Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 1.2 - Limites: unicidade e propriedades.

Última atualização: 24 de agosto de 2022.

Exercícios Principais

P1. Utilizando apenas as propriedades de limite, que $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$ e que $\lim\limits_{x\to 2} 1 = 1$, calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x}{x+1}$.

Comentário 1. Você deve estar se perguntando qual a necessidade desse exercício, já que bastava ter "trocado" x por 2. Daqui algumas aulas aprenderemos uma lista de funções em que podemos calcular limite dessa forma, apenas trocando o x. Essas funções serão chamadas de *contínuas*. Porém, como ainda não sabemos quem são elas, resolvemos limites com as ferramentas que temos (por enquanto, as propriedades de limites, que $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ e que $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, em que x_0 e c não números fixados).

Comentário 2. Imagine que um exercício com enunciado análogo ao que você acabou de fazer peça para usar as propriedades para calcular o limite $\lim\limits_{x\to -3} \left(x^2 - \dfrac{x^3-1}{x^2+x}\right)$. Você iria pensar: preciso fazer um monte de etapas como antes para verificar que era só substituir x por -3. Nesse pensamento, você mentalmente usou as propriedades para chegar a essa conclusão de que poderia calcular o limite apenas substituindo x. Esse é o objetivo do próximo exercício: dizer se você pode ou não resolver o limite apenas substituindo (lembre de pensar se as propriedades funcionam no item analisado).

P2. Em cada item, diga se as propriedades permitem que o limite possa ser calculado apenas substituindo x. Se a resposta for sim, calcule o limite. Use as propriedades vistas na videoaula.

(a) $\lim\limits_{x\to -1} (x^2 - 3x + 4)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt[3]{x}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - \ln x}{x^2+x+1}$.

(e) $\lim\limits_{x\to -2} 3^x$.

(f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + x - \cos x}{2x-4}$.

(g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x + \operatorname{sen}(\pi x)}$.

(h) $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt[3]{x^2+x-3}\,\log_2(x-1)$.

Alerta de *spoiler*! Não leia esse comentário sem ter feito o exercício anterior! Você deve ter percebido que o limite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ não pode ser calculado apenas substituindo x (em outras palavras, não foi possível usar as propriedades). O problema nesse caso foi que a propriedade que trata do limite da divisão não pode ser aplicada quando o limite do denominador é 0. Mas isso não significa que o limite não existe ou que não pode ser calculado. Sua tarefa no próximo exercício é calcular alguns limites desse tipo. Consulte a videoaula para alguns exemplos (no gabarito há alguns resolvidos).

P3. Calcule os limites abaixo, se existirem.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

(c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-x^2+5x+1}{x(2x^2+x-2)}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{3x^3-4x^2+x-1}{x^2+x-2}$.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(4+x)^2-16}{x}$.

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}\right)$.

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$.

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}+\log_3(x^2+5)\right)$.

Comentário. A notação $\lim\limits_{x\to a}$ segue padrões semelhantes a outras notações matemáticas. Por exemplo, se você quer calcular o seno de $x+\pi$, você escreve $\operatorname{sen}(x+\pi)$ e não $\operatorname{sen}x+\pi$, pois a segunda notação é lida como o seno de x e o resultado deste seno é somado a π. O mesmo vale para limites: se você quer falar do limite da função x^2+x, você deve escrever $\lim\limits_{x\to a}(x^2+x)$, pois a notação $\lim\limits_{x\to a}x^2+x$ é lida como o limite de x^2 e o resultado do limite é somado com x. Apesar dessa convenção, muitas vezes os parênteses não são usados.

P4. Encontre valores de $a,b\in\mathbb{R}$ para que tenhamos $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-a}{x-5}=b$.

P5. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$ e que $\lim\limits_{x\to 2}(4f(x)+2g(x))=22$. Determine $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$.

P6. Sabendo que $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2}=1$, calcule os limites abaixo.

(a) $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x}$.

(c) $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)f(x)$.

Exercícios Complementares

C1. Calcule os limites abaixo, sabendo que $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=5$ e que $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-2$.

(a) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$.

(b) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+3g(x))$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$.

(d) $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)]^3\cdot 2^{f(x)+g(x)}$.

C2. Para $c>0$ fixado, encontre valores de $a,b\in\mathbb{R}$ para que tenhamos $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{x^2-a}{x-c}=b$.

C3. Sabendo que $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=3$ calcule

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)^4-g(x)^4}{f(x)^2-g(x)^2}.$$

C4. Determine $a>0$ sabendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3ax}-\frac{1}{x^2+3ax}\right)=\frac{1}{18}$.

C5. Dada a função $f(x)=\sqrt{24x-63}$, calcule

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}.$$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 1.2

Limites: unicidade e propriedades.

Última atualização: 24 de agosto de 2022.

Exercícios Principais

P1. Pelas propriedades de limite, obtemos

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - x) = \lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} x = (\lim_{x\to 2} x)^3 - \lim_{x\to 2} x = 2^3 - 2 = 6, \text{ e}$$

$$\lim_{x\to 2}(x+1) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1 = 3.$$

Como este segundo limite é diferente de 0, então

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - x)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)} = \frac{6}{3} = 2.$$

P2.

(a) Sim. $\lim\limits_{x\to -1}(x^2 - 3x + 4) = 8$.

(b) Sim. $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2$.

(c) Não. (Isso não significa que não podemos calcular o limite de outra forma).

(d) Sim. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - \ln x}{x^2 + x + 1} = \dfrac{e}{3}$.

(e) Sim. $\lim\limits_{x\to -2} 3^x = \dfrac{1}{9}$.

(f) Não.

(g) Sim. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x + \operatorname{sen}(\pi x)} = \dfrac{4}{3}$.

(h) Sim. $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt[3]{x^2 + x - 3}\,\log_2(x-1) = 6$.

P3.

(a) Ainda estamos iniciando nosso aprendizado sobre limites, mas já podemos adiantar algumas informações que vão aparecendo aos poucos. Esse limite que está aqui poderia ser calculado usando as propriedades se o limite do denominador não fosse igual 0. Isso funciona como um alerta: se o limite do denominador é 0, é necessário procurar outro caminho para resolver o limite. Em breve, veremos que, nessa situação em que o limite do denominador é 0, o resultado do limite do numerador nos dá um pista do que fazer. Sendo mais preciso, se o limite do numerador é diferente de 0 e do denominador é igual a 0, é possível provar que o limite não existe no sentido formal (nas próximas aulas definiremos uma noção informal de limite). Por outro lado, se ambos os limites do numerador e do denominador são iguais a 0, o limite pode existir e, nesse caso, cabe a nós encontrar uma forma de resolver o limite. Essa situação é normalmente chamada de *indeterminação em limites do tipo* 0/0. Ok, vamos à solução do item! Usando as propriedades, vemos que tanto o limite do numerador quanto do denominador são iguais a 0. Isso nos diz que devemos procurar algum método alternativo de solução. E esses métodos alternativos é que tornam a resolução de limites um problema não tão fácil de resolver: cada tipo de função necessita de um método diferente e nem sempre esses métodos são óbvios. Vejamos como resolver esse exemplo. Primeiro, notemos que 2 é uma raiz de ambos os polinômios x^3-8 e x^2-4. Logo, ambos são divisíveis por $x-2$. Ao fazer a divisão, descobrimos as seguintes fatorações: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ e $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Com isso, concluímos que

$$\frac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+2x+4}{x+2}.$$

Do ponto de vista de funções, descobrimos que as funções $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ e $\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$ são quase idênticas, a única diferença é que a primeira não possui o 2 no seu domínio e a segunda possui. Se a única diferença é no ponto 2, então elas são idênticas à esquerda e à direita do 2 e, portanto, devem possuir o mesmo limite no ponto 2. Em outras palavras,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}.$$

Mas esse último limite pode ser calculado usando as propriedades. Assim

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2}=3.$$

Você não precisa escrever tudo isso na solução, o objetivo aqui foi explicar todos os detalhes. Como solução, basta escrever

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2}=3.$$

(b) 6.

(c) $-3/2$.

(d) Não existe.

(e) Usando as propriedades, vemos que tanto o limite do numerador quanto do denominador são iguais a 0. Isso nos diz que devemos procurar algum método alternativo de solução. Nesse caso,

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}.$$

(f) 1.

(g) $-1/3$.

(h) 1.

(i) Não existe.

(j) 8.

(k) 1.

(l) 1/2.

(m) Este limite pode ser resolvido usando racionalização (se você souber como racionalizar expressões com raízes cúbicas). Porém, ilustraremos um outro método aqui: o método da *mudança de variável*. Este método consiste em reescrever a expressão do limite em uma nova variável de modo que a nova expressão facilite o cálculo do limite. Neste exemplo, a mudança de variável que torna o problema mais simples é $y = \sqrt[3]{x}$. Com essa escolha, $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \dfrac{y^3-1}{y-1}$ (observe que se $y = \sqrt[3]{x}$, então $x = y^3$). Sempre que uma mudança de variável é feita, a letra antiga deve desaparecer da expressão e apenas a variável nova deve permanecer (em nosso caso, x sumiu e a nova expressão tem apenas a letra y). A segunda mudança que devemos fazer é trocar "$x \to 1$" por "$y \to$?". Para isso, olhamos para a relação entre y e x e nos perguntamos o que acontece com o valor de y à medida que x se aproxima de 1. Como $y = \sqrt[3]{x}$, então y se aproxima de $\sqrt[3]{1} = 1$ à medida que x se aproxima de 1. Portanto, "$x \to 1$" deve ser trocado por "$y \to 1$". Assim,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y-1}$$

e, com isso, nosso limite inicial foi transformado em um outro que pode ser resolvido da mesma forma que o exemplo 2. Finalizando,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{y-1} = \lim_{y\to 1}(y^2+y+1) = 1^2+1+1 = 3.$$

(n) 1/12.

(o) 4/3.

(p) Como $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$ e $\lim\limits_{x\to 2} \log_3(x^2+5) = 2$, segue das propriedades de limite que

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2} + \log_3(x^2+5) \right) = 4+2 = 6.$$

A ideia de separar em dois limites surgiu porque a parcela $\log_3(x^2+5)$ pode ter seu limite calculado apenas usando as propriedades; e a parcela $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ não possui o ponto 2 em seu domínio mas vimos como calcular seu limite usando fatoração de polinômios. Dessa forma, conhecendo o limite de cada uma das parcelas, o uso das propriedades nos dá o resultado do limite.

P4. Como o denominador se anula quando $x = 5$, para que esse limite tenha chance de existir é necessário que o numerador também se anule quando $x = 5$ (pense no por que disso ser verdade). Assim $25 - a = 0$, ou seja, $a = 25$. Agora, quando $a = 25$ temos

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 10,$$

e, portanto, $b = 10$.

P5. $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3$.

P6.

(a) 4. **(b)** -2. **(c)** 0.

Exercícios Complementares

C1.

(a) -10. **(b)** -1. **(c)** $\dfrac{5}{7}$. **(d)** -64.

C2. $a = c^2$ e $b = 2c$.

C3. $L = 18$.

C4. $a = \sqrt{2}$.

C5. $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 4$.