínio (investigação). Então, em que partes do exemplo do cofrinho devemos nos concentrar? Que partes do exemplo devemos destacar como *fatos* da interação entre os estudantes (no caso da primeira teoria) ou da aprendizagem dos estudantes (no caso da segunda teoria)?

Essa ideia torna já evidente que a seleção dos fatos e sua eventual inter-relação não são produzidas de forma aleatória. São produzidas *sistematicamente*, por meio de algum *método*.

Um método traz à tona alguns fatos e deixa em segundo plano aqueles "sem importância" – o *ruído*. Assim, se quisermos responder algumas das questões acima mencionadas – "Como os estudantes estão aprendendo no exemplo do cofrinho?", admitindo que estão aprendendo *alguma coisa* –, em que aspectos é necessário nos concentrar? Devemos concentrar-nos nas ações dos estudantes? Devemos concentrar-nos na linguagem dos estudantes? Será que devemos nos concentrar nos copos, nas fichas, nos gestos da professora e dos alunos, nas posições corporais e na prosódia (entoações verbais)? Do que devemos tratar exatamente? Há muitas possibilidades. Elas dependem de algo que vai além do reino dos *fatos* – o reino daquilo que alguns filósofos e linguistas chamam *Weltanschauung* (Underhill, 2009); ou seja, uma *visão de mundo* – as nossas concepções implícitas e explícitas sobre como o mundo é. Na verdade, é no contexto da nossa visão de mundo e seus *princípios teóricos* que os fatos são *interpretados*.

1.3 Princípios teóricos

Tomemos o exemplo dos antigos gregos. Seguindo Aristóteles, os antigos gregos acreditavam que os fatos eram portadores ou incorporadores de propriedades universais. Este é um exemplo de um *princípio teórico*. Ele dá aos fatos um lugar preciso na teoria. E também confere ao método uma função precisa. Em qualquer teoria, os princípios teóricos e o método que produz fatos e interpretações devem encaixar-se mutuamente. Vemos isto encaixar muito bem no caso dos antigos gregos. Para eles, a função de um método era ajudar a dar sentido às coisas concretas ou ideais *já existentes*, olhando para elas com atenção. Um método para eles era uma espécie de processo *contemplativo*. As classificações, tal como realizadas na botânica por Aristóteles, eram métodos para ordenar as coisas e para as compreender. Assim, segue-se, como Heidegger (1977) sugeriu, que para os antigos gregos *theōrein* ou *teoria* era uma forma de ver, ou olhar para algo atentamente, de modo a fazê-lo revelar-se através do espetáculo da sua aparência.

É interessante notar que, nessa antiga visão de mundo grega, os objetos observados não eram *forçados* a aparecer. Foi necessário esperar até ao final da Idade Média e início da Renascença para chegarmos à ideia de que podemos forçar os objetos, sob escrutínio, a aparecerem. Esse era o papel da experiência científica (Dear, 1995; Shapin, 1994), que trouxe consigo uma mudança na concepção dos fatos. Na verdade, desde a emergência do empirismo, e em particular no início do século XVII, sob a influência de Francis Bacon (1906), os fatos passaram a ser entendidos como pormenores sem teoria. Como Mary Poovey (1998, p. XVIII) observa no seu livro *A History of the Modern Fact*, alguns cientistas argumentaram que "era possível reunir dados completamente livres de qualquer componente teórico". O princípio teórico aqui é que os fatos *geram* saber sobre o mundo através de um processo indutivo. Antes de continuarmos a nossa discussão sobre teorias, e para ilustrar o que temos visto até agora, quero considerar a abordagem teórica de Piaget.

1.4 A epistemologia genética de Piaget

São três os princípios teóricos da epistemologia genética de Piaget:

1. Os mecanismos cognitivos universais sustentam a construção e o desenvolvimento das operações e estruturas cognitivas da criança;

2. Estas estruturas cognitivas são descritas em termos de estruturas logico-matemáticas;

3. A construção das estruturas cognitivas da criança é o resultado dos próprios atos da criança[2].

[2]Como Walkerdine observou, "No trabalho de Piaget foi utilizado um modelo evolutivo no qual o raciocínio científico e matemático foi entendido como o auge de um processo evolutivo de adaptação. O modelo via o mundo físico como governado por leis lógico-matemáticas, que passaram a constituir a base do desenvolvimento da racionalidade das crianças" (Walkerdine, 1997, p. 59).

A partir desses princípios teóricos, Piaget concebeu um método baseado em entrevistas clínicas, que lhe ofereceram um espaço ideal para a experimentação e observação.

Nas entrevistas, um adulto apresentava problemas meticulosamente preparados e/ou pergunta(s) a uma criança. Os problemas ou questão(ões) foram criados de forma a possibilitar a Piaget produzir *fatos* e interpretações. A partir desses fatos e das suas interpretações, Piaget foi capaz de articular narrativas para responder suas questões sobre o desenvolvimento do indivíduo.

A substância ou material, a partir da qual os fatos de Piaget foram produzidos, eram as ações da criança (por exemplo, no manuseamento de alguns objetos concretos) e afirmações. Estas, constituíram os dados brutos e a partir dos quais Piaget e seus colaboradores se esforçaram para encontrar vestígios de pensamento lógico. Como Gardner (1970) assinalou:

> Piaget examina o protocolo da criança e escolhe as proposições subjacentes significativas (que ele pode então ordenar na linguagem lógica *se p então q*): a ação mental refletida no protocolo é uma série de operações realizadas sobre as proposições. O indivíduo atingiu operações formais quando (sic) pode explorar sistemática e exaustivamente as relações entre as proposições que descrevem um fenômeno. (p. 359)

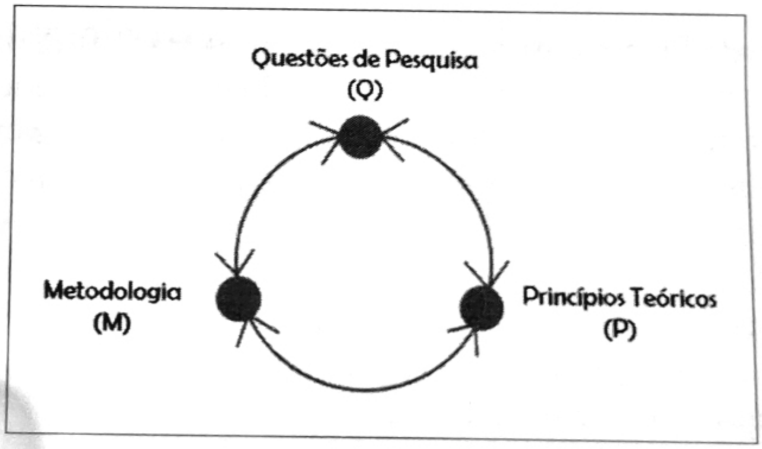
O método de Piaget permite-lhe discernir os *fatos* entre o que a criança diz e faz. Ao ser envolvido com uma visão de mundo e princípios teóricos sobre a mente humana, o método permite a Piaget *interpretar* os fatos e produzir relatos ou narrativas para provar algo sobre o intelecto da criança.

Tal como no caso dos antigos gregos, vemos uma apropriada e apta adequação entre o método e sua produção e interpretação dos fatos, e os princípios teóricos. Os métodos e princípios teóricos são alinhados de tal modo que os relatos podem ser articulados de forma convincente para responder às questões de investigação da teoria.

1.5 Do Método à Metodologia

Há algo que precisa de ser dito sobre a natureza dos princípios teóricos de uma teoria, pois tem consequências importantes na compreensão das teorias em geral: é impossível tornar *explícitos* todos os princípios de uma teoria. Só nas teorias formais (axiomáticas), tal como a teoria axiomática dos conjuntos, é possível uma lista de princípios – axiomas. As teorias na educação matemática e nas ciências sociais em geral, não são teorias formais. Alguns dos seus princípios, entre os considerados mais importantes, estão explicitados; outros estão presentes, porém de forma implícita[3]. Como resultado, o ajuste entre método e princípios, um ajuste que torna possível a interpretação de fatos, deve ser visto como algo não necessariamente permanente. Existe sempre uma tensão – uma tensão dialética – entre os princípios teóricos e o método de uma teoria. Além disso, à medida que a teoria produz resultados, os princípios e métodos teóricos podem ser afetados. É por isso que é melhor pensar numa teoria como um sistema em movimento e transformação. Uma das consequências de tal visão das teorias é que os métodos, não obstante os empiristas, não podem ser reduzidos a uma série de passos a serem rigorosamente seguidos. Um método é algo muito mais complexo. Assim, para Vygotsky (1997a, p. 27) "Encontrar um método é uma das tarefas mais importantes do investigador". Para ele, a principal característica de um método é ser inquisitivo e reflexivo. Na sua opinião, um método é uma *prática verdadeiramente filosófica*. Para enfatizar esta concepção não-instrumentalista de método, no que se segue utilizarei o termo *metodologia* em vez de *método*.

Figura 4: *Uma teoria como unidade dinâmica composta por três componentes (P, M, Q) (Radford, 2015)*



Posso resumir a discussão anterior dizendo que uma metodologia M só pode fazer sentido através da sua inter-relação com um conjunto de princípios teóricos. Estes princípios transmitem características implícitas

[3]Um exemplo é o papel da linguagem no construtivismo. A linguagem não é mencionada nos princípios do construtivismo (radical) explicitados por von Glasersfeld. Mas isto não quer dizer que o construtivismo (radical) não a leva em conta. [N.T.]

e explícitas da visão de mundo subjacente, e as questões de investigação Q que a teoria procura responder. Em dois outros artigos (Radford, 2008a, 2017a), referindo-me ao campo de investigação da educação matemática, chamei de *teoria* a tríade (P, M, Q). As setas na Figura 4 indicam que existe uma relação dialética entre elas: na sua inter-relação, cada uma delas altera as outras, tornando a teoria um sistema dinâmico.

1.6 Teorias da Educação Matemática: dois breves exemplos

Limito-me aqui a uma breve discussão sobre as duas principais teorias na educação matemática: o construtivismo (Cobb, 1988; Cobb & Yackel, 1996) e a teoria das situações didáticas (Brousseau, 2002).

1.6.1 Construtivismo

Ernst von Glasersfeld (1995) formulou de forma clara e explícita os princípios do construtivismo (radical). Tais princípios são:

P1: O saber não é recebido passivamente, mas construído pelo sujeito cognoscente;

P2: A função da cognição é adaptativa, e serve para a organização do mundo experiencial e não para a descoberta da realidade ontológica.

A verdadeira novidade educativa do construtivismo não se baseia no primeiro princípio. O primeiro princípio foi o eixo principal em torno do qual os pedagogos progressistas da chamada reforma educacional do início do século XX construíram o seu programa pedagógico (Darling & Nordenbo, 2002; Röhrs & Lenhart, 1995; Rugg & Shumaker, 1969), embora não o tenham articulado tão claramente como Glasersfeld o fez. Este princípio também constituiu uma pedra angular na epistemologia genética de Piaget (1970) (ver princípio 3, na secção 1.5). A verdadeira novidade do construtivismo se assenta antes, como Glasersfeld afirma, nas posições epistêmicas e ontológicas transmitidas pelo segundo princípio e pelo seu concomitante conceito de saber (*knowledge*)[4]. Sem negar necessariamente a existência de

[4] A tradução literal de *knowledge* é *saber*. Em português a tradução usual é conhecimento. Neste capítulo utilizaremos os dois termos como sinônimos. No entanto, como veremos mais adiante, na teoria da objetivação se faz necessário distingui-los – N.T.

uma realidade pré-existente, e em um movimento coerente com a teoria do saber/conhecimento de Kant (2003), o construtivismo não afirma que o saber/conhecimento construído pelo sujeito cognoscente corresponde à tal realidade. A sua epistemologia repousa na negação da possibilidade de qualquer saber/conhecimento preciso sobre uma realidade (Ernest, 1991). Existe um terceiro princípio que, embora não mencionado explicitamente, é o que ocorre em qualquer prática construtivista na sala de aula. Não é exatamente um princípio de natureza epistemológica ou ontológica, mas ele nos dá uma ideia de como a construção do saber/conhecimento deve ocorrer em ambientes instrucionais e é, portanto, de natureza pedagógica. Este princípio pode ser enunciado da seguinte forma:

P3: O sujeito cognoscente não só constrói o seu próprio saber / conhecimento, como também o faz de forma autônoma.

A autonomia intelectual, de fato, fazia parte de dois dos objetivos gerais identificados pelo construtivismo desde o início: "o ensino por imposição é incompatível com dois dos objetivos gerais de instrução matemática que decorrem do construtivismo: a construção de estruturas conceituais cada vez mais poderosas e o desenvolvimento da autonomia intelectual" (Cobb, 1988, p. 99).

Esses três princípios fornecem a base para conceitualizar a aprendizagem, a qual é equiparada ao fazer, ou seja, às ações do estudante que transformadas em esquemas, constituem-se em saber/conhecimento *viável* (Glasersfeld, 1995), ou saber/conhecimento *compartilhado* (Cobb, Yackel & Wood, 1992). Além disso, estes princípios estão inter-relacionados com a produção metodológica e interpretação de fatos: provas admissíveis de aprendizagem. Os construtivistas exploram as ações dos estudantes através do que fazem ou dizem, recorrendo a uma concepção de experiência de ensino específica que pode durar longos períodos de tempo – um ano por exemplo. Cobb, Stephen, McClain, & Gravemeijer (2001) explicam a abordagem metodológica construtivista que envolve sequências de atividades instrutivas, bem como o quadro interpretativo utilizado para organizar as suas análises de eventos em sala de aula. Uma vez que os construtivistas fazem uma divisão clara entre o social, por um lado, e o indivíduo, por outro, as suas análises trabalham com base numa coordenação dessas duas dimensões. Coordenam, assim, uma perspectiva social sobre as atividades da sala de aula com uma

São princípios que, com a sua metodologia concomitante podem nos permitir confirmar, de um ponto de vista construtivista, se Krysta, por exemplo, está ou não aprendendo naquele exemplo de sala de aula do cofrinho, que foi mencionado. Podem também nos permitir fazer afirmações sobre o envolvimento da professora, ser apropriado ou não.

Volto agora, de modo breve, para a teoria das situações didáticas (TSD).

1.6.2 A teoria das situações didáticas

A TSD procura oferecer um modelo inspirado na teoria matemática dos jogos, para investigar, de forma científica, os problemas relacionados com o ensino da matemática e os meios de como melhorá-lo.

No início, o termo "situação" referia-se ao ambiente do aluno como sendo usado pelo professor, para quem este ambiente aparece como uma ferramenta no processo de ensino. Mais tarde, a situação foi ampliada de modo a incluir o próprio professor e até mesmo o sistema educativo como um todo (Brousseau, 2003). Vemos aqui um exemplo da evolução ou transformação de uma teoria.

A TSD trabalha com base em um conjunto de princípios de ordem epistemológica, tais como:

P1: O saber aparece como a solução "ótima" para uma determinada situação ou problema;

P2: A aprendizagem, de acordo com a epistemologia genética de Piaget, é uma forma de adaptação cognitiva.

O primeiro princípio está ligado a um terceiro princípio que pode ser enunciado como:

P3: Para cada saber matemático existe uma família de situações que lhe dão significado apropriado.

Esta família é chamada de *situação fundamental*. Para Brousseau (2002), a procura de situações fundamentais e a sua inserção no projeto mais geral de ensino e aprendizagem em sala de aula exigem pelo menos dois elementos: uma boa teoria epistemológica, que revelaria a profundidade dos saberes matemáticos e informaria o processo de ensino, e uma boa engenharia didática[5] orientada para a concepção de situações e problemas a serem resolvidos pelos alunos.

A solução "ótima", declarada no princípio P1, refere-se à matemática, tal como reconhecida pelos matemáticos profissionais, a escola, e o currículo.

Um quarto princípio especifica melhor o conceito de aprendizagem na TSD, expresso no princípio P2. De fato, o princípio P2 nos diz que a aprendizagem é de natureza adaptativa; consiste nas adaptações dos estudantes a um meio, mas nada diz sobre as condições sociointeracionais a serem preenchidas para que ela ocorra. Esse quarto princípio, P4, não é declarado explicitamente, mas funciona na prática dentro da TSD e fornece a base para outros conceitos-chave da teoria (por exemplo, a chamada situação adidática, o Efeito Topázio, e uma distinção prática entre aprendizagem genuína e aparente). O quarto princípio é o seguinte:

P4: A autonomia do estudante é uma condição necessária para a aprendizagem genuína da matemática.

Como podemos ver, o P4 tem a ver com a relação entre professores e alunos. Este princípio dá uma consistência teórica impecável à TSD, embora, como o próprio Brousseau reconheceu, conduza a alguns paradoxos práticos. Assim, segundo o P4, se o processo de aprendizagem não for realizado de forma autônoma face ao professor, a aprendizagem, de acordo com a TSD, não acontece, pois "se o estudante produz a sua resposta, sem que tenha feito as escolhas que caracterizam o saber adequado e que diferenciam este saber do saber insuficiente, a evidência da aprendizagem torna-se enganosa" (Brousseau, 2002, p. 41). Em outras palavras, se "o professor lhe ensina [ao estudante] o resultado, ele (o estudante) não o estabelece por si mesmo e, portanto, não aprende matemática" (p. 41-42). A conjuntura paradoxal reside nos limites impostos ao espaço de atuação de professores e estudantes: os professores dizem, mas não podem realmente dizer[6]). Aqui,

[5] A engenharia didática parte da ideia de que as situações de aprendizagem podem ser descritas em termos de variáveis que o professor pode controlar até certo ponto. [N.T.]

[6] O paradoxo consiste em dizer ou querer dizer o que fazer (como resolver o problema), mas não poder dizê-lo. Na prática, tenta-se resolver o paradoxo fazendo ao estudante uma pergunta que leva à resolução esperada. A dificuldade é determinar até que ponto a pergunta do professor não revela sub-repticiamente o que ele quer que o aluno faça. Para uma discussão mais aprofundada, ver *The Paradoxes of Learning*, Radford, 2018a.

professores e alunos navegam pela conjuntura paradoxal através de uma postura contratual – um *contrato didático* (volto a esta ideia, no Capítulo 10).

Tal como no caso do construtivismo, os princípios e metodologia da TSD fornecem a base para fazer afirmações sobre a aprendizagem dos estudantes. As afirmações levam em consideração o significado do que é fazer e aprender matemática dentro da TSD. Como explica Brousseau (2002), fazer e aprender matemática "deve por vezes ser semelhante (à) atividade científica (dos matemáticos)" (p. 22). Como resultado, "Uma reprodução fiel de uma atividade científica pelo estudante exigiria que ele produzisse, formulasse, provasse, e construísse modelos, línguas, conceitos e teorias" (p. 22).

A concepção didática das atividades deve permitir aos estudantes investigar, produzir e formular métodos de resolução de problemas:

> A professora deve, portanto, simular na sua aula uma microssociedade científica se quiser que o uso do saber seja uma forma econômica de fazer boas perguntas e resolver disputas, e se quiser que a linguagem seja uma ferramenta para lidar com situações de formulação e que as provas matemáticas sejam um meio de convencer os colegas de turma. (Brousseau, 2002, p. 23)

É no contexto dessas ideias e princípios que o investigador pode afirmar se os estudantes estão ou não aprendendo no nosso exemplo inicial do cofrinho (ou em qualquer outra situação de ensino e aprendizagem para esse efeito). Os princípios e a metodologia da TSD proporcionam também espaço para fazer afirmações sobre a pertinência da intervenção do professor.

O construtivismo e a TSD apresentam algumas semelhanças: ambas as teorias enfatizam a importância da autonomia do aluno em relação ao professor. No entanto, diferem em outros aspectos: não têm a mesma concepção de aprendizagem, em parte devido a diferenças nos seus conceitos de saber. Na TSD, o saber tem uma natureza socioinstitucional, em oposição ao significado subjetivo que tem no construtivismo. É por isto que ambas as teorias podem acabar por enunciar reivindicações ou razões distintas sobre a aprendizagem dos estudantes no exemplo do cofrinho, ou em qualquer outro exemplo.

Há um ponto importante em que essas teorias podem concordar: a afirmação de que a *intervenção* do professor tem um efeito concreto na conceitualização dos alunos. A intervenção do professor *dirige* a atenção dos alunos para uma forma covariada de pensamento sobre o problema da generalização. Na linha 29, a professora tenta, de fato, tornar perceptível aos alunos uma estrutura covariada quando diz: "Que relação você percebe entre semana 5 e o número de fichas? E entre a 4ª semana e o número de fichas"? Uma vez que a forma covariada de pensar não vem dos alunos, pode-se entender que o professor está impedindo os alunos de fazerem as suas próprias escolhas. Não só a intervenção do professor (na visão do construtivismo) está interferindo na "autonomia intelectual" dos alunos (Cobb, 1988, p. 99), mas também (na visão da TSD) pode estar produzindo provas enganosas de aprendizagem.

1.7 A Teoria da Objetivação

O exemplo do cofrinho introduzido no início deste capítulo forneceu matéria-prima para nos lembrar que as interpretações e afirmações que podem ser feitas sobre fenômenos em sala de aula dependem da teoria a que recorremos para analisá-los (Bikner-Ahsbahs, Prediger, 2014; Niss, 1999; Scheiner, 2020; Scheiner & Pinto, 2019).

Fiz, até aqui, uma breve incursão em duas das principais teorias da educação matemática: o construtivismo e a TSD. Embora demasiado breve para fazer justiça à complexidade por trás de cada uma dessas teorias, a incursão feita permite-nos ver que as teorias transmitem concepções específicas sobre o saber, e que têm um grande impacto na forma como a aprendizagem e o ensino são entendidos. Mas as teorias educativas também transmitem ideias sobre professores e estudantes. Vimos ainda a importância que tanto o construtivismo como a TSD dão à autonomia. Tal postura atrai, naturalmente, ideias mais gerais de natureza individual e humana. Terei tempo para me debruçar sobre este ponto mais adiante, neste livro.

Para fazer essas observações, eu poderia certamente ter escolhido outras teorias também. No entanto, isso teria me afastado do foco deste livro, que não é sobre teorias na educação matemática. Posso apenas dizer que, talvez, a minha escolha seja de natureza biográfica. Vivo no Canadá, onde o construtivismo tem tido uma influência tremenda. E foi na França, durante os meus estudos de doutoramento, que fui influenciado pela TSD. Portanto, é a imersão na tradição intelectual francesa como estudante, por um lado, e as minhas atividades profissionais como educador matemático no Canadá, por outro, que podem explicar minha escolha. Esta razão biográfica pode também explicar o enorme impacto que essas teorias tiveram naquela que é o tema deste livro: a teoria da objetivação[7].

Embora muito influenciado pelo construtivismo e pela TSD, a teoria da objetivação afasta-se delas. Em que sentido? Há uma resposta curta, outra intermediária e outra longa para essa pergunta. A resposta longa só pode vir após a leitura deste livro. Para evitar frustrações, no próximo capítulo ofereço a resposta intermediária. De fato, no capítulo 2 apresento uma visão geral da teoria da objetivação e do seu lugar no panorama das teorias em que ela se insere: as teorias socioculturais da educação matemática contemporânea. Mas como o leitor ainda pode achar esta linha de ação decepcionante, ofereço no resto deste capítulo, a resposta curta.

O construtivismo e a TSD baseiam-se em ideias teóricas que remontam às filosofias do Iluminismo, e à filosofia de Kant, em particular; talvez não diretamente, pois as ideias de Kant foram refinadas e re-enunciadas por Piaget (Glasersfeld, no caso do construtivismo radical). A teoria da objetivação baseia-se numa tradição filosófica distinta, nomeadamente a filosofia de Hegel (1991) e o materialismo dialético subsequente (Artinian, 2017; Fedoseyev, et al., 1977; Fischbach, 2014; Ilyenkov, 1977; Lefebvre, 2009; Levant & Oittinen, 2014). As principais fontes da teoria da objetivação não são Kant e Piaget, mas Hegel, Vygotsky, Luria, Leont'ev (ou Leontiev)[8], e outros psicólogos tal como Rubinstein (1983). Na prática, isto significa que os conceitos de saber, ensino e aprendizagem, e o próprio conceito de estudantes e professores, não são aqueles mesmos que vieram da tradição Iluminista para constituir o construtivismo e a TSD.

Há ainda outra resposta curta que pode ajudar a dar sentido às diferenças que estou tentando identificar. A teoria da objetivação está inserida num projeto educativo que não é o mesmo que o adotado pelo construtivismo, ou o que é seguido pela TSD. Como vimos, o construtivismo identi-

---

[7]O diálogo contínuo da teoria da objetivação com o construtivismo em geral, com a TSD (Brousseau, 2002), com a commongnition [comunicação e cognição] (Sfard, 2008) e, mais recentemente, com o Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, Tanguay, Elia, 2016a; Radford, 2016a) e o Inferencialismo (Derry, 2017; Radford, 2017b) não se destina a criar polaridades. É um esforço para compreender melhor a nossa própria teoria. Vygotsky sugeriu que "Através dos outros, tornamo-nos nós próprios" (1998, p. 170). O mesmo se aplica às teorias. É através do diálogo com outras teorias que uma dada teoria forma sua identidade.

[8]Leontiev ou Leont'ev são as duas grafias usadas para se referir ao psicólogo soviético Alexei Leont'ev, ou Алексей Леонтьев (rus.). No presente texto, as duas grafias são encontradas para melhor correspondência com a fonte bibliográfica citada [N.T.].

fica dois objetivos gerais da educação matemática: "a construção de estruturas conceptuais cada vez mais poderosas e o desenvolvimento da autonomia intelectual" (Cobb, 1988, p. 99). A TSD, pelo contrário, é orientada para a difusão do saber matemático. Ela está inserida num projeto social cujo objetivo é fazer com que os estudantes adquiram um saber constituído (Brousseau, 2003). Como resultado, na TSD, a ênfase tem sido geralmente colocada no saber matemático e na gestão eficiente do ambiente de aprendizagem. No construtivismo, a ênfase tem geralmente sido colocada no saber – mais especificamente, na compreensão dos modos idiossincráticos em que os estudantes constroem os seus próprios saberes. No primeiro caso, a orientação teórica subjacente tem sido essencialmente epistemológica. No segundo caso, a orientação teórica tem sido psicológica. *A teoria da objetivação situa-se num projeto educativo diferente: vê o objetivo da educação matemática como um esforço político, social, histórico e cultural que visa a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em discursos e práticas matemáticas histórica e culturalmente constituídas, e que ponderam novas possibilidades de ação e pensamento.*

A teoria da objetivação se assenta na ideia fundamental de que aprender é tanto saber como vir a ser. Por detrás desta ideia fundamental está a concepção neo-Hegeliana, dialética, dinâmica, constitutiva de sujeitos e culturas : tanto o indivíduo como a cultura são entidades coadjuvantes em perpétuo fluxo, uma transformando-se continuamente na outra, e vice-versa.

Passemos agora ao segundo capítulo deste livro, no qual identifico o lugar da teoria da objetivação na paisagem das teorias fica dois objetivos gerais da educação matemática: "a construção de estruturas conceptuais cada vez mais poderosas e o desenvolvimento da autonomia intelectual" (Cobb, 1988, p. 99). A TSD, pelo contrário, é orientada para a difusão do saber matemático. Ela está inserida num projeto social cujo objetivo é fazer com que os estudantes adquiram um saber constituído (Brousseau, 2003). Como resultado, na TSD, a ênfase tem sido geralmente colocada no saber matemático e na gestão eficiente do ambiente de aprendizagem. No construtivismo, a ênfase tem geralmente sido colocada no saber – mais especificamente, na compreensão dos modos idiossincráticos em que os estudantes constroem os seus próprios saberes. No primeiro caso, a orientação teórica subjacente tem sido essencialmente epistemológica. No segundo caso, a orientação teórica tem sido psicológica. *A teoria da objetivação situa-se num projeto educativo diferente: vê o objetivo da educação matemática como um esforço político, social, histórico e cultural que visa a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em discursos e práticas matemáticas histórica e culturalmente constituídas, e que ponderam novas possibilidades de ação e pensamento.*

A teoria da objetivação se assenta na ideia fundamental de que aprender é tanto saber como vir a ser. Por detrás desta ideia fundamental está a concepção neo-Hegeliana, dialética, dinâmica, constitutiva de sujeitos e culturas : tanto o indivíduo como a cultura são entidades coadjuvantes em perpétuo fluxo, uma transformando-se continuamente na outra, e vice-versa.

Passemos agora ao segundo capítulo deste livro, no qual identifico o lugar da teoria da objetivação na paisagem das teorias socioculturais contemporâneas da educação matemática.