Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

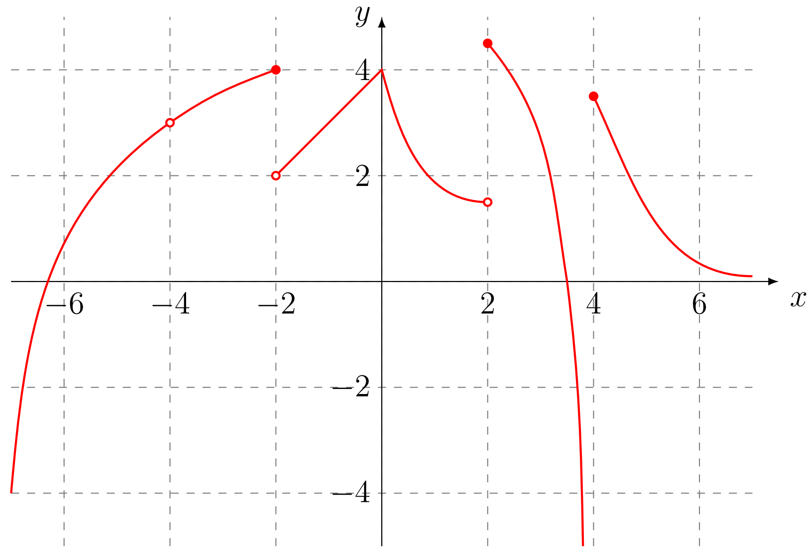
Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 1.5 - Continuidade: definição e propriedades

Última atualização: 30 de abril de 2022.

Exercícios Principais

P1. Considere a função f cujo gráfico está representado abaixo. Determine os pontos de continuidade e descontinuidade de f.



P2. Seja f uma função contínua (isto é, contínua em todos os pontos do seu domínio). Sabe-se que $f(0) = 3$, $f(2) = 0$ e $f(3) = -2$. Calcule os limites $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

P3. Sabe-se que f e g são funções contínuas, $f(3) = 5$ e $\lim\limits_{x \to 3} (2f(x) - g(x)) = 4$, encontre $g(3)$.

P4. Em cada item, use as propriedades de continuidade para explicar por que a função é contínua em seu domínio.

(a) $f(x) = (x^2 - 3x + 4)e^x$.

(b) $f(x) = 2\,\text{sen}\,x - \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

P5. Use a continuidade das funções do exercício anterior para calcular os limites abaixo.

(a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 3x + 4)e^x$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(2\,\text{sen}\,x - \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}\right)$.

P6. Sejam a e b números reais tais que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - ax^2 + bx}{x + 5}, & x \neq -5 \\ 15, & x = -5 \end{cases}$$

é contínua. Calcule $f(6)$.

P7. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-2}{3x^2-3} & \text{se } x < 1 \\ \alpha & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{\beta(x^2-1)}{x-1} & \text{se } 1 < x < 2 \\ \dfrac{\gamma(x^2+1)}{2x} & \text{se } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Encontre valores reais para α, β e γ tais que a função f seja contínua nos pontos $x_0 = 1$ e $x_0 = 2$.

Exercícios Complementares

C1. Determine a e b sabendo que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - ax + 4}{x+4}, & x < -4 \\ \\ -x + b, & x \geqslant -4 \end{cases}$$

é contínua.

C2. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{se } x < -2 \\ -x^2 - 2x + 3, & \text{se } -2 \leqslant x < 1 \\ -x+2, & \text{se } x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3 \\ 2, & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Determine os pontos de descontinuidade de f e diga quais são removíveis.

C3. A afirmação

$$\text{“se } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ então } f \text{ é contínua em } x_0\text{”}$$

é verdadeira ou falsa? Justifique.

C4. Seja f uma função. Sabe-se, por algum teorema ou resultado prévio, que f é contínua no ponto a. Como essa informação lhe ajuda no cálculo dos limites $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$? Essa informação também ajuda a calcular o limite $\lim_{x \to b} f(x)$, em que $b \neq a$?

C5. Em cada item, explique por que f é descontínua em x_0.

(a) $f(x) = \ln|x-2|$ em $x_0 = 2$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & \text{se } x \neq 3 \\ 5 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $x_0 = 3$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 1.5

Continuidade: definição e propriedades

Última atualização: 30 de abril de 2022.

Exercícios Principais

P1. f é contínua em $\mathbb{R} - \{-4, -2, 2, 4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 4) \cup (4, \infty)$ e descontínua em $\{-4, -2, 2, 4\}$. *Observação.* Dependendo da definição dada, o ponto -4 pode ou não ser um ponto de descontinuidade de f. Algumas definições tratam de continuidade e descontinuidade apenas para os pontos no domínio da função. Como -4 não está no domínio, nessa definição -4 não entraria na lista de descontinuidades. Em nosso curso, consideramos pontos fora do domínio como pontos de descontinuidade. Assim, em nossa definição, -4 é um ponto de descontinuidade.

P2. $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 3$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 0$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3) = -2$.

P3. $g(3) = 6$.

P4.

(a) Como funções exponenciais e polinomiais são contínuas e o produto de funções contínuas é contínua, então f é contínua.

(b) Como $\operatorname{sen} x$ é contínua e número vezes função contínua gera uma nova função contínua, então $2 \operatorname{sen} x$ é contínua. Como $x^2 - 9$ e $x - 3$ são contínuas (por serem polinomiais), então $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ é contínua onde o denominador não se anula (em outras palavras, em $\mathbb{R} - \{3\}$ que é o domínio da função). Por fim, como diferença de funções contínuas é contínua, então $2 \operatorname{sen} x - \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ é contínua em $\mathbb{R} - \{3\}$, que é seu domínio.

P5.

(a) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 3x + 4)e^x = 2e$.

(b) $\lim_{x \to 0^-} \left(2 \operatorname{sen} x - \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = -3$.

P6. $f(6) = 48$.

P7. $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ e $\gamma = 6/5$.

Exercícios Complementares

C1. $a = -5$ e $b = -7$.

C2. f é descontínua em 1 e 3 e 3 é uma descontinuidade removível.

C3. Falsa.

C4. A informação de que a função f é contínua no ponto a garante que o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e que o resultado é $f(a)$. Pela existência do limite, então os limites laterais também existem e também são iguais a $f(a)$. Logo, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. A informação de continuidade em um determinado ponto nada diz sobre a continuidade em outro. Logo, saber a continuidade no ponto a não ajuda em nada no cálculo do limite no ponto b.

C5.

(a) f não satisfaz nenhuma das condições de continuidade: f não está definida em x_0, limite de f em x_0 não existe (no sentido formal) e o limite não pode ser igual a $f(x_0)$ porque nem o limite e nem $f(x_0)$ existem.

(b) $f(x_0) = 5 \neq 2 = \lim_{x\to x_0} f(x)$.