Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 1.1 - Limites: noção intuitiva, definição e interpretação geométrica.

Última atualização: 17 de abril de 2022.

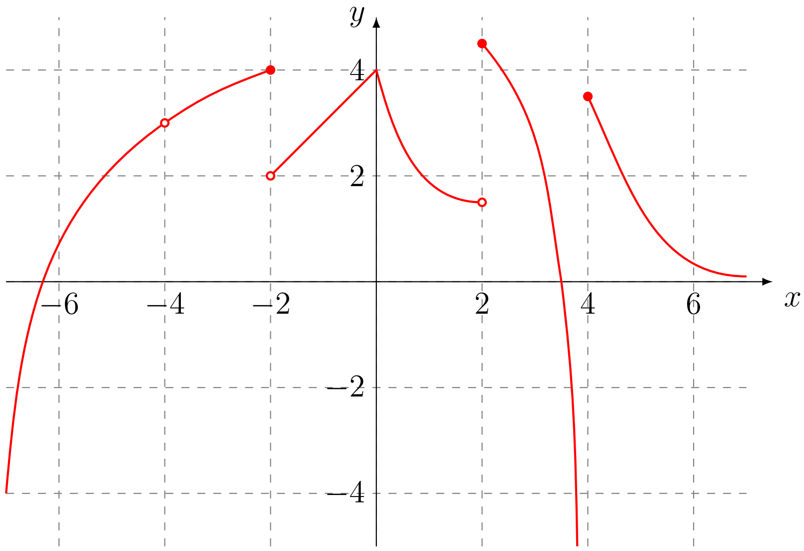
Exercícios Principais

P1. Estime algebricamente o valor do limite $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$ usando os valores de x fornecidos. Use uma calculadora.

x	1	1,5	1,9	1,9999
$f(x)$				

x	2,5	2,1	2,01	2,0001
$f(x)$				

P2. Considere a função f cujo gráfico está representado abaixo. Faça o que se pede.



(a) Determine o domínio de f.

(b) Estime $f(4)$, determine se o limite $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

(c) Estime $f(2)$, determine se o limite $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

(d) Determine $f(0)$, se o limite $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

(e) Estime $f(-2)$, determine se o limite $\lim_{x \to -2} f(x)$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

(f) Estime $f(-4)$, determine se e o limite $\lim_{x \to -4} f(x)$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

(g) O que se pode dizer sobre a existência do limite nos pontos -5, -1, $3{,}95$ e $7/3$?

P3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{se } x < -2 \\ -x^2-2x+3, & \text{se } -2 \leqslant x < 1 \\ -x+2, & \text{se } x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3 \\ 2, & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

(a) Faça o gráfico de f.

(b) Utilize o gráfico do item (a) para determinar se o $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

(c) Utilize o gráfico do item (a) para determinar se o $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

(d) Utilize o gráfico do item (a) para determinar se o $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

(e) Utilize o gráfico do item (a) para determinar se o $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

(f) Utilize o gráfico do item (a) para determinar se o $\lim\limits_{x\to 2{,}99} f(x)$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

Exercícios Complementares

C1. Estime algebricamente o valor do limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ usando os valores de x fornecidos. Use uma calculadora.

x	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}0001$	$-0{,}00001$
$f(x)$				

x	$0{,}5$	$0{,}1$	$0{,}0001$	$0{,}00001$
$f(x)$				

C2. Utilize a definição de limite para mostrar que $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$.

C3. Utilize a definição de limite para mostrar que $\lim\limits_{x\to 1} -4x+3 = -1$.

C4. Utilize a definição de limite para mostrar que $\lim\limits_{x\to 2} 2x \neq 5$.

C5. Utilize a definição de limite para mostrar que $\lim\limits_{x\to 4} 3x+1 \neq 12$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

UFSC

MTM

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 1.1

Limites: noção intuitiva, definição e interpretação geométrica.

Última atualização: 17 de abril de 2022.

Exercícios Principais

P1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2} = \dfrac{2}{3}$.

P2.

(a) $\mathbb{R} - \{-4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$.

(b) $f(4) \cong 3{,}5$ e $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ não existe.

(c) $f(2) \cong 4{,}5$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe.

(d) $f(0) = 4$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$.

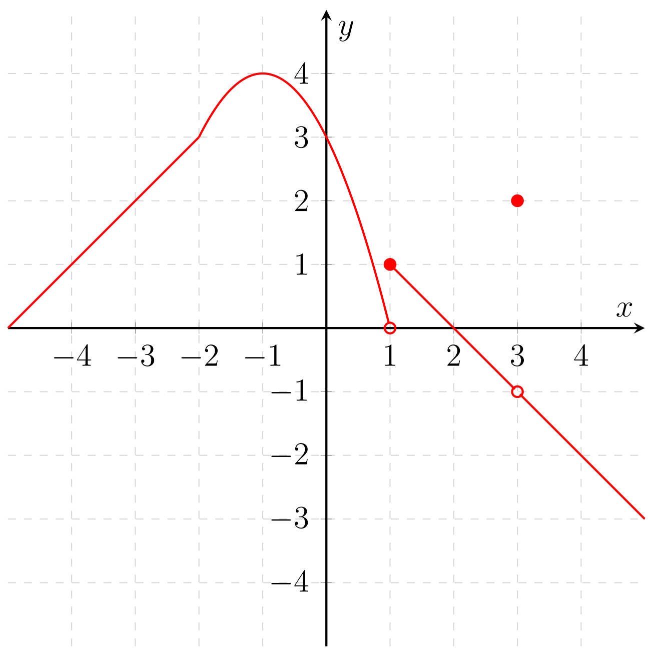
(e) $f(-2) = 4$ e $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ não existe.

(f) -4 não pertence ao domínio de f e $\lim\limits_{x\to -4} f(x) \cong 3$.

(g) Todos existem.

P3.

(a)



(b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ não existe.

(c) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 3$.

(d) $\lim_{x\to 3} f(x) = -1$ existe e, caso ele exista, calcule-o.

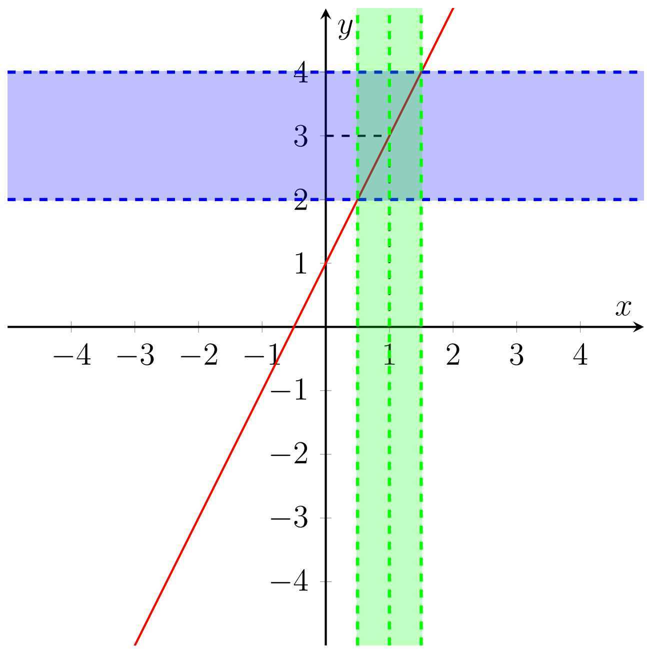
(e) $\lim_{x\to -1} f(x) = 4$.

(f) $\lim_{x\to 2{,}99} f(x) = -0{,}99$.

Exercícios Complementares

C1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

C2. *Rascunho da solução.* O gráfico abaixo ilustra a situação que temos e nos dará ideias de como resolver.



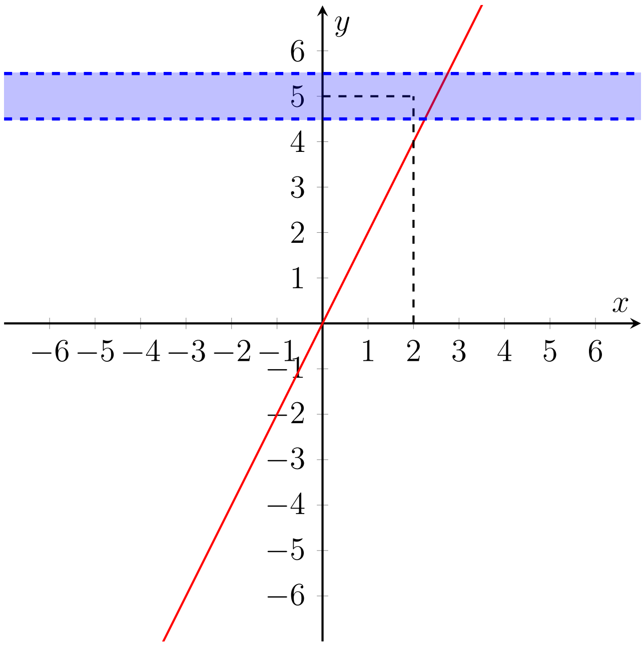
Para mostrar que o limite é 3, devemos iniciar com um valor de $\varepsilon > 0$ genérico e encontrar um δ associado a esse ε. A figura acima mostra que se $\varepsilon = 1$, podemos escolher $\delta = 0{,}5$. Porém, isso deve ser feito de forma genérica. Observe que ao fixar o valor de ε, a vizinhança de 3 considerada é $(3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$. Uma conta rápida mostra que se $x = 1 - \varepsilon/2$, então $f(x) = 3 - \varepsilon$ (basta igualar $2x + 1 = 3 - \varepsilon$ e isolar x). De forma similar, $x = 1 + \varepsilon/2$, então $f(x) = 3 + \varepsilon$. Como a função f é crescente, se $1 - \varepsilon/2 < x < 1 + \varepsilon/2$, então $3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon$. Em outras palavras, se $x \in (1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2)$, então $f(x) \in (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$. Geometricamente, isso significar que se escolhermos como faixa verde o intervalo $(1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)$, os valores de $f(x)$ ficam contidos na faixa azul. Como a faixa verde que procuramos é da forma $(1-\delta, 1+\delta)$, então uma boa escolha para δ é $\delta = \varepsilon/2$. Observação sobre esse rascunho: a rigor, quando escrevemos $x \in (1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)$, bastava considerar $x \in (1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)$ com $x \neq 1$. Vamos à escrita oficial da solução.

Solução. Seja $\varepsilon > 0$ e escolha $\delta = \varepsilon/2$. Assim, para qualquer $x \in (1-\delta, 1+\delta)$ com $x \neq 1$, como f é crescente, tem-se $3 - \varepsilon = f(1-\delta) < f(x) < f(1+\delta) = 3 + \varepsilon$ e, com isso, $|f(x) - 3| < \varepsilon$. Como a escolha inicial de ε foi arbitrária, então $\lim_{x\to 1}(2x+1) = 3$.

C3. Seja $\varepsilon > 0$ e escolha $\delta = \varepsilon/4$. Assim, para qualquer x que satisfaz $0 < |x-1| < \delta$ (isto é, $x \in (1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$), tem-se $|-4x + 3 - (-1)| = |-4x + 4| = 4|x-1| < 4\delta = 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$. Como a escolha inicial de ε foi arbitrária, então $\lim_{x\to 1} -4x + 3 = -1$.

Comentário. Nesta resolução, omitimos o rascunho. Mas, em geral, fazemos o rascunho para saber qual é uma boa escolha para δ e depois escrevemos a solução.

C4. *Rascunho da solução.* O gráfico abaixo ilustra a situação que temos e nos dará ideias de como resolver.



Para mostrar que o limite não é 5, devemos encontrar um valor de $\varepsilon > 0$ que não possua nenhum $\delta > 0$ de modo que a condição da definição de limite seja satisfeita. Escolhendo, por exemplo, $\varepsilon = 0{,}5$ (esta não é a única escolha possível aqui), vemos pela figura que é impossível encontrar uma faixa vertical (verde) ao redor de $a = 2$ (excluindo $a = 2$) de modo que o gráfico de f nesta faixa verde fique contido na faixa em azul. Em outras palavras, para $\varepsilon = 0{,}5$, não existe $\delta > 0$ de modo que a condição aconteça. Algumas contas serão feitas aqui no rascunho para serem usadas na solução final. Qualquer que seja o δ escolhido, e qualquer que seja a escolha de x no conjunto $(2-\delta, 2)$, tem-se $f(x) = 2x < 4$ e, portanto $|f(x) - 5| > 0{,}5 = \varepsilon$. Para ver que $f(x) = 2x < 4$ se $x \in (2-\delta, 2)$, basta observar que se $x < 2$ então $2x < 4$. Vamos à escrita oficial da solução.

Solução. Escolha $\varepsilon = 0{,}5$, seja $\delta > 0$ qualquer e escolha $x \in (2-\delta, 2)$. Para esse valor de x, tem-se $f(x) < 4$ e, portanto, $|f(x) - 5| > 1 > 0{,}5 > \varepsilon$. Logo, $\lim\limits_{x \to 2} 2x \neq 5$.

C5. Escolha $\varepsilon = 0{,}5$, seja $\delta > 0$ qualquer e escolha $x \in (4, 4+\delta)$. Para esse valor de x, tem-se $f(x) > 13$ e, portanto, $|f(x) - 12| > 1 > 0{,}5 > \varepsilon$. Logo, $\lim\limits_{x \to 4} 3x + 1 \neq 12$.