**Universidade Federal de Santa Catarina**
**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas**
**Departamento de Matemática**

**Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)**

# Lista 1.6 - Continuidade: mais propriedades e Teorema do Valor Intermediário

Última atualização: 1 de maio de 2022.

## Exercícios Principais

**P1.** Em cada item, use as propriedades de continuidade para explicar por que a função é contínua em seu domínio.

**(a)** $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2 - 1)$.

**(b)** $f(x) = \dfrac{6 + \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)}{x^2}$.

**P2.** Use a continuidade das funções do exercício anterior para calcular os limites abaixo.

**(a)** $\lim\limits_{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{arcsen}(x^2 - 1)$.

**(b)** $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{6 + \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)}{x^2}$.

**P3.** Mostre que a função $f(x) = x^3 + x + 1$ possui, pelo menos, uma raiz real.

**P4.** Mostre que a função $f(x) = x^6 - 6x + 1$ possui, pelo menos, uma raiz real no intervalo $[-1, 1]$.

**P5.** Seja $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz $f(0) = 16$, $f(1) = k$ e $f(2) = 18$. Para qual dos valores de $k$ abaixo a equação $f(x) = 15$ possui, com certeza, pelo menos duas raízes reais distintas?

(a) $k = 14$. (b) $k = 15$. (c) $k = 16$. (d) $k = 17$. (e) $k = 18$.

## Exercícios Complementares

**C1.** Mostre que a equação $\cos x = x$ possui pelo menos uma solução real.

**C2.** Aplique o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação $x^3 - 4x + 1 = 0$ tem três raízes reais distintas.

**C3.** Classifique cada item abaixo como verdadeiro ou falso.

**(a)** Pelo Teorema do Valor Intermediário, é possível concluir que a função $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5}$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo $[0, 2]$.

**(b)** Pelo Teorema do Valor Intermediário, é possível concluir que a função $f(x) = \dfrac{x - \cos(\pi x)}{x^2 + 1}$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo $[0, 1]$.

**(c)** Seja $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, é possível concluir que existe $x_0 \in [0, 4]$ tal que $f(x_0) = 7$.

**(d)** A função $f(x) = -2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + x + 1$ possui, pelo menos, uma raiz real.

**(e)** Toda função contínua possui, pelo menos, uma raiz real.

**C4.** A função $f(x) = 1/x$ satisfaz $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$, isto é, $f(-1)$ e $f(1)$ possuem sinais opostos. É possível usar o Teorema do Anulamento para concluir que $f$ possui uma raiz no intervalo $(-1, 1)$?

**C5.** Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e suponha que $f(a)$ e $f(b)$ possuam sinais opostos. Sabemos pelo Teorema do Anulamento que $f$ possui pelo menos uma raiz no intervalo $(a, b)$. Descubra uma estratégia que possa ser implementada em um computador para encontrar essa raiz.

**C6.** Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Mostre que se $f\colon I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que não se anula no intervalo $I$ então ou $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ ou $f(x) < 0$ para todo $x \in I$.

**Universidade Federal de Santa Catarina**
**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas**
**Departamento de Matemática**

MTM

**Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)**

**Gabarito parcial da Lista 1.6**

**Continuidade: mais propriedades e Teorema do Valor Intermediário**

Última atualização: 1 de maio de 2022.

## Exercícios Principais

**P1.**

**(a)** Como $\operatorname{sen} x$ é contínua e inversa de contínuas é contínua, então $\operatorname{arcsen}(x)$ é contínua (em seu domínio). Como $x^2 - 1$ (polinomial) é contínua e composição de contínuas é contínua, então $f$ é contínua (em seu domínio). Você sabe dizer qual é esse domínio?

**(b)** Como $\operatorname{sen} x$ e $x$ (polinomial) são contínuas e soma de contínuas é contínua, então $x + \operatorname{sen} x$ é contínua. Como composição de contínuas é contínua, então $\operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$ é contínua. Como 6 é contínua e soma de contínuas é contínua, então $6 + \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$ é contínua. Como $x^2$ é contínua e divisão de contínuas é contínua onde o denominador não se anula, então $f$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$ que é o seu domínio.

**P2.**

**(a)** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) = -\frac{\pi}{6}$.

**(b)** $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{6 + \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)}{x^2} = \frac{6}{\pi^2}$.
*Curiosidade.* Você sabia que, ao escolher dois números naturais positivos de forma aleatória, a probabilidade de esses dois números serem primos entre si (isto é, não possuírem fatores primos em comum) é $\dfrac{6}{\pi^2}$? Não tem nada a ver com a questão, o comentário é só porque o resultado do limite lembrou esse fato. : )

**P3.** Encontrar uma raiz, significa encontrar um número $c$ tal que $f(c) = 0$. Nós podemos procurar exatamente tal $c$, mas o exercício pede apenas para mostrar que existe tal $c$. O Teorema do Anulamento tem o poder de fornecer uma raiz, mas é preciso encontrar um intervalo $[a, b]$ para usar o teorema. Esse intervalo tem que ter valores $f(a)$ e $f(b)$ de sinais opostos. Chutando alguns valores, podemos ver, por exemplo, que $f(-1) = -1$ e $f(0) = 1$. Usando $a = -1$, $b = 0$ e lembrando que $f$ é contínua, então o Teorema do Anulamento nos garante que $f$ possui uma raiz (o teorema ainda garante que existe uma raiz no intervalo $(-1, 0)$).

**P4.** Similar à solução do exercício anterior.

**P5.** Item (a) $k = 14$.

## Exercícios Complementares

**C1.** Considere a função $f(x) = x - \cos x$. Note que $f(0) = -1$ e $f(\pi/2) = \pi/2$ possuem sinais opostos e $f$ é contínua, portanto existe $c \in [0, \pi/2]$ tal que $f(c) = 0$. Mas dizer que $f(c) = 0$ é o mesmo que dizer que $c$ é solução da equação $\cos x = x$.

**C2.**

**C3.**

**(a)** Falso. **(b)** Verdadeiro. **(c)** Verdadeiro. **(d)** Verdadeiro. **(e)** Falso.

**C4.** Não é possível usar o teorema pois a função não é contínua no intervalo $[-1, 1]$, pois 0 não pertence ao domínio de $f$.

**C5.** Pesquise por *Método da bissecção.*

**C6.**