Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

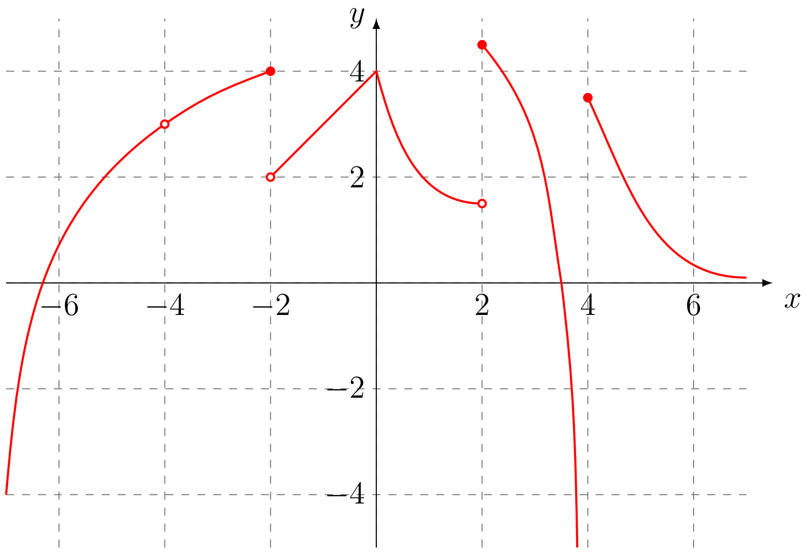
Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 1.4 - Limites laterais

Última atualização: 30 de abril de 2022.

Exercícios Principais

P1. Considere a função f cujo gráfico está representado abaixo. Determine o que se pede.



(a) Os limites $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 4^+} f(x)$.

(b) Os limites $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

(c) Os limites $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(d) Os limites $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to -2^+} f(x)$.

(e) Os limites $\lim_{x\to -4^-} f(x)$ e $\lim_{x\to -4^+} f(x)$.

(f) O que se pode dizer sobre a existência dos limites laterais nos pontos -5, -1, 3,95 e $7/3$?

P2. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{se } x < -2 \\ -x^2-2x+3, & \text{se } -2 \leqslant x < 1 \\ -x+2, & \text{se } x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3 \\ 2, & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

(a) Determine $f(1)$ e todos os limites de f no ponto 1.

(b) Determine $f(0)$ e todos os limites de f no ponto 0.

(c) Determine $f(-2)$ e todos os limites de f no ponto -2.

(d) Determine $f(3)$ e todos os limites de f no ponto 3.

(e) Determine $f(-1)$ e todos os limites de f no ponto -1.

(f) Determine $f(2{,}99)$ e todos os limites de f no ponto 2,99.

P3. Calcule os limites abaixo, se existirem.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2e^x}{x+3}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{|x^2-4|}{x-2}$.

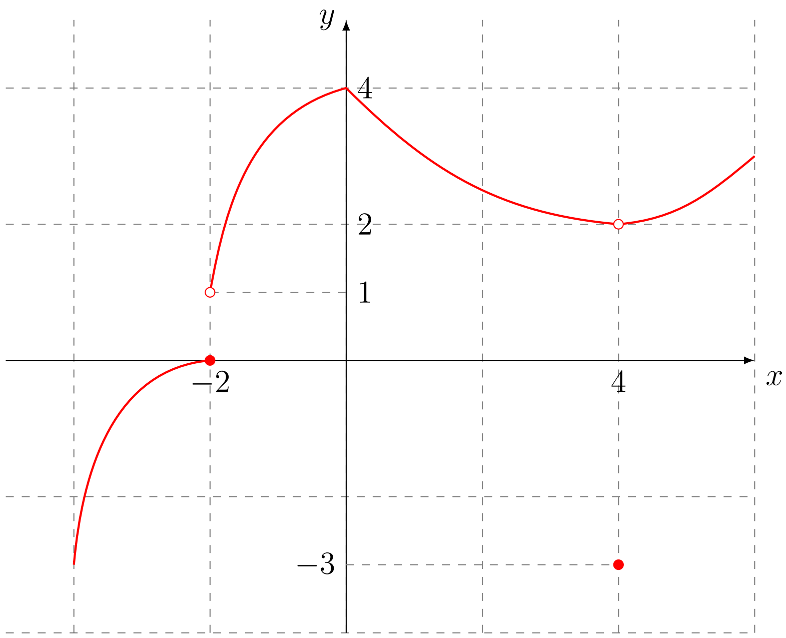
(h) $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} \sqrt[3]{x^2+x-3}\,\log_2(x-1)$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$.

P4. Sejam $f(x)=-4x+4$, $g(x)=\begin{cases} -x, & x\leqslant -2 \\ 1-x, & x>-2 \end{cases}$ e $h(x)=f(x)g(x)$. Determine $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} h(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} h(x)$.

Exercícios Complementares

C1. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o valor de cada quantidade, se ela existir. Se ela não existir, explique por quê.



(a) $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x)$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x)$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x)$.

(d) $f(-2)$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 4} f(x)$.

C2. Considere a função

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 3 \\ \dfrac{x^2}{3}, & x < 3 \end{cases}$$

e calcule os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{h(x)-h(3)}{x-3}$. **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{h(x)-h(3)}{x-3}$. **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{h(x)-h(3)}{x-3}$.

C3. Esboce o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaça todas as seguintes condições: $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$, $\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x) = 2$, $f(3) = 3$ e $f(-2) = 1$.

C4. Determine a e b para que $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ existam, em que f é a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - b, & \text{se } x < -1 \\ x^3 - ax + 7, & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2 - (b+1)x + b}{x-1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 1.4

Limites laterais

Última atualização: 30 de abril de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ formalmente não existe e $\lim_{x\to 4^+} f(x) \cong 3{,}5$.

(b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) \cong 1{,}5$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \cong 4{,}5$.

(c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$.

(d) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 4$ e $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 2$.

(e) $\lim_{x\to -4^-} f(x) \cong 3$ e $\lim_{x\to -4^+} f(x) \cong 3$.

(f) Todos existem.

P2.

(a) Pela definição da função, $f(1) = -1 + 2 = 1$. Para calcular $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ devemos nos perguntar como o gráfico de f se comporta à esquerda e próximo do ponto 1. À esquerda do ponto 1, f às vezes se comporta como $x+5$ e às vezes como $-x^2 - 2x + 3$. Porém, próximo ao ponto 1, f se comporta como $-x^2 - 2x + 3$. Portanto, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2 - 2x + 3) = -1^2 - 2\cdot 1 + 3 = 0$. De forma similar, para calcular $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ devemos observar que f se comporta como $-x+2$ à direita e próximo de 1. Logo, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x+2) = -1+2 = 1$. Como os limites laterais são diferentes, então $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe.

(b) Pela definição da função, $f(0) = 0^2 - 2\cdot 0 + 3 = 3$. Observe que, tanto à esquerda quanto à direita e próximo do ponto 0, f se comporta como $-x^2 - 2x + 3$. Logo $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -0^2 - 2\cdot 0 + 3 = 3$ e, com isso, $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$.

(c) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) = 3$.

(d) $f(3) = 2$ e $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = -1$.

(e) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 4$.

(f) $\lim_{x\to 2{,}99^-} f(x) = \lim_{x\to 2{,}99^+} f(x) = \lim_{x\to 2{,}99} f(x) = f(2,99) = -0{,}99$.

P3.

(a) $\dfrac{1}{2e}$.

(b) 1.

(c) 1/8.

(d) -1.

(e) 1.

(f) Não existe.

(g) 4.

(h) 6.

(i) 0.

P4. $\lim_{x \to -2^-} h(x) = 24$ e $\lim_{x \to -2^+} h(x) = 36$.

Exercícios Complementares

C1.

(a) 0.

(b) 1.

(c) Não existe.

(d) 0

(e) 4.

(f) 4.

(g) 4.

(h) 2.

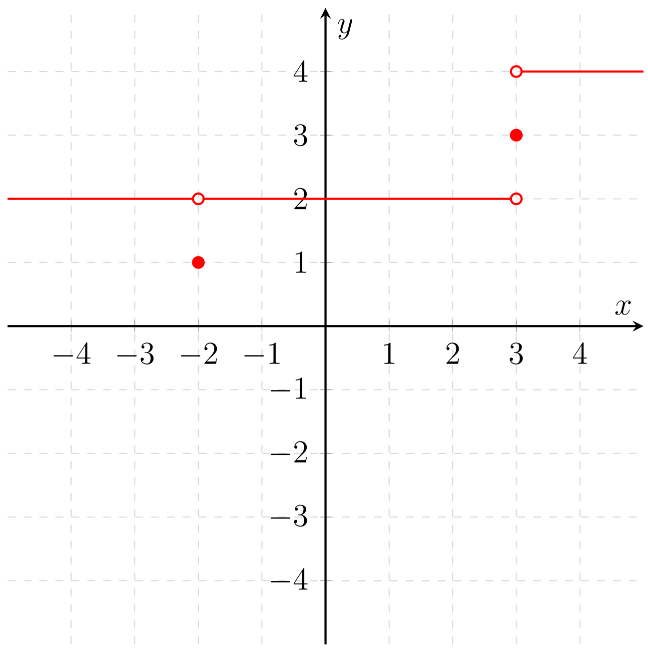
C2.

(a) 2.

(b) 1.

(c) Não existe.

C3. Há infinitas respostas possíveis. Uma delas está abaixo.



C4. $a = 5$ e $b = -2$.